P. GREGORII A S^TO VINCENTIO

OPVS

GEOMETRICVM QVADRATVRÆ CIRCVLI

ET SECTIONVM CONI

Decem libris comprehensum.



ANTVERPIÆ, APVD IOANNEM ET IACOBVM MEVRSIOS ANNO M.DC.XLVII.

Cum priuilegio Cæsareo et Regis Hispaniarum.

DOMVI
AVSTRIACAE
SEMPER AVGVSTÆ.

DAte veniam, Auguſti Principes, ſi ad Voluminum meorum frontem Veſtras columnas transferre, & meis lucubrationibus Veſtrum PLVS VLTRA adſcribere auſus ſum. Non tam ſum arrogans vt arbitrer ad Matheſeos apicem ita me perueniſſe, quemadmodum Vos ſtatutas Herculi metas prætergreſsi, extremos gloriæ mundiq́ue terminos attigiſtis. Verùm cùm à benignitate Veſtra tutelam, à nominis ſplendore lucem peterem, conſilium fuit ijs columnis, quæ magnam mundi partem ſuſtentant, operis mei limen fulcire, & ſcriptoribus ſtimulo eſſe, vt in ſapientiæ regno nullas ſibi metas poſitas rati, ſcientiarum quàm latiſsimè fines propagent: quiq́; Mathematicas colunt diſciplinas, vt vltrà quàm meis ego vigilijs eniti potui, ſuis ipſi laboribus contendant. Quod ſi cui aliquouſque progreſſus videbor, & in reperiendâ circuli quadraturâ ceteris ante me felicior fuiſſe; non tam mihi gratulabor quia repererim, quod alius nemo; quàm opto, vt, dum Vobis offero, quod alius nemini, ſingularis id obſeruantiæ argumentum permittatis eſ-

ſe. Sunt ea Auſtriacorum Principum in familiam noſtram merita, vt ijs agnoſcendis nulla gratia par, teſtandis omnis conatus ſuperuacaneus ſit: Neque aliam beneficentia Veſtra, quàm ſit ipſamet ſibi, repoſcit mercedem. Quemadmodùm tamen flumina in mare, vnde ortum habent, redire non ideò deſinunt, quòd illius immenſitatem ſuo non augeant affluxu, ita tametſi magnitudini Veſtræ noſtris nihil ſtudijs poſſit accedere, adeò tamen effuſam benignitatem quâ poſſumus animi teſtificatione non proſequi nefas ſit. Quò ſi faciant tot ingeniorum, quæ per Vos Societas alit, conſecrata nomini Veſtro monumenta; quod eidem ego L. M. Q. dedico, vtinam & inter ea locum, & apud Vos fauoris aliquid atque approbationis reperiat: Regi quidem Hieroni ſcio nihil dicaturum fuiſſe libentiùs Archimedem, quàm dimetiendi quadrandique circuli rationem, neque impotentiore vnquam lætitiâ ſuum εὕρηκα, quàm hâc repertâ ingeminaturum fuiſſe; verùm quod tantò auguſtiore nomine inſigniatur; &, tanquam vobis non indignum, Auſtriacum vocetur, quanto interuallo illius vota vt ſuperet, neceſſe eſt? Nominis Veſtri menſuram nemo expleat præter Vos. Sed ſtudij & obſeruantiæ, non ambitionis fuit, digeſtum à me problema Auſtriacum vocare. Et dominorum liberti, & patronorum clientes ſibi induunt nomina. Nec quidquam tutius quàm quod Regio nomine ſignóue munitur. In arduo poſita atque inacceſſa eſt Veſtra gloria. Sed facilis ad benignitatem patet aditus

tus. Propterea potentes estis, vt benefici sitis. Propterea latissimè regnatis, vt complectamini quamplurimos. Non ad pauciores patrocinium, quàm imperium extenditis. Quid quod Catholicum nomen Vestris quoque columnis impositum sit, nec nisi ex his deiectis illius casum, qui Ecclesiam in vobis oppugnant, hæretici sperent? At si familiarum firmamentum religio est, mutuamque suis defensoribus præstat tutelam; dum prima illius cura erit, quidni sitis æternitatis securi? Nihil in humanis stabile, nec rarò Dominos mutauit orbis. Vt traiectos per quadrum radios in orbem deducens *Quadrata rotundis mutat* Sol, ita prospera aduersis, ima summis inuertere gaudet interdum, per quam Reges regnant, prouidentia; sed & quomodo si vice versâ rotunda quadratis mutes, globumque in cubum formes, suam ei mobilitatem adimas; ita instabilem regnorum potentiam pietatis ac religionis studium firmat. Christiani conditor Imperij Constanstinus quadratæ aræ mundi globum imposuit, professus orbis Imperium non tam viribus, quàm sacrorum cultu niti; neque tam ab armis, quàm ab aris regnorum petendam tranquillitatem. Redactus ad quadrum globus operis mei argumentum est; sit & Vestræ felicitatis omen: quà modo caret ac termino Vestram magnitudinem exhibet, quà stellis inoccidais eum insigniui, gloriam motus inter ac turbas non occubituram repræsentet: vtque rotunda quadrando suam illi volubilitatem ademi, ita fortunæ

in

inconſtantiam Veſtra virtus & religio coerceat, ſalutemque ac pacem populorum in laudem ſuam vertat. Ita vouet

NOMINI VESTRO

æternùm deuota

SOCIETAS IESV FLANDRO-BELGICA:

Cuius ego minimus Gregorius à Sancto Vincentio.

SERE-

SERENISSIMO

LEOPOLDO VVILHELMO

ARCHIDVCI AVSTRIÆ,

DVCI BVRGVNDIÆ, &c.

BELGII ET BVRGVNDIÆ PRO REGE CATHOLICO

GVBERNATORI, &c.

ORDINIS TEVTONICI

SVPREMO PRÆFECTO, &c.

AVſtriaco nomini conſecratum opus ad Te, SERENISS. LEOPOLDE defero, qui Auguſtæ Domûs pars magna cùm ſis, totam nobis repræſentas. Duabus ea ſtirpibus cælo ſe attollens, Ferdinandum III. & Philippum IV. capita habet. Illo Germania potitur, hoc Hiſpania: vtrumque in Te agnoſcit Belgica. Alterius in Fratre genium, alterius in Vicario poteſtatem veneratur: dubium vtri plus obſtricta, illine quòd carere Te ſuſtineat, an huic quòd habere contendat. Erat aliquot abhinc annis quòd gaude-

ret vnico Regis sui Fratre dignam se æstimari. Quod nunc Cæsari tam cara sit, vt & vnicum suum ipse concedat, quomodo vel inter miserias suas non beatam se putet? hoc magis, quòd reparandis Imperij rebus admotus, & fraternis exercitibus præfectus Belgis dari non potueris, quin Germanis eripereris. At, si regionem, non virtutis campum mutasti. In Belgio Germaniam reperturus es, hoc est, Prouinciam prudentiæ, magnanimitati, vigilantiæ Tuæ parem. Duris exercitus ad nihilò molliora venisti. Sed ad hæc & natura Te aptauit, & virtus instruxit. Suæ sint alijs deliciæ. Tibi pro quiete labor est, pro aulæ commodis puluis & campus, pro oblectamento equus & arma. Quid quod, quantum Tibi, quantum iis, per quos Te habemus, debeamus, minùs constaret, si ad feliciores venisses? Non peritiam modò medici, sed & beneficium morbi commendant. Tibi quoque optabilius Belgas beatos facere, quàm reperire. Vti sospitatem nobis dulciorem antecedens calamitas, ita illustriores triumphos Tuos præteritæ clades facient. Quis eum citò diem det, quo, quos desiderio Tui veniens compleuisti, pleno lætitiæ fructu victor exsaties? quo, conuersis aliò belli calamitatibus, pristinus Prouinciarum decor, vbi pace non licet, ibi victorijs reflorescat? cœpit à Serenitate Tua ea Belgis lux affulgere: neque suas tantùm in Te collocant, sed & Hispaniæ Germaniæq; spes Tibi credunt commissas. Experire vicissim Tu quales gubernandos susceperis,

ceperis: Deoque, cuius TIMORE gloriaris, propitio in curanda Belgij salute regionum multarum regnorumque rem gere.

SERENITATIS TVÆ

minimus Cliens

GREGORIVS A SANCTO VINCENTIO

Societatis IESV.

PRÆFATIO
AD BENEVOLVM
LECTOREM.

Cogitanti mihi persæpè quid caussæ esset, quod retrò tot actis sæculis, problematis de quadrando circulo, quam nunc inuestigamus, solutio, à tot magnis præclarisque viris nequidquam tentata, necdum expedita sit, facemque ipso præferente Archimede, nihilominus suis adhuc tenebris inuoluta permanserit; illud præcipuè occurrit, lumen quod ab antiquis nobis tradita Geometria exhibebat, nimis debile esse, quàm vt tam intricatæ rei peruestigandæ sufficeret. Id sanè præterquam quod astruerent tantorum virorum, quot hactenus Geometria eduxit, indefatigabiles quidem, vani tamen labores, Archimedæa certè Spiralis, & Pappi Quadratrix idipsum euincere mihi visa sunt. Vt quid enim desertâ Geometriæ tritâ semitâ, aliam ipsi planè viam ingrederentur viri in Geometricis acutissimi, si hâc quæ omnibus patet, quæque omnium vestigiis teritur, ad optatum finem duci se posse exstimassent? Adde quod à præclaris hoc æuo viris factum video, vt, dum ad idem problema soluendum se accingunt, veteri relictâ, nouam sibi Geometriæ formam effinxerint, & per præruptos calles quos suo sibi marte aperuerunt, eniti eò conati sint, quò alios tendere quidem semper, numquam tamen peruenturos videbant. Hæc mihi seriò consideranti, idem profectò in mentem venit aggredi, quod ab aliis summâ cum laude videbam attentatum: illudque Poëtæ præsertim animos dabat:

Esse aliquò prodire tenus, si non datur vltra.

Ad nouas itaque artes, nouaque inuenta animos studiaque conuerti; nihilque non tentatum reliqui, donec non prodiisse tantùm penetrasseque hunc montem aliquousque, sed metas ipsas (absit verbo inuidia) attigisse nobis visi sumus.

Atque vt aliquam hîc itinerum meorum rationem, ambagesque quas, dum in incertum erro, percurri aperiam, primò Archimedis exemplo inductus, difficultatem hanc in aliam haud paullò difficiliorem, Spiralis inquam contingentē, conieci. quod dum ago, impensiusque diu Spiralis contemplationi insisto, admirorque quæ contingentem Spiralis inter & Circuli quadraturam sit connexio, ecce tibi aliud plenè in mentem incidit, mira scilicet symbolizatio concordiaque Spiralis cum Parabolâ. quam dum prosequor, ostendo Spiralem inuolutam esse Parabolam, & vicissim Parabolam non nisi Spiralem esse euolutam. Romam, vt mox aperiam, postmodum euocatus, rem hanc cum P. Christophoro Grienbergero, acutissimo sanè in Mathematicis viro, totaque tum Italiâ celeberrimo, aliisque contuli: à quibus cùm fortè rogarem, num symbolizatio hæc Archimedi fortassis nota occasionem suggessisset Spiralem ad Circuli quadraturam tam admirabili artificio applicandi, non eiusmodi esse inuentum affirmabant illi, quod ab Archimede, si ei innotuisset, vllo modo celandum fuisse crederent. Æquus Lector statuet quid sit de re, cùm ea quæ libro de Hyperbola subiunxi, peruoluerit. Hâc tamen cùm absolui viâ problema posse diffiderem, à Spirali ad Quadratricem animum studiumque conuerti: quam dum nouis efformo producoque modis, plurimasque eius exhibeo proprietates, quæ sola iustum librum constituere potuissent (constituissentque, nisi is qui ceteros ferè omnes labores meos, etiam hos abstulisset casus) ne hic quidem adiumenti satis reperio, quo tam arduum problema possim absoluere. Inde igitur rursus ad noua consilia conuersus, reperi tandem materiam eam quæ de corporibus agit, ab antiquis inchoatam, planè imperfectam in ipsis adhuc hærere incunabilis: nescio tamen quæ meæ hac in par-

te

te lux menti obiiceretur, & ad noua rursus studia animos daret. Totum igitur me in corporum contemplationem, efformationem, comparationem, peruigili multorum annorum curâ contuli, vt tandem aliquam mihi viam complanarem, qua ad montem hunc, imperuium hactenus, possem eniti. Res ex sententia tandem successit, complanaui quoad potui omnia; an autem apicem ipsum attigerim, docebit res.

Prima igitur cura fuit noua omnis generis corpora, nouo & Geometrico more efformare, quæ libro huius operis septimo continentur; & quia corporibus iis indigebam quæ cum Sphæricis comparari possent, librum de circulis, qui tertium hic locum obtinet, tres prætereà conicorum præmisi, qui exinde suo ordine quartum, quintum, sextumque conficiunt; quartum quidem de Ellipsi, quia maiorem cum circulo cognationem habet, illi subiunxi; quintum de Parabola, sextum denique de Hyperbola; copiosi sunt singuli, quippe quibus naturam abstrusam hactenùs sectionum illarum, ab Appollonio fortasse studio inuolutam ita euoluo, vt à communis Geometriæ perito, nullo Appollonij adminiculo, intelligi possit. Horum verò demonstrationes, cùm à linearum proprietatibus dependerent, alterum de lineis præmittere necesse fuit, quo earum affectiones quæ vsui nobis futuræ erant, lemmatum instar explanarem; hicque totius operis primus est, eiusque quasi basis. Iam verò cùm tam in Conicis quàm in corporum comparatione inscriptionibus, exhaustionibusque indigerem, librum de Progressionibus Geometricis placuit conscribere, tum quod non parum viderem subleuandum Lectoris meumque tædium longis illis, Archimedi tamen vsitatis, ratiocinationibus, quibus vtitur, quoties exhaustiones demonstrationibus adhibet; tum quod plurima noua, & non iniucunda exhibeat, quæ non mediocrem fortasse legenti afferent, vel admirationem, vel voluptatem, hicque secundus liber est. Rursus quia corpora diuersarum in quantitate specierum comparare inter se non poteram nisi in exhaustionibus octo planè vterer terminis, iisque sæpè dissimilium rationum, quarum tamen in Geometria hactenus non fuit vsus, librum de Proportionalitatibus, quas octauus exhibet, nouam quasi Geometriam concinnare me oportuit. Ecquando enim hactenus Geometria proportionibus vsa nisi quæ in similitudine rationum consisterent? mihi verò etiam dissimilibus rationibus vtendum fuit. Hisce itaque rite expositis, tum demum ad Quadraturas varias, ac demum Circuli, quas reliquis libris absoluo, hoc ferè tenore me accingo. In libro de Parabola conscripto, sectiones produco Parabolicas, præter alias, illas quoque quas circulus mihi offerebat. dein ex illis duas semiparabolas æquales assumo, altitudinem verò habentes eam quam latus rectum ipsius axis exhibet; quæ in se inuicem subalternè ductæ, corpus producunt æquale semicylindro, cuius basis semicirculus est, ex quo Parabolæ illæ oriuntur, & altitudo Parabolis communis, vti in libro de planorum ductibus, septimo nempè, demonstro. Tandem partes corporis orti ex Parabolis proposito modo ductis, per Proportionalitates confero cum partibus cylindri cui corpus illud æquale est. notâ autem ratione partium corporis Parabolici, innotescit ratio partium cylindri quæ illis æquales sunt. Quare, cùm partium cylindricarum bases, quæ sunt circuli segmenta, parallelis lineis intercepta, eandem inter se proportionem habeant quam partes ipsæ cylindricæ, nota etiam fit proportio segmentorum circularium, quæ inter parallelas lineas sunt posita. Tum denique ex segmentorum illorum eâ notâ proportione, nullo negocio circuli ad rectilineum proportionem exhibeo. Eadem penè ratione Hyperbolæ quadraturam exhibeo, per Parabolas parallelas in se ductas, quæ cylindro æquantur hyperbolico.

Atque hæc est operis totius adumbratio, obscura adhuc & tenuis, sed quam operis ipsius deductio faciet manifestam; præsertim æquis rerum Geometricarum, quibus hoc opus conscribo, æstimatoribus, quibus spero vel ob materiarum nouitatem, vel ob Problematis, quod soluendum suscepi, non infelicem, vt quidem reor, accessum, non omnino displiciturum.

Verùm non iniucundum fortasse fuerit; intelligere qui casus quasi concatenati semper studiorum meorum cursum interruperint partumque hunc meum, quem à viginti quinque annis

conceperam tamdiu retardarint, quo minùs lucem hanc in quam modò prodeunt, citiùs aspicerent, iuuat enim præteritorum meminisse nonnumquam, neque sine grata recordatione eorum mentio fit, præsertim si cum amicis, beneuolis inquam Lectoribus, defæcato nunc demum, vt cum Comico loquar, animo communicentur. Anno itaque huius sæculi vigesimo quinto, cùm omnia quæ hoc opere continentur, si librum de Proportionalitatibus excipias, parata haberem, licet non ita concinnata, vt prælo subuci statim possent, sed summa tantùm capita, propositiones inquam cum demonstrationibus summatim memoriæ tantum caussâ scriptas, Romam ab Admodum R.P. Generali Nostro euocatus abij, lucubrationes meas solutionemque problematis de quadrando Circulo cum P. Grienbergero, eo quem dixi summo Mathematico collaturus: cumque per plures menses longo studio mea explicare essem aggressus, & ille ad calculos indefessò labore singula reuocaret, dimidium operis absoluere numquam potuimus, tum quòd ea quæ Proportionalitates concernunt, necdum planè perfecissem, quamquam in iis nulla esset difficultas; tum vel maximè quòd ipse graui & diuturno, sæpiusque interrupto implicitus morbo, maiorem moram requireret, quàm maximorum Principum, quorum nutus imperia sunt, preces litteræque permittebant.

In ea itaque dum Romæ incumbimus, ecce tibi binis è locis litteræ ad Admod. R. P. Generalem perferuntur, quibus Româ ad Mathesin docendum euocor; Catholici Regis Philippi vna, quibus Madritum mitti postulat; ab Augustissimo Imperatore Ferdinando altera, quibus me Pragam destinari vult. Vtrique certè Imperio obsequi cùm non posset admodum R.P. Generalis, huic me assignat, illicoque cùm res moram non ferret, eò me proficisci iubet. Pragam vix attigeram, rursum secundis litteris in Hispaniam euocor, iamq; ad iter accingebam me, cùm ecce paralysi subitò correptus morem gerere tam iusto Regis mei desiderio non potui: & quamquam vim subiti mali infregerim aliquousque, non tam feliciter tamen eluctari potui, quin integrum quinquennium me isthic morbi vis ingens detinuerit. Vix hoc malum euaseram, non ita tamen quin cum morbi reliquiis toto deinceps vitæ tempore mihi fuerit decertandum; euaseram tamen aliquousque, paulatimque à morbo respirare iam cœperam, cùm alius haud paullò tristior casus scripta mea laboresque excepit. Saxoniæ enim Dux post funestam illam cladem nostris ad Lipsiæ muros illatam, deditione Pragam tum fortè superat: victor itaque miles, & hæreticus, quod vnum satis erat ne nobis parceretur, in Collegium nostrum irrumpit, diripitque miserrimum in modum omnia: quidquid itaque breuissimo antè tempore aliquorum diligentiâ militum manus non euasit, cessit eorum libidini, aut certè flammis, & quod incommodo mihi tum non exiguo, imò commodo fuit maximo, eâ horâ reliquiæ incendio secuturo subducebantur, quâ ego ad aram sacrificaturus stabam: incommodo, quod plerosque ingenij fœtus amiserim, commodo certè quod eum saltem præ manibus haberem tunc, quem qui habet, habet omnia. Resciuit id R.P. Rodericus de Arriaga celeberrimus hoc tempore, multis etiam exinde tomis clarus Theologus: festinus itaque ad cubiculum meum aduolat, scripta quæ in mensa exposueram expolienda adhuc, vnà cum suis in currum conijcit, eaque cùm solertiâ summâ hostium manibus subduxisset, Viennam defert. cetera omnia quæ cistam integram implebant, eaque ferè erant, quæ, cùm iis vltima adhibita iam esset manus, prælo parabantur, prædæ aut flammis relicta, cùm tempori subduci non possent. Inter plurima quæ isthic deperdita, liber erat quo totam Staticam Geometricè ex Archimedæis deductam principiis comprehenderam, iustæ spissitudinis tomo. Inerant præterea Geometrica plurima quæ tomos duos hisce non absimiles magnitudine expleuissent. Atque ita labores plurium annorum, Deo ita volente, suauiterq; ad maius virtutis exercitium dirigente omnia, vnico horæ quadrante deperdidi. Perdidi illa, non tamen animos, quos exinde maiores mihi sufficit Deus. Spoliato itaque Collegio, Viennam cum ceteris remissus sum: inde ad Belgas meos, cùm Italiæ rursus destinarer, redij, non eâ tamē valetudine qua ab iis discesserā. Scripta

mea

mea quæ cladi superfuerant, cùm mecum deferre non possem, Gracio Oenipontem Tyrolis amandata sunt, secundo demum Rheno in Belgium deferenda, sed cùm impeditæ semper essent viæ, varijque bellorum casus omnem Rheni tractum quotannis exciperent, neque manifesto periculo exponenda iudicarentur, decennium totum ea expectare necesse fuit: donec tandem non sine magnis impensis, magnaque amicorum curâ, summo meo gaudio, decimum post annum, Gandauum delata sunt, eæque scriptorum meorum sunt reliquiæ, quæ mihi materiam huius operis præbuerunt. Quo nomine quantum quidem debeam, imò omnes qui hisce rebus delectabuntur, R. P. Roderico de Arriaga, qui tantum mihi beneficium inopinatò præstitit, ego scio: omnia enim ferè exciderant quæ illis chartis fueram complexus; quis enim omnium iam senex recordetur quæ à triginta & quod excedit annis, fuerit commentatus? præsertim cùm breuissimè singula & quasi per compendium digessissem. Gratias itaque ago maximas bono Patri amicissimo meo; & hoc siltem alicuius gratiæ loco rependo, extare me velle publicè aliquod debiti mei monumentum, publicamque testificationem beneficij priuatim quidem impensi sed ex quo, publico etiam Geometriæ bono, nisi mea me fallat sententia, vtilitas emanabit.

Atque hæc sunt quæ tecum, Lector beneuole, more meo, id est candidè communicanda ducebam. Interim si quid in operis decursu minùs expolitum occurrerit, id sanè festinationi nimiæ adscribas velim; cùm enim rursus morbi mei Pragæ contracti vires recrudescerent, senemque iam defectis viribus oppressuræ nonnumquam viderentur, Superiorum iussu, quorum nutus etiam, non imperia tantùm obseruo, conquisitis vndique auxiliis, hoc quale nunc vides opus effudi dicam, an concinnaui? antequam mors subita, expectata tamen semper, fœtum hunc opprimeret. Mihi sanè rebusque meis parum esse laborandum censebam ego; sed cùm in eorum manibus ego sim, qui cogere possint, malui qualecunque hoc opus publici iuris facere, quàm refragari minimo etiam eorum nutui. Vti enim nos nostri minimè sumus, ita fœtus etiam ingenij non nostri, minimè nobis arrogandi sunt, quos Religioni obnoxios fecit professio. Si quid tamen laude dignum fortasse duxeris, totum id Deo adscriptum cupio, cuius honori & gloriæ laboraui toto vitæ meæ tempore; neque sanè sine ingenti admiratione, æterni, etiam in minimis, artificij: non enim eum ordinem, symmetriam, proportionem, quam in singulis superficiebus corporibusque demonstramus, nos ipsi industriâ nostrâ aut arte effingimus, sed facta iam, & æternis legibus ita disposita, felicitate aliquâ ingenij, aut, quod mihi contigisse profiteor, eius fauore qui omnia tam concinnè in partes suas distribuit, inuenimus, & inuenta demonstramus.

Summa

Summa Priuilegij Cæsarei Societati IESV *concessi.*

CVm ex mandato sacræ Cæsareæ Maiestatis omnibus & singulis Typographis, Bibliopolis, atque alijs quibuscumque librariam negotiationem exercentibus serió, strictéque inhibeatur ne quis libros illos à Societatis nostræ Patribus hactenus editos, aut edendos imposterum intra S.R.I. Regnorumque & Dominiorum Sacræ Cæsareæ Maiestatis hereditariorum fines, simili aliouе charactere aut formâ, siue in toto, siue in parte excudere, vel recudere, vel aliò recudendos mittere aut alibi etiam impressos inuehere, vendere, seu distrahere, clam seu palam, citra supradictorum Patrum consensum ac testimonium audeat, vel præsumat. Ego Ioannes Baptista Engelgraue per Prouinciam Flandro-Belgicam, Præpositus Prouincialis concedo IOANNI & IACOBO MEVRSIIS, facultatem excudendi *Opus Geometricum Quadratura Circuli*, Auctore Patre GREGORIO A SANCTO VINCENTIO Societatis IESV, in cuius fidem litteras manu meâ subscriptas & sigillo officij mei munitas dedi Gandaui 31. Martij 1647.

Ioannes Baptista Engelgraue.

EGo *infrascriptus Societatis* IESV *in Prouincia Flandro-Belgica Prouincialis iuxta Priuilegium à Serenissimis Principibus eidem Societati nostræ concessum, quo bibliopolis omnibus prohibet, ne libros ab eiusdem Societatis hominibus compositos absque Superiorum permissione imprimant: Facultatem do* IOANNI & IACOBO MEVRSIIS *Typographis vt librum cui titulus est* Opus Geometricum Quadraturæ Circuli, Auctore P. GREGORIO A S^to. VINCENTIO *Societatis* IESV, *imprimere, & liberè distrahere possint. Datum Gand.* 31. *Martij* 1647.

Ioannes Baptista Engelgraue.

APPROBATIO.

LIbrum hunc compositum à R.P. GREGORIO A SANCTO VINCENTIO Societatis IESV tanquam nihil continentem Religioni nostræ orthodoxæ contrarium, aut moribus, sed vt vtilem scientiæ istius, quam tractat, amatoribus approbo, & prælo dignissimum censeo. Datum Antuerpiæ 25. Febr. 1647.

Christianus Voochts Archipresb. Antuerp. Lib. Censor.

SVMMA PRIVILEGII.

PHILIPPVS Dei Gratiâ Hispaniarum, Indiarum, &c. Rex Catholicus, Archidux Austriæ, Dux Burgundiæ, Brabantiæ, &c. Serenissimus Belgarum Princeps, diplomate suo sanxit, ne quis librum, cui titulus est, R. P. GREGORII A SANCTO VINCENTIO Societatis IESV *Opus Geometricum Quadratura Circuli*, citra IOANNIS & IACOBI MEVRSIORVM voluntatem, vllo modo imprimat, aut alibi terrarum impressum, in inferioris Germaniæ ditiones importet, venalémve habeat. Qui secus faxit, confiscatione librorum, & aliâ graui pœnâ mulctabitur, vti latiùs patet in litteris datis Bruxellæ XXVIII. Febr. M. DC. XLVII.

Signat Loyens.

ELEN-

ELENCHVS MATERIARVM

quæ toto hoc Opere continentur.

LIBER PRIMVS.

De linearum potentijs.

PARS PRIMA.

De variâ linearum inter se proportione.

PARS SECVNDA.

De triangulis eorumq́ue proprietatibus.

PARS TERTIA.

De rectangulorum inter se proportione.

LIBER SECVNDVS.

De progressionibus Geometricis.

PARS PRIMA

Progressiones non terminatas considerat.

Datis

PARS SECVNDA

Terminum progressionis in infinitum continuatæ assignat.

PARS TERTIA

Progressiones terminatas planis applicat, præsertim similibus.

PARS QVARTA.

Haec quae in planis demonstrata, corporibus applicat.

LIBER

LIBER TERTIVS.

De Circulis.

PARS PRIMA.

De linearum in circulis proportione.

PARS SECVNDA.

De angulorum & arcuum comparatione.

PARS TERTIA.

De mutuâ circulorum interſectione & contactu.

PARS QVARTA.

De linearum in circulo potentia.

Prolegomena ad ſectiones coni.

Proprie-

LIBER QVARTVS.

De Ellipsi.

PARS PRIMA

Sectionem è cono educit primasq́; ac essentiales eius exhibet proprietates.

PARS

PARS SECVNDA

De sectoribus & segmentis ellipseos.

PARS TERTIA

In ellipsi considerat axium & diametrorum coniugatarum æqualium ac inæqualium proprietates.

PARS QVARTA

Sectionis polos, & lineam à puncto in axe dato ad peripheriam, breuissimam designat.

PARS QVINTA

Varias exhibet ellipsis geneses.

PARS SEXTA

Circulum cum ellipsi comparat.

LIBER

LIBER QVINTVS.

De Parabola.

PARS PRIMA.

Parabola è cono educitur, passionesq́ illius fundamentales exhibentur.

PARS SECVNDA

Linearum in parabolâ tam continuam quàm discretam proportionem contemplatur.

PARS TERTIA

Sectionis focum, & mutuas parabolarum vel circulorum intersectiones Geometricè designat.

Determi-

PARS QVARTA

Proprietates parabolarum se inuicem, aut circulos contingentium, intersecantium.

PARS QVINTA.

Quadratura parabolæ.

PARS SEXTA

Segmenta primùm & parabolas inter se confert, dein figuras maximas sectioni inscribit.

PARS SEPTIMA

Varias parabolæ geneses exhibet.

PARS OCTAVA

Miram exhibet parabolarum parallelarum, cum hyperbolâ inter asymptotos constituta symbolizationem.

LIBER·

LIBER SEXTVS.

De Hyberbola.

PARS PRIMA

Hyperbolam sectionesq́ oppositas, denique & asymptotos è cono educit, primasq́ ac fundamentales hyperbolæ passiones demonstrat.

PARS SECVNDA

Sectionum oppositarum ac coniugatarum affectiones considerat.

Variæ

PARS TERTIA

Asymptotos & concauam contemplatur hyperbolam, ac linearum præsertim asymptotis æquidistantium exhibet proportionem.

PARS QVARTA.

De segmentis hyperbolicis conuexis & concauis.

*** Concauo

PARS QVINTA

Hyperbolam expendit à parabola intersectam.

PARS SEXTA.

Solutio variorum problematum, aliaq́, theoremata ad pleniorem hyperbolæ cognitionem spectantia.

PARS SEPTIMA.

Geneses variæ hyperbolæ, & ex hyperbola reliquæ sectiones eductæ.

Spiralis

Spiralis & parabolæ symbolizatio.

LIBER SEPTIMVS.

De ductu plani in planum.

PARS PRIMA

Superficies primò exhibet, & quales sint determinat, vti & omnes intersectiones ortas ex ductu rectilinei in rectilineum. Deinde corpora sic producta inter se comparat.

Idem

PARS SECVNDA

Superficies contemplatur, & communes intersectiones natas ex ductu plani circularis in rectilineum. Deinde corpora sic producta exhibet.

PARS TERTIA.

Vniuersales quasdam propositiones continet, & fundamentales quibus corpora inter se comparantur.

PARS QVARTA.

Comparantur corpora orta ex ductu rectilinei in rectilineum, cum corporibus ortis ex ductu partium circuli in se vel in alias circulares.

PARS QVINTA.

PARS SEXTA

Ampliorem continet comparationem corporum productorum ex ductu plani circularis in circulare, cum ijs quæ oriuntur ex ductu circularium partium in Ellipticas parabolicas, hyperbolicas.

Aliæ

PARS SEPTIMA.

Confert inter se corpora nata ex ductu parabolici in parabolicum.

PARS OCTAVA.

Corpora huc vsque ex vario planorum in plana ductu, reducit ad corpora determinatam habentia basim & altitudinem.

PARS

PARS NONA.

Praxis huius libri de planorum inter se ductu seu multiplicatione.

PARS DECIMA.

De Parabolis virtualibus. item aliqua materia quæ prioribus excidère.

LIBER OCTAVVS.

De Proportionalitatibus Geometricis.

PARS PRIMA

Fundamentales propositiones complectitur naturam denominatorum concernentes.

PARS SECVNDA.

De similitudine proportionum quæ inter rationes existunt.

Duæ

PARS TERTIA.

De rationum multiplicatione seu compositione.

 Datis

PARS PRIMA

Fundamentales propositiones complectitur naturam denominatorum concernentes.

PARS SECVNDA.

De similitudine proportionum quæ inter rationes existunt.

Duæ

PARS TERTIA.

De rationum multiplicatione seu compositione.

PARS QVARTA

Rationum proportiones considerat, maximè secundùm rectangulorum comparationem quæ fiunt ex terminis rationum, termini autem statuuntur lineæ.

PARS QVINTA.

Exponuntur ea quæ proportionalitatibus communia sunt cum operationibus Arithmeticis.

PARS

PARS SEXTA

Varias proportionalitatum proprietates complectitur.

LIBER NONVS.

De cylindro, cono, sphæra, sphæroide, & vtroque conoide parabolico & hyperbolico.

PARS PRIMA

Vngulas cylindricas, eiusq; partes, planis ad cylindri axem parallelis, rescißas ad cubum reducit.

PARS SECVNDA.

De inuolucro vngulari eiusq; ad cubum vel parallelepipedũ reductione.

PARS TERTIA.

Superficies cylindrica quæ vngulam cingit ad rectilineum reducitur aliaq; eius affectiones notæ redduntur.

Imò

PARS QVARTA.

Comparatio vngulæ cylindricæ cum sphæra & aliis corporibus.

PARS QVINTA

Vngulam parabolicam considerat, insuper cylindricam vngulam & sphæram confert cum parabola & cylindro parabolico.

Cylin-

PARS SEXTA.

De Sphæroide.

PARS SEPTIMA.

De conoide parabolico.

PARS OCTAVA.

De conoide hyperbolico.

Omnis

LIBER DECIMVS.

De ipsa circuli quadratura.

PARS PRIMA

Varia Lemmata complectitur quæ varijs quadraturis concinnandis inseruire poterunt.

PARS SECVNDA.

Corpori producto ex ductu mutuo parabolarum subalternè positarum nihil prorsus habenti circulare, triplici viâ cylindrum inuenit æqualem pr.46.47.48.49.50. 51. item prop.68. item prop.75. & ipsius demum circuli varias quadraturas exhibet, modosque reducendi cylindrica corpora ad rectilineas magnitudines solidas.

PARS TERTIA.

Hyperbolem quoque per cylindrum hyperbolicum ad rectilinea solida reductum ad figuras rectilineas planas reducit. Atque vnà miram quadraturæ hyperbolicæ cum circulari similitudinem prosequitur.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER PRIMVS.

DE

LINEARVM POTENTIIS.

ARGVMENTVM.

Liber hic fere Lemmaticus est; quemadmodum & alter, qui de Circulorum varijs proprietatibus tractat. Porrò quò magis materia Lectori ad manum sint, omnem in tres partes diuidere placuit.

Prima quidem maximè circa linearum proportionem versatur.

Secunda varias trianguli affectiones exhibet.

Tertia illas linearum contemplatur proprietates; quia earum potentias concernunt.

PARS PRIMA.

De varia linearum inter se proportione.

PROPOSITIO PRIMA.

Sint AB, BC, CD, DE, lineæ in continua proportione; sit autem media FG, inter AB, BC; & inter AB, CD; media GH: Denique inter AB. DE. media sit HI.



Dico AB. FG. GH. HI. lineas esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVadratum AB est ad rectangulum ABC. a vt AB. ad BC. & ABC. rectangulum ad AB. CD. rectangulum est vt BC. ad CD. id est vt AB, ad BC. a 1. Sext. Eodem modo rectangulum super AB. CD. ad AB. DE rectangulum, est vt CD ad DE; id est AB ad BC. Quadratum autem AB, ad FG. quadratum, est vt AB ad BC. Igitur quadratum AB. est ad quadratum FG, vt ABC rectangulum, ad rectangulum AB.CD. id est ad quadratum GH. Vnde eandem rationem conti-

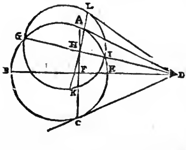
 nuant

nuant quadrata AB. FG. GH. HI. ac proinde ipsæ lineæ; quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Circulum ABC contingant rectæ DA, DC. & ductâ AC, ponatur altera DG occurrens AC in H. & circulo in G & I.

Dico rectam DG. sectam esse in I & H. vt sit DG ad GH. quemadmodum est DI ad IH.



Demonstratio.

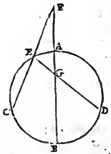
SVper IG. diametro, describatur circulus GLK & per H punctum erigatur normaliter HL, vel HK, ad diametrum GI; ponaturque DL, erit itaque GHI rectangulo, a hoc est AHC, æquale rectangulum LHK, siue LH quadratum; pertinent igitur ad eundem b circulum puncta LAKC. iuncta igitur DL est æqualis tangenti DA, adeoque tangens; nam LD quadratum est æquale quadrato LH; id est rectangulo GHI, id est c AHC vnà cum quadrato HD: id est quadratis HF, FD. vnde LD. quadrato rectangulum d IDG æquale; ac proinde cum IG. diameter sit circuli GLI. erit per Pappum e vt DG ad GH. ita DI ad IH. quod fuit demonstrandum.

a 35. Tertij.
b Ibid.
c 34. Tertij.
d 36. Sexti.
e Lib. 7. pr. 155.

Scholion.

QVoniam multoties in hoc opere recurret diuisio lineæ, prout præsenti propositione exposita est; operæpretium existimaui, aliquod illi peculiare nomen adiungere, quo illius cognitio magis innotescat; placuit autem nomenclaturam illi appropriare, sectionis lineæ, secundùm mediam & extremam rationem proportionalem; quoniam similitudinem non exiguam habet, cum ea diuisione, quæ in elementis vocatur, ratio media & extrema: differt tamen ab ea, quòd illa solùm sit æqualitatis, hæc verò de qua agimus, omnem omnino proportionem admittat; solam æqualitatis excludens.

PROPOSITIO III.



EX termino diametri circuli ABC: sumantur arcus hinc inde æquales, BC. BD. & ducta qualibet CF, quæ occurrat perimetro in E, ponatur DE intersecans AB in G.

Dico rectam FB. sectam esse in A & G. media & extrema ratione proportionali.

Demonstratio.

DEmonstratum inuenies libro nostro de Circulis, propos. 101. rectam BF ad FA. eandem habere rationem, quam BG. GA. hoc est totam FB. ad alterum extremorum FA, eandem rationem obtinere, quam BG alterum extremum, habet ad medium AG; ergo secta est recta FB. in A & G. media & extrema ratione proportionali. Secundam explicationem præcedenti Scholio factam.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SEcta sit AB. in C & D. media & extrema ratione proportionali, & composita ex altera extremarum; & media, Verbi gratia CB, bifariam secetur in E.

F ——— A ——— C — D — E ——— B

Dico CE quadratum, rectangulo DEA, æquale exsurgere.

Demonstratio.

PRoducatur CA. in F, vt CA, AF æquales sint inter se: quoniam est vt BA ad AC; ita BD ad DC; erit componendo, BA cum AC. hoc est BF. ad FA. id est AC, vt BC ad DC. sed totius BF, dimidia est AE, ipsius quoque BC, dimidia est EC, per constructionem.

Igitur AE, ad AC, est vt EC ad CD. & conuertendo vt AE. ad CE ita est, EC ad DE. ergo AE. CE. DE. sunt in continuata ratione. Vnde & quadrato [a] CE. rectangulum AED. æquale. Quod fuit demonstrandum. a 16. Sexti.

PROPOSITIO V.

POnantur tres in continua ratione ED, EC, EA. & EB, fiat æqualis EC, & ipsi CA. æqualis AF. dico AB. in C. & D. diuisam esse media & extrema ratione proportionali.

Demonstratio.

QVoniam est ratio continuata, trium ED. EC. EA. erit quoque diuidendo, DE ad DC. vt EC. ad CA. & componendo, vt CE ad DC. sic AE ad AC. quare & BC ad DC. ita BF. ad AC. hoc est ad AF. & diuidendo BD ad DC. vt BA ad AF. hoc est, ad AC. Quod fuit demonstrandum.

F ——— A ——— C — D — E ——— B

Corollarium.

DVo hinc Consequuntur; primum, rectangulum BDC. rectangulo ADE. esse æquale, alterum BAC. rectangulo æquale existere, EAD rectangulum.

Primi demonstratio inde paret: quoniam BC. in E. secta est in æqualia, & non æqualia in D. rectangulum sub inæqualibus segmentis totius BDC. vnà cum [a] quadrato quod fit ab intermedia DE. æquale est ei, quod à dimidia CE. describitur quadrato. Rursus cùm AE secta sit in D. vtcunque erit rectangulum AED. [b] æquale rectangulo ADE, & quadrato DE. sed iam ostensum est, AED rectangulum quadrato CE æquale, Igitur BDC rectangulum, vnà cum DE quadrato, æquale est ADE rectangulo, vnà cum DE quadrato. Sublato itaque communi DE quadrato, residuum erit BDC rectangulum, rectangulo ADE æquale.
a 5. Secundi.
b 3. Secundi.

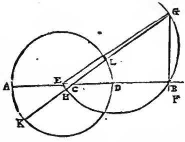
Alterum quoque sic manifestum erit. Quoniam BC in E, secta est bifariam, ipsique additur pars CA, erit rectangulum BAC, [c] vnà cum quadrato CE, æquale quadrato AE; sed cùm secetur AE in D. vtcunque, erit quadratum AE, æquale duobus [d] rectangulis AED, & EAD. Igitur rectangulum BAC; vnà cum quadrato CE, æquale est duobus rectangulis AED, EAD. sed horum alterum AED, ostensum est quadrato CE. esse [e] æquale, his itaque detractis, residuum manebit BAC rectangulum, rectangulo EAD æquale.
c 6. Secundi.
d 4. Secundi.
e 4 Huius.

PROPOSITIO VI.

Lineâ AB. ſectâ in C. & D. ſecundùm mediam & extremam rationem proportionalem; fiat circulus ſuper A D. diametro, cuius centum E, erigatur deinde B F G. normalis ad A B. ex puncto B.

Dico rectas omnes per C. ductas quæ circulo in K. & L. occurrunt & F B. normali in aliquo puncto G. diuiſas eſſe ſecundùm mediam & extremam rationem proportionalem.

Demonſtratio.

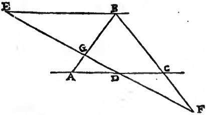


a 3. Tertij.
b 31. Tertij.
c 34. Tertij.

Ex E. centro Circuli A L D, ducatur recta E H, normalis ad rectam K G; erit itaque K L. bifariam[a] diuiſa in H; & quia rectus eſt vterque angulorum ad H, & B, Circulus diametro G F deſcriptus, percurret puncta H,[b] & B: Rectangulum itaque B C E,[c] æquale eſt G C H rectangulo; eſt quoque rectangulum B C E, rectangulo A C D æquale, per Corollarium præcedentis propoſitionis; huic autem æquale eſt[d] rectangulum K C L, Igitur rectangulo G C H, rectangulũ K C L, æquale erit; adde ergo vtriq; rectangulo quod ex C H. fit quadratũ, erit denuo rectangulum K C L, vnà cum quadrato C H, æquale rectangulo G C H, vnà cum quadrato C H; ſed rectangulo K C L, vna cum quadrato C H oſtenſum eſt æquari rectangulum G H C, ſiue G C H vnà cum quadrato C H id eſt quadratum[e] H L. Itaque rectangulum G H C, æquale eſt H L quadrato: vtque C H ad H L, ita eadem H L ad H G. quo fit, vt cùm ſit H L æqualis H K. Ipſa G K.[f] in C. & L, ſecta ſit ſecundùm rationem extremam & mediam proportionalem, per præcedentem propoſitionem. Quod fuit demonſtrandum.

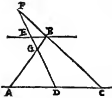
d Ibid.
e 5. Secundi.
f 5. Huius.

PROPOSITIO VII.



Esto A B C trianguli baſis A C diuiſa biſariam in D; actâque per B lineâ B E, parallelâ baſi A C, agatur per D linea quæcunque E F, occurrẽs trianguli A B C lateribus, In G. F.

Dico E F lineam in D & G punctis extrema & media ratione proportionali eſſe diuiſam: id eſt eſſe vt E F ad F D, ſic E G ad G D.



Demonſtratio.

Quoniam E B, & A C lineæ æquidiſtant, erit vt E B ad D C, id eſt ad A D, ſic E F ad D F; ſed eſt vt E B ad A D, ſic E G ad G D, igitur vt E F ad F D, ſic E G ad G D. Quod erat demonſtrandum.

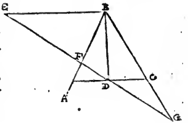
In

In 2. figura est FD linea in E & G diuisa media & extrema ratione proportionali.

PROPOSITIO VIII.

SIt angulus A B C diuisus bifariam rectâ B D, ad quam erecta ex B normali B E, agatur linea quæcunque E G per punctum D.

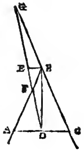
Dico E G lineam in F & D, media & extrema ratione proportionali esse diuisam.



Demonstratio.

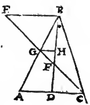
POnatur per D, linea A C, parallela rectæ B E: occurrens anguli A B C lateribus, in A & C. Quoniam igitur A C linea æquidistat, rectæ E B quæ normalis ponitur ad lineam B D, erunt anguli A D B, C D B recti; sunt autem per constructionem, & anguli A B D. C B D inter se æquales, & B D linea communis, igitur triangulum A B D æquale est triangulo C B D, & A D basis, æqualis basi D C: igitur per præcedentem vt E G ad G D, sic E F ad F D. Quod erat demonstrandum.

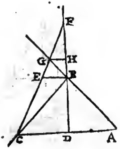
In 2 figura linea G D. diuisa est, secundum mediam & extremam rationem proportionalem.



PROPOSITIO IX.

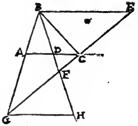
ESto A B C trianguli basis A C, in D bifariam diuisa, iunctisque B D, agatur per B linea B E, parallela basi A C, dein ex C, recta ducatur C E, occurrens vtcunque lineæ B E in E, B D rectæ in F, & lateri A B in G. Dico in prima figura: lineam E C; in secunda lineam F C; in tertia rectam E G, extrema & media ratione proportionali esse diuisam.





Demonstratio.

DVcatur G H linea, parallela basi A C: Quoniam A C, E B, G H, lineæ æquidistant, erit A B ad B G vt C E ad G E: sed est vt A B ad G B, sic A D ad G H,



 hoc

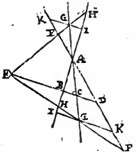
hoc eſt DC ad GH, hoc eſt CF ad FG, igitur vt CE ad EG, ſic CF ad FG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

DEmittantur ex A puncto, lineæ tres AB, AC, AD, quæ angulos conſtituant BAC, CAD rectis minores. Ponatur autem quæuis ED occurrens ductis ex A. lineis, & diuiſa in B. & C. extrema & media ratione proportionali.

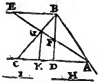
Dico omnes lineas ex E ductas, occurrentes rectis AB, AC, AD, ab iiſdem media & extrema ratione proportionali diuidi.

Demonſtratio.



DVcatur ex E, quæuis linea EF, occurrens lineæ AD in F, rectæ AC in G, & AB lineæ in H. dein per G, agatur linea IK, parallela rectæ BD. Quoniam BD, IK lineæ æquidiſtant; erit vt DC ad CB, ſic KG ad GI, ſed per hypotheſim eſt, DC ad CB, vt DE ad EB, igitur erit vt DE ad EB, ſic KG ad GI, & permutando vt DE ad KG, ſic EB ad IG. eſt autem vt DE ad KG, ſic EF ad FG, & vt EB ad IG, ſic EH ad HG, igitur vt EF ad FG, ſic EH ad HG, & permutando vt EF ad EH, ſic FG ad GH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

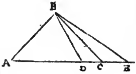


ESto ABC trianguli baſis AC; cui per B, verticem agatur æquidiſtans BE; oportet ex A rectam ducere AE, vt AE ad EG. datam habeat rationem maioris inæqualitatis H ad I.

Conſtructio & demonſtratio.

DIuiſa AC bifariam in D, fiat, vt H ad I ſic AD ad DK, iunctiſque punctis BD, erigatur ex K linea KG, parallela ipſi BD, occurrens BC lateri in G, tum ex A per G, agatur linea AE, ſecans BD lineam in F, & rectam EB in E; dico factum eſſe quod petitur. Quoniam FD GK lineæ ſunt parallelæ erit vt AD ad DK, ſic AF ad FG, ſed AD eſt ad DK vt H ad I per conſtructionem igitur, vt H ad I ſic
a 9. Huius. AF ad FG eſt autem vt a AF ad FG ſic AE ad EG, igitur vt H ad I ſic AE ad EG. Duximus igitur ex A lineam, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XII.



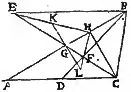
SIt AC linea vtcumque diuiſa in D, oportet illi rectam quandam CE adijcere, vt AE tota, in D & C, diuiſa ſit media & extrema ratione proportionali.

Con-

Conſtructio & demonſtratio.

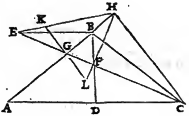
SVper AC vt baſi conſtituatur triangulum rectangulum ABC, habens ad B rectum angulum,& ex B demittatur linea BE conſtituens angulum EBC æqualem angulo DBC; occurrens AC lineæ in E: dico factum eſſe quod petitur. Quoniam anguli DBC. CBE per conſtructionem ſunt inter ſe æquales, & AB linea normalis ad rectam BC, ª erit AD ad DC vt AE ad EC. datæ igitur lineæ AC, adiecimus, &c. Quod erat poſtulatum. ª Per 8. huius.

PROPOSITIO XIII.



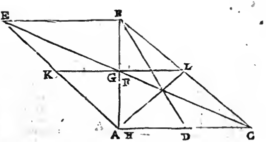
ESto ABC trianguli baſis AC, in D bifariam diuiſa, iunctiſque BD, ponatur per B linea BE parallela baſi AC: tum in EB linea, punctum ſumatur quoduis E, ex quo linea demittatur EC, occurrens AB lineæ in G, & rectæ BD in F; dein ex C recta erigatur CH, ſecans orthonaliter lineam AB in H. iunganturque puncta HF EH.

Dico angulos EHG, FHG eſſe inter ſe æquales.

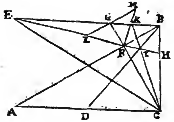


Demonſtratio.

DVcatur per G linea KL, parallela rectæ HC; occurrens HE lineæ in K,& FH rectæ in L. Quoniam igitur HC. KG, lineæ ſunt parallelæ, erit vt HC ad KG, ſic CE ad EG: ſed vt CE ad EG, ſic CF ª eſt ad FG, igitur vt HC ad KG, ſic CF ad FG: eſt autem vt CF ad FG, ſic HC ad GL, igitur vt HC ad KG, ſic HC eſt ad GL; quare KG. GL. lineæ ſunt inter ſe æquales. Rurſum cũ HC lineæ, æquidiſtet linea KG, ſit autem & HC normalis ex hypotheſi ad rectam AB, erit & KG linea perpendicularis ad lineam AB, adeoque anguli HGK, HGL recti; igitur cum HG. GL lineæ duabus lineis HG GK ſunt æquales, & anguli illis contenti recti, erunt HGK. HGL triangula inter ſe æqualia & ſimilia, & anguli EHG, FHG æqualibus lineis ſubtenſi, æquales. Quod erat demonſtrandum. ª 9. huius.



PROPOSITIO XIV.



ESto ABC trianguli basis AC, bifariam diuisa in D, iunctisq; BD, agatur per B linea BE, parallela rectæ AC, in qua assumpto puncto quouis E, ducatur recta EC, & ex C erigatur linea CF orthogona rectæ AB, occurrens EB lineæ in G; dein ponatur EF intersecans BD in I, & BC in H. ducaturq; CI, occurrens lineæ EB in K.

Dico lineam EB in G & K, diuisam extrema & media ratione proportionali.

Demonstratio.

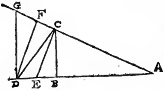
AGatur per G linea LM, parallela rectæ AB: occurrens FK in M. Quoniam linea GC, per constructionem normalis est ad rectam AB, erunt anguli GFA, GFB recti; est autem angulus KFB æqualis [a] angulo BFI, id est angulo AFL; igitur reliquus angulus GFL æqualis est reliquo GFK; rursum cùm LM linea æquidistet lineæ AB normali ad rectam GC, erunt anguli FGL, FGM recti; igitur eumtam anguli FGM, FGL, quàm GFM, GFL sint inter se æquales, & FG linea communis, erunt FGM, FGL triangula, adeoque & latera LG, GM inter se æqualia. Quare vt FB ad LG, sic FB ad GM: sed est vt FB ad LG, sic BE ad EG, & vt FB ad GM, sic BK ad KG; igitur vt BE ad EG, sic BK ad KG. Quod erat demonstrandum.

[a] Per 13. huius.

PROPOSITIO XV.

COnstituant AB, BC rectum angulum, & AB maius sit latere BC. oportet AB latus producere in D, vt iunctâ DC. fiant proportionales DC. AD. & CB. AB.

Constructio & demonstratio.

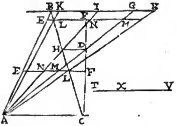


DVctâ CA, demittatur ex C linea CE, normalis ipsi AC, & alia quędã CD, quę angulum DCB constituat duplum anguli CAB. dico factum esse quod petitur. Erigantur ex D lineæ DF, DG: & DF quidem æquidistet ipsi EC; DG verò, rectæ CB. Quoniam angulus ACE per constructionem rectus est, & CB linea normalis ipsi AE, erunt ABC EBC triangula similia, & angulus ECB æqualis angulo CAB: quare & angulus DCB, rectâ CE bifariam est diuisus. Rursum cùm DG linea, per constructionem æquidistet rectæ BC; & FD linea, ipsi EC; erit angulus GDC æqualis angulo DCB, & angulus FDC, æqualis angulo ECD; adeoque GDC angulus, rectâ FD bifariam diuisus; sunt autem & anguli DFG, DFC recti (cùm FD linea æquidistet ipsi EC, normali ad AC) & FD linea communis, igitur triangulum DFC, æquale triangulo DFG, & DC latus, lateri GD æquale.

æquale. Quare CD ad DA vt GD ad DA; sed est GD ad DA, vt CB ad BA, igitur vt CB ad BA sic CD ad DA. Quoad igitur AB lineam produximus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XVI.

Sint ABC ADC triangula, inæqualis altitudinis, super eadem basi AC constituta; oportet ducere lineam EF, parallelam basi AC, vt EL ad MF datam habeat rationem TV ad XV.



Constructio, & demonstratio.

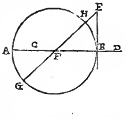
Constituantur per B & D lineæ BG, DH parallelæ basi AC; & DH quidem oecurrat triangulo ABC in H; dein AD producta, donec BG lineæ oecurrat in G, agatur per H, linea AHI, oecurrens BG lineæ in I: diuidaturque BI in K, vt BI ad IK datam habeat rationem TV ad VX; & ex K demittatur linea KA, occurrens BC lineæ in L, tum per L ducatur linea EF parallela basi AC, oecurrens ABC triangulo in E & L, rectæ CD productæ in F, & AD lineæ in M.

Dico EL ad MF datam habere rationem in TV ad VX. EF recta oecurrat Lineæ AI in N; Quoniam HAD, HCD triangula super eadem basi HD & inter easdem parallelas constituta sunt, erunt LF, MN lineæ inter se æquales: demptâ igitur communi NF, vel additâ ML, erunt LN, FM, lineæ æquales; igitur vt EL ad LN sic EL est ad MF, sed EL est ad LN, id est BK ad KI vt TV ad VX; igitur vt TV ad VX, sic EL est ad MF; duximus igitur lineam EF, &c. Quod erat præstandum.

Idem patet euenire si dicta duo triangula, æquales habeant bases in directũ positas.

PROPOSITIO XVII.

Sit AB linea diuisa vtcunque in C, oportet illi rectam addere BD, vt tota AD sit ad AB, vt AC est ad BD.



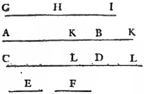
Constructio, & demonstratio.

Descripto super AB vt diametro, circulo AHB, erigatur ex B tangens EB, quæ sit media inter AB & AC; dein ex E per F centrum circuli AHB recta ducatur EG occurrens circulo in H, addaturque lineæ AB quædam BD, æqualis ipsi EH. Dico factum esse quod petitur. Quoniam HE, BD lineæ sunt æquales, erunt HEG BDA rectangula inter se æqualia; sed HEG rectangulum est æquale quadrato EB, id est ex constructione rectangulo CAB, igitur CAB, BDA rectangula sunt inter se æqualia; quare AD est ad AB vt AC ad BD. datæ igitur lineæ AB quandam adiecimus vt, &c. Quod erat postulatum.

PROPOSITIO XVIII.

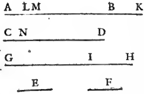
Datis duabus rectis AB, CD, rectas addere, vel detrahere, in data ratione E ad F; vt compositæ vel reliquæ datam habeant rationem GH ad HI.

Constructio & demonstratio.



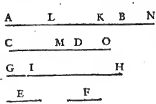
1. Datæ rectæ AB CB sint inter se æquales, & tam ratio E ad F, quàm GH ad HI, sit æqualitatis; addantur autē, vel detrahantur in ratione E ad F, lineæ B K, D L, patet veritas propositionis.

2. Si fuerit AB maior quàm CD: & ratio GH ad HI, maior quoque ratione AB ad CD, ratio autem E & F æqualitatis; Dico æquales addi non posse vt compositæ sint in ratione data GH ad HI. Cùm enim AB ponatur maior quàm CD, fiat LB æqualis ipsi CD; addaturque rectæ AB, quæuis BK; & si fieri possit, sit AK ad LK vt GH ad HI. erit igitur ratio AK ad LK maior ratione AB ad LB, id est ad CD: & quia ratio GH ad HI maior ponitur ratione AB ad LB, erit diuidendo a quoque ratio GI ad IH maior ratione AL ad LB: sed est vt GH ad HI sic AK ad LK ex hypothesi, adeoque vt GI b ad IH, sic AL ad LK, igitur & ratio AL ad LK maior est ratione AL ad LB. Quod fieri non potest: c cùm LB minor sit ipsa LK. Quare lineæ æquales addi non poterunt, vt, &c. Demi verò



[a 19. Quinti.] [b 17. Quinti.] [c 8. Quinti.]

poterunt æquales, vt reliquæ sint in ratione GH ad HI: facta enim LB æquali ipsi CD, fiat vt GI ad IH, sic AL ad LM, cadet M inter L & B; (cùm AL ad LB ostēsa sit minorem habere rationem, quàm GI ad IH) dein rectæ MB, fiat æqualis ND: Quoniam igitur per constructionem est vt GI ad IH, sic AL ad LM, erit componendo, AM ad LM, id est ad CN per constructionem vt GH ad HI. Quod erat demonstrandum.



3. Si AB linea rursum fuerit maior rectâ CD, & ratio GH ad HI minor ratione AB ad CD, ratio autem E ad F æqualitatis, æquales addi poterunt vt compositæ rationem habeant GH ad HI: fiat enim LB linea, æqualis rectæ CD; quoniam per hypothesim, ratio AB ad LB, id est CD per construct. maior est ratione GH ad HI, erit a diuidendo, ratio AL ad LB, maior ratione GI ad IH; facto igitur vt GI, ad IH, sic AL ad LN, patet LN maiorem esse linea LB; nam ratio GH ad HI minor ponitur ratione AB ad LB, id est

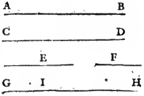
[a 19. Quinti.] [b Ibid.]

CD, adeoque & ratio GI b ad IH, id est AL ad LN minor est ratione AL ad LB: tum CD lineæ addatur quædam DO æqualis ipsi BN: Quoniam igitur est AL ad LN, vt GI ad HI, erit componendo, AN ad LN, id est CO, vt GH ad HI: Quod erat primum.

Iisdem positis, æquales demi non poterunt, vt reliquę datam habeant rationem GH ad HI: auferantur enim æquales KB, MD; & si fieri possit, sit vt GH ad HI sic AK ad LK, id est ad CM. cùm igitur per hypothesim, ratio GH ad HI minor sit ratione AB ad LB, id est ad CD, sit autem vt GH ad HI, sic AK ad LK, id est ad CM, [a 19. Quinti.] erit ratio AK ad LK, minor quoque ratione AB ad LB, & diuidendo, a ratio AL ad [b 8. Quinti.] LK, minor ratione AL ad LB. Quod fieri non b potest cùm LB linea, maior sit lineâ LK. quare hoc casu demi æquales lineæ non poterunt vt reliquæ, &c.

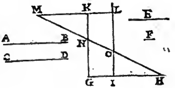
4. Si

4. Si fuerint A B, C B lineę æquales, & ratio E ad F inæqualitatis, & eadem cum ratione G H ad H I;



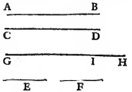
Dico addi non posse lineas in ratione E ad F, vt compositę datam habeant rationem GH ad H I. Rationi enim G H ad H I non potest addi ratio æqualitatis, quin producatur ratio minor illa, quam habet G H ad H I. Ergo nec rationi ęqualitatis potest addi ratio G H ad H I, quin producatur ratio minor illâ, quam habet G H ad H I. cùm eædem sint quę resultant.

Iisdem positis; demi rectę poterunt secundùm rationem E ad F, vt residuę obtineant rationem G H ad H I reciprocè: id est, vt vtriusque rationis antecedentes non sint in eadem linea: erigantur enim ex G & I parallelę GK, IL, ęquales ipsis A B, CD; & ex L per K agatur linea L K M ęqualis rectæ G H, ducaturque linea M H occurrens GK, IL rectis in N & O. Quoniam igitur N K O L lineę sibi mutuò



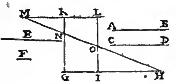
æquidistant, erit O L ad N K ablata ad ablatam vt L M ad M K, id est vt G H ad H I, id est vt E ad F per hypothesim; & vt G H ad I H, sic N G est ad O I, residua ad residuam: igitur lineas abstulimus secundùm rationem E ad F vt reliquę datam obtineant rationem reciprocè G H ad H I.

5. A B, C D lineę sint rursùm inter se æquales, & ratio E ad F minor ratione G H ad H I:



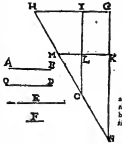
Dico addi non posse lineas secundùm rationem E ad F, vt compositæ rationem obtineant G H ad H I. patet: cùm ratio G H ad H I ponatur minor ratione E ad F; ratio verò E ad F aucta ratione æqualitatis, fiat minor ratione E ad F.

Iisdem positis: auferri poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt reliquæ rationem habeant G H ad H I, reciprocè: erigantur enim ex G & I, parallelę GK, IL, æquales ipsis A B, C D: dein ex L per K, agatur linea L K M: factaque L M ad K M vt E ad F; ducatur recta M H occurrens GK, I L lineis in N & O: erit igitur L O ad N K, ablata ad ablatam, vt L M ad M K, id est vt E ad F; & N G ad O I, reliqua ad reliquam, vt G H ad I H.



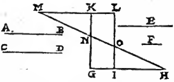
6. Sint iterum AB, CD lineæ æquales, & ratio E ad F, maior ratione G H ad H I;

Dico addi posse lineas, in ratione E ad F, vt compositæ habeant rationem G H ad H I. Demittantur enim ex G & I, parallelæ G K, I L, datis AB, CD lineis æquales; & ex K per L agatur parallela GH recta KM, vt K M sit ad L M, sicut E ad F; tum ex H per M recta agatur H N; occurret illa lineis IL, GK in O & N: Cùm enim ratio E ad F, id est K M ad L M, maior ponatur ratione G H ad H I, erit [a] diuidendo, ratio K L ad L M, maior ratione G I ad I H; adeoque L M recta minor [b] ipsâ H I. Quare & H M producta secabit lineas I L, G K in O & N: vnde N K est ad L O addita ad additam, vt K M ad L M, id est E ad F, & G N ad I O, tota ad totam, vt G H ad H I. Quod erat primum.

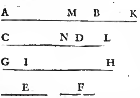


a 19. Quinti.
b 10. Quinti.

 Iisdem



Iisdem positis, poterunt auferri lineæ, in ratione E ad F, vt residuæ datam habeant rationem G H ad H I reciprocè. Erigantur enim ex G & I parallelæ G K, I L, æquales rectis A B, C D; & ex L per K ducatur linea L K M, vt L M sit ad M K, quemadmodum est E ad F; ducaturque recta M H, occurrens G K, I L lineis in N & O. patet L O ad N K ablatam ad ablatam esse, vt L M ad M K; id est E ad F; & N G ad O I, reliquam ad reliquam, vt G H ad H I. Quod erat demonstrandum.

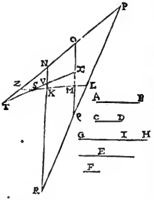


7. Sit A B maior rectâ C D, habeatque E ad F eandem rationem, quam A B ad C D, quæ & eadem sit cum ratione G H ad H I. Addi poterunt lineæ in ratione E ad F, vt compositæ, rationem habeant G H ad H I. addantur enim B K, D L lineæ, secundùm rationem E ad F: Quoniam igitur per hypothesin, A B est ad C D, vt E ad F, id est per constructionem vt B K ad D L, erit [a] A K ad C L, vt A B ad C D, id est G H ad H I.

a 19. Quinti.

Iisdem positis: demi poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt reliquæ rationem habeant G H ad H I: demantur enim B M, D N; Quoniam igitur est vt A B ad C D, sic E ad F, id est per constructionem B M ad N D, erit A M [b] ad C N, reliqua ad reliquam, vt A B ad C D, id est vt G H ad H I. Quod erat demonstrandum.

b Ibid.



8. Sit ratio A B ad C D inæqualitatis; & maior quidem, ratione G H ad H I; sit autem ratio E ad F, maior ratione A B ad C D.

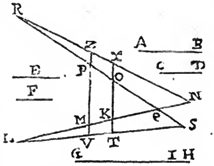
Dico addi posse lineas in ratione E ad F, vt compositæ habeant rationem G H ad H I. Facto enim K L ad M L vt E ad F, erigantur ex K & M parallelæ, K N, M O, æquales ipsis A B, C D; iunctisque N, O, fiat vt G H ad H I, sic N P ad O P; & ex P per L linea agatur P R quæ (cùm ratio N P ad O P, id est G H ad H I, minor sit ratione K L ad M L, id est E ad F, adeoque P L nõ æquidistet ipsi O M) conueniet cum O M, N K lineis, in Q & R. Vnde patet M Q ad K R additam ad additam esse, vt K L ad L M, id est per constructionem vt E ad F; & O Q ad N R, totam ad totam, esse vt N P ad O P, id est G H ad H I. Iisdem positis:

Dicó demi posse lineas in ratione E ad F, vt reliquæ obtineant rationem G H ad H I. Producatur enim O N, donec cùm M K linea, conueniat in Z: factoque O T ad N T, vt G H ad H I, & sumptâ K S æquali ipsi M L, erit N T maior ipsa N Z, & K S minor rectâ K Z, vt ostendam; quare si ex T per S agatur linea occurrens N K O M lineis, in V & X, factum erit quod petitur. Quoniam enim ratio O Z ad N Z, id est O M ad N K, id est per constructionem A B ad C D, maior ponitur ratione G H ad H I, id est O T ad N T, erit diuidendo, ratio O N ad N Z, [a] maior ratione O N ad N T: vnde N Z minor est lineâ N T. eodem modo cùm ratio E ad F, id est M S ad K S, ex hypothesi sit maior, ratione A B ad B C, id est O M ad N K, id est M Z ad

a 19. Quinti.

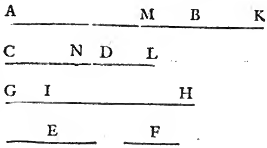
ad KZ, erit quoque diuidendo, ratio MK ad KS, maior ratione MK ad KZ, quare & KS linea b minor lineâ KZ: & recta TS, secabit lineas OM, NK. Vnde patet XM esse ad VK, ablatam ad ablatam, vt MS ad KS, id est vt E ad F; & OX esse ad NV, residuum ad residuum, vt OT ad NT, id est vt GH ad HI. b 10 quinti

9. Si fuerint AB, CD lineæ inæquales, & ratio E ad F eadem cum ratione GH ad HI, quæ minor sit ratione AB ad CD;



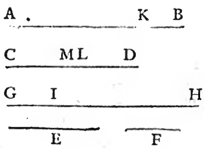
Dico addi posse lineas in ratione E ad F, vt compositæ rationem habeant GH ad HI, reciprocè. Fiat enim vt E ad F sic KL ad ML, & MN ad KN; erectisque ex M & K, parallelis KO, MP, æqualibus, ipsis AB, CD; iungantur OP, fiatque vt GH ad HI, sic OR ad PR, & PS ad OS, & PO producta occurrat MN lineæ in Q, erit PS maior quàm PQ, & MQ minor quã MN, vt ostendã; tũ recta ducatur SL; quæ secet MP OK lineas in V & T; Quoniam igitur MQ est ad KQ, vt PM ad OK, id est per constructionem vt AB ad CD, & MN ad KN, vt E ad F; sit autem ex hypothesi ratio AB ad BC, maior ratione E ad F, erit ratio MQ ad KQ, maior ratione MN ad KN, & diuidendo, c ratio MK ad KQ, maior ratione MK ad KN, quare MQ linea minor est lineâ MN. eodẽ modo ostẽditur PQ recta minor rectâ PS. Vnde KT est ad MV addita ad additã vt KL ad ML, id est E ad F, & PV ad OT tota ad totam, vt PS ad OS, id est GH ad HI. Similiter additio fiet reciproca, si recta ducatur NR occurrens OK, PM lineis, in X & Z: erit enim XO ad ZB, addita ad additam, vt OR ad PR, id est per constructionem vt GH ad HI, id est ex hypothesi vt E ad F; & ZM ad XK, tota ad totam, reciprocè, vt MN ad KN, id est per constructionem vt E ad F, id est ex hypothesi vt GH ad HI. c 19. Quinti.

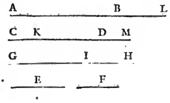
Iisdem positis: Dico addi non posse lineas in ratione E ad F, vt composita sit ad compositam, in ratione GH ad HI ordinatè; id est vt vtriusque rationis antecedentes sint in eadem linea: addantur enim secundùm rationem E ad F, lineæ BK, DL; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI: erit igitur vt AK ad CL sic BK ad DL, (quia ex hypothesi ratio E ad F, eadem est cum ratione GH ad HI) adeoque & AB ad CD, vt AK ad CL, id est vt GH ad HI; quod est contra Suppositum: nam ratio AB ad CD maior ponitur, ratione GH ad HI: quare ordinata additio non continget.



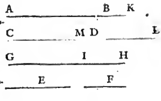
Sed neque hoc casu detractio ordinata, aut reciproca continget. Detrahantur enim ordinatim lineæ BM, DN, in ratione E ad F; & si fieri possit, sit AM ad CN, vt GH ad HI. Quoniam igitur AB ad CD, maiorem habet rationem, quàm BM ad DN, id est E ad F, erit AM reliqua a ad reliquam CN, in maiori ratione quàm AB ad CD; adeoque multò maiore quàm E ad F, id est GH ad HI; quod est contra hypothesim, cùm ponatur eadem cum ratione GH ad HI: quare ordinata detractio nulla fiet. a 33. Quinti.

De reciproca detractione sic constabit: fiat vt E ad F sic LD ad KB; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI. Cùm igitur ratio AB ad CD, ex hypothesi maior sit ratione AK ad CL, id est GH ad HI, fiat AK ad CM, vt AB ad CD; eritq; CM linea, b minor ipsâ CL: quare cùm sit vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit quoque c KB ad MD, residua ad residuam vt AB ad CD; adeoque KB maior, quàm MD, & multo maior quàm LD. Quod est contra hypothesim; non igitur detractio reciproca continget. b 10. quinti. c 19 Quinti.



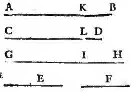


a Ibid.

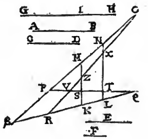


b 10. Quinti.

c 19. Quinti.



d 33. quinti.



10. Sint AB CB lineæ inæquales, & ratio E ad F, eadem cum ratione GH ad HI, quæ maior sit ratione AB ad CD.

Dico additionem, neque ordinaram, neque reciprocam fieri posse. Addantur enim ordinatim in ratione E ad F, lineæ BL, DM. & si fieri possit, sit AL ad CM, vt GH ad HI. Quoniam est BL ad DM, vt AL ad CM, igitur erit quoque, ratio AB ad CD, eadem cum BL ad DM, hoc est E ad F, vel GH ad HI. quod est contra suppositum; ponitur enim ratio AB ad CD minor ratione E ad F. sed neque reciproca additio continget: fiat enim vt E ad F, sic DL ad BK, addita ad additam, & si fieri possit, sit AK ad CL vt GH ad HI. Fiatq; vt GH ad HI, sic AB ad CM [b] erit CM minor quàm CD, quia ratio AB ad CD minor est ratione GH ad HI, id est AB ad CM. igitur cùm sit vt AK ad CL, id est GH ad HI, sic AB ad CM, erit [c] BK ad ML, residuum ad residuum vt AB ad CM; adeoq; BK maior ipsa ML, & multo maior quàm LD. Quod est contra hypothesin: quare nec additio reciproca continget.

Iisdem positis, neque ordinata detractio continget: detrahantur enim in ratione E ad F, lineæ KB LD, & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI; Quoniam igitur ratio AB ad CD, ex hypothesi minor est ratione E ad F, id est KB ad LB, ablatæ ad ablatam, erit [d] ratio AK ad CL, reliquæ ad reliquam, minor ratione AB ad CD. adeoque multo minor ratione KB ad LD, id est GH ad HI quod est cōtra suppositum: quare detractio ordinata non continget.

Continget verò detractio reciproca hoc modo. Erigantur duæ parallelæ KM, LN, æquales ipsis AB CD; iunctisque punctis MN, KL fiat vt E ad F, sic MO ad NO, & NP ad MP, item vt GH ad HI, sic KQ ad LQ, & LR ad KR: cadent R & P intra concursum linearum OP, QR, vt ostendam: quare rectæ ducantur RO, PQ; & PQ quidem secet lineas KM, NL in S & T. RO verò lineam PQ in V, & rectas MK, LN in Z & X conueniant OP, RQ lineæ in β. Quoniam ratio AB ad CD, id est per constructionem MK ad NL, id est Nβ ad Mβ, minor est ratione E ad F, id est per constructionem PN ad MP, erit diuidendo, [e] quoque ratio NM ad Mβ, minor ratione NM ad MP; adeoque MP linea [f] minor quam Mβ: eodem modo ostenditur KR linea minor quàm Kβ: quare iunctæ RO, PQ secabunt lineas MK, NL, vt dictum est: vnde NT est ad MS, ablata ad ablatam, vt NP ad MP, id est E ad F, & SK est ad TL, reliqua ad reliquam, vt SQ ad TQ, id est GH ad HI: similiter erit MZ ad NX, ablata ad ablatam, vt MO ad

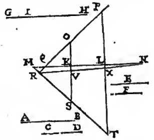
e 19. Quinti.

f 10. Quinti.

ad NO; id est E ad F, & X L ad Z K, reliqua ad reliquam, vt L R ad K R, id est G H ad H I.

11 Sint iterum AB CD lineæ inæquales, & ratio GH ad HI minor ratione AB ad CD; ratio autem E ad F minor ratione GH ad HI:

Dico tam ordinatim quàm reciprocè addi posse lineas, in ratione E ad F, vt compositæ rationem habeant GH ad HI. fiat enim vt E ad F sic LM ad KM, & KN ad LN: erectisque ex K & L parallelis KO, LP, quæ rectis AB CD, sint æquales, iungantur puncta PO, fiatque vt GH ad HI, sic PR ad OR; occurrat autem PO recta ipsi LM in Q, erit OR maior rectâ OQ, & LQ minor ipsa LM: vt ostendam: quare ductâ ex M per R linea MR, occurret OK, PL lineis in S & T: iunctaque RN, easdem secabit in V & X. Quoniam ergo ratio LM ad KM, id est per constructionē ratio E ad F minor est ratione LQ ad KQ, id est LP ad OK, id est AB ad CD, erit diuidendo,ᵃ quoque ratio LK ad KM, minor ratione LK ad KQ, adeoque LM linea,ᵇ maior recta LK: eodem modo ostenditur OR recta maior rectâ OQ. Vnde LT ad KS, ordinatim addita ad additam est vt LM ad KM, id est E ad F; & TP est ad SO, composita ad compositam, vt PR ad OR, id est GH ad HI. igitur ordinatim lineas adiecimus, &c.

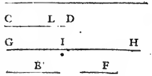


a 19. Quinti.

b 10 Quinti.

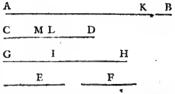
Reciprocè verò posse rectas adiici, in ratione E ad F, &c. sic ostendo. VK est ad LX addita ad additam, vt KN ad LN, id est per constructionem vt E ad F; & XP est ad OV tota ad totam, vt PR ad OR; id est GH ad HI; igitur, &c.

Iisdem positis: Dico detractionem tam ordinatam, quàm reciprocam fieri non posse. Detrahantur enim ordinatim lineæ KB LD, in ratione E ad F: & si fieri possit, sit AK ad LC, vt GH ad HI: Quoniam igitur ratio AB ad CD maior ponitur ratione E ad F, id est KB ad LD, erit quoque ratio AK ad CL residui ad residuum, ᶜ maior ratione AB ad CD, quod est contra hypothesim; cùm ratio AK ad CL id est GH ad HI, minor ponatur ratione AB ad CD. quare ordinata detractio non continget.



c 33. Quinti.

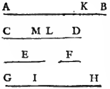
De reciproca detractione sic constabit. Detrahantur reciprocè LD KB, in ratione E ad F: & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI; fiat deinde vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit recta CM minor quàm CL, quia ratio AB ad CD, id est AK ad CM, maior ponitur ratione GH ad HI, id est AK ad CL. igitur cùm sit vt AB ad CD, sic AK ad CM, ablata ad ablatam, erit KB ad MD, ᵈ reliqua ad reliquam, vt AK ad CM: & KB linea, maior lineâ MD: adeoque multo maior rectâ LD. Quod est contra hypothesim: quare detractio reciproca non continget.



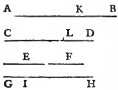
d 19. Quinti.

12. Sint AB CD lineæ inæquales, & ratio E ad F minor ratione AB ad CD, maior verò ratione GH ad HI:

Dico neque ordinatim, nec reciprocè lineas posse detrahi, in ratione E ad F, vt reliquæ obtineant rationem GH ad HI: demâtur enim reciprocè in ratione E ad F, rectæ

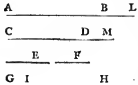


rectæ LD KB, & si fieri possit, sit AK ad CL vt GH ad HI, fiatque vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit CM minor ipsa CL, quia ratio AB ad CD, id est AK ad CM, maior est ratione GH ad HI, id est AK ad CL, cùm igitur sit vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit & KB ad MD, residuum ad residuum, vt AK ad CM; adeoque KB maior ipsa MD, & multo maior recta LD. Quod est contra hypothesim: quare detractio reciproca non continget. Sed neque ordinata detractio, casu hoc continget.



Detrahantur enim in ratione E ad F, lineæ KB LD; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI. cùm igitur ratio AB ad CD, maior ponatur ratione E ad F, id est KB ad LD, erit & ratio AK ad CL, a maior ratione AB ad CD; adeoque multo maior ratione GH ad HI, id est AK ad CL. Quod est contra hypothesim. Igitur neque ordinata detractio fieri potest.

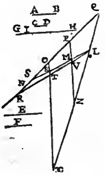
a 13. Quinti.



Iisdem positis, neque additio ordinata continget. Addantur enim in ratione E ad F, lineæ BL, DM; & si fieri possit, sit AL ad CM, vt GH ad HI. Quoniam igitur ratio AL ad CM, id est GH ad HI, minor ponitur ratione E ad F, id est BL ad DM, erit b ratio AB ad CD, minor ratione AL ad CM, id est GH ad HI. Quod est contra hypothesim; quare nec ordinata additio continget.

b Ibid.

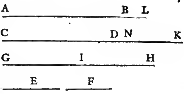
Iisdem positis additio reciproca fieri poterit: fiat enim vt E ad F, sic KL ad ML, & MN ad KN, erectisque ex M & K parallelis KO, MP, quæ rectis AB, CD sint æquales, iungantur OP, & fiat OQ ad PQ, item PR ad OR, vt GH ad HI, occurratque PR linea, rectæ MN in S; patet ex sæpè dictis, SO lineam minorem esse rectâ OR, & SK minorem ipsa KN; quia ratio AB ad CD, id est MP ad OK, id est PS ad OS, maior est ratione GH ad HI, id est PR ad OR; item MS ad KS, maior ratione MN ad KN, id est E ad F. Quare iuncta RL secabit rectas, OK PM, in T & V. Vnde KT est ad MV, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F, & PV ad OT, composita ad compositam, vt PR ad OR, id est per constructionem GH ad HI.



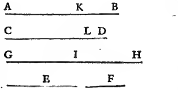
Addi iterum poterunt lineæ in ratione E ad F, vt OK minor vtriusque rationis antecedentes habeat: ducatur enim in eadem figura, ex Q per L recta; occurret illa lineis PV OT in Z, & X; quia ratio OQ ad PQ, id est GH ad HI, minor ponitur ratione KL ad LM, id est E ad F; nam si LQ linea non concurreret cum PV, OT lineis, sed illis æquidistaret, esset ratio KL ad ML, eadem cum ratione OQ ad PQ. Quod est contra hypothesim: occurret igitur LQ linea, rectis PV, OT in Z & X. Vnde KX est ad MZ, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F. & OX ad PZ, vt OQ ad PQ, id est GH ad HI.

13 Sint AB CD lineæ inæquales; ratio verò GH ad HI, minor ratione E ad F; quæ maior sit ratione AB ad CD. fieri non poterit additio reciproca. addantur enim DK, BL in ratione E ad F, & si fieri possit, sit AL ad CK vt GH ad HI: dein fiat vt AB ad CD, ita BL ad DN; erit DN linea minor

recta

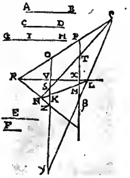


recta DK, cum ipsa BL minor ponatur rectâ DK, adeoque tota CN minor, CK. igitur cùm sit vt AB ad CD, sic BL ad DN, & componendo, vt AB ad CD, sic AL ad CN, erit ratio AL ad CN, minor ratione GH ad HI, id est per constructionem ratione AL ad CK. quod fieri non potest; cùm CN linea minor sit recta CK: quare additio reciproca non continget.



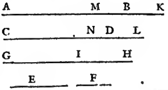
Neque etiam ordinata detractio fieri poterit: demantur enim lineæ KB, LD in ratione E ad F, & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI; Quoniam igitur ratio AB ad CD, minor ponitur ratione KB ad LD, siue E ad F, erit ratio AK ad CL, id est GH ad HI, [a] minor ratione AB ad CD, quod est contra Suppositum: quare ordinata detractio non continget. [a] 33. Quinti.

Detrahi tamen poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt reliquæ reciprocè habeant rationem GH ad HI. Fiat enim vt E ad F, sic KL ad ML, & MN ad KN; erectisque ex K & M parallelis KO, MP, quæ rectis AB, CD, sint æquales, iungantur OP; & fiat vt GH ad HI, sic OQ ad PQ, & PR ad OR: ostendetur vt in casu decimo huius propositionis puncta N & R, esse intra concursum linearum LN, QR, quare ductæ RL, NQ secabunt lineas OK, PM: & NQ quidem illas secet in ST, recta verò RL eisdem occurrat in V & X. patet TM esse ad SK, ablatam ad ablatam, vt MN ad KN, id est per constructionem vt E ad F, & SO esse ad PT, residuam ad residuam, vt OQ ad PQ, id est GH ad HI.



Addi etiam poterunt ordinatim lineæ in ratione E ad F, vt compositæ rationem habeant GH ad HI, agatur enim ex R per N linea RN, occurret illa rectis OK, PM: quod sæpius ostensum est, cùm ratio XR ad VR, id est PR ad OR, id est per constructionem GH ad HI, minor ponatur ratione E ad F, id est MN ad KN. occurrat igitur in Z & α. erit Mα ad KZ, addita ad additam, vt MN ad KN; id est E ad F, & Tα ad OK, composita ad compositam, vt PR ad OR, id est GH ad HI.

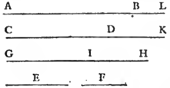
Rursum addi possunt lineæ vt minor OK, vtriusque rationis, habeat antecedentes; ducatur enim ex Q per L recta, quæ cùm OK, PM lineis conuenier vt ostensum sæpius; quia ratio OQ, ad PQ minor est ratione KL ad ML: conueniat igitur in β & γ erit Kγ ad Mβ, addita ad additam, vt KL ad ML, id est per constructionem vt E ad F, & Oγ ad Pβ, tota ad totam, vt OQ ad PQ, id est GH ad HI.



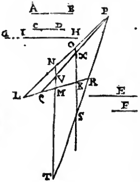
14 Sint iterum rectæ AB, CD inæquales, ratio verò E ad F maior ratione AB ad CD; quæ eadem sit, cum ratione GH ad HI: neque addi, neque demi ordinatim poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt compositæ vel reliquæ, rationem habeant GH ad HI. addantur enim ordinatim lineæ BK, DL, in ratione E ad F; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI. Quo-

C niam

a 19. Quinti. niam igitur A K eſt ad C L, vt A B ad C D, erit a reliqua B K ad D L reliquam, id eſt E ad F, vt A K ad C L, id eſt ex hypotheſi G H ad H I. Quod eſt contra ſuppoſitũ. Quare ordinatim addi non poterunt lineæ, &c. Neque demi poſſunt lineæ in ratione E ad F vt reſiduæ rationem obtineant G H ad H I, auferantur enim lineæ M B, N D in ratione E ad F, & ſi fieri poſſit, ſit vt G H ad H I, ſic A M ad C N, cũ igitur ſit vt A B ad C D, ſic b 19. Quinti. G H ad H I, id eſt per conſtructionẽ A M ad C N, erit b M B reliqua ad reliquam N D, vt A B ad C D: Quod eſt contra hypotheſin. Quare neque ordinatim demi poterunt lineę, &c.



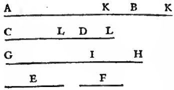
Iiſdem poſitis; neque additio reciproca fieri poterit. addantur enim lineę D K, B L, ſecundùm rationem E ad F, & ſi fieri poſſit, ſit A L ad C K vt G H ad H I. erit igitur A L ad C K, vt A B ad C D, & B L reliqua ad reliquam D K, vt A B ad C D: quare B L maior quàm D K. Quod eſt contra hypotheſin. Vnde additio reciproca fieri non poterit.



Poterunt tamen detrahi reciprocè lineæ in ratione E ad F, vt reliquę rationem obtineant G H ad H I. fiat enim K L ad M L, vt G H ad H I, erectiſque ex K & M parallelis K O M N, quæ æquales ſint lineis A B, C D, ducatur recta O N; occurret illa lineę K L in L; quia O L eſt ad N L, vt O K ad N M, id eſt vt A B ad C D, id eſt G H ad H I, id eſt per conſtructionem vt K L ad M L: dein O P facta ęquali ipſi N L fiat vt E ad F, ſic K Q ad M Q, ducaturque recta Q P: occurret illa lineis O K, N M, quia ratio O L ad N L, id eſt G H ad H I, id eſt ratio K L ad M L, c 10. Quinti. minor ponitur ratione E ad F, id eſt K Q ad M Q: adeoque M Q linea c minor rectâ M L: ſecet igitur P Q linea, rectas O K, N M in V & X: patet V M eſſe ad X K ablatam ad ablatam, vt K Q ad M Q, id eſt E ad F: & N V eſſe ad O X, reſiduum ad reſiduum, vt N P ad O P id eſt G H ad H I.

Addi etiam poterunt lineæ in ratione E ad F, vt minor vtriuſque rationis habeat antecedentes. Factâ enim K R æquali ipſi M Q, ducatur recta P R: occurret illa lineis O K, N M in S & T: quia ratio M R ad K R, id eſt E ad F, maior ponitur ratione G H ad H I, id eſt N P ad O P. Vnde patet M T eſſe ad K S, additã ad additam vt M R ad K R, id eſt E ad F, & N T eſſe ad O S, compoſitam ad compoſitam, vt N P ad O P, id eſt G H ad H I.

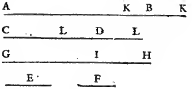
15 Sit iterum ratio A B ad C D, eadem cum ratione G H ad H I, quæ maior ſit ratione E ad F; dico ordinatim addi, nec demi poſſe lineas, in ratione E ad F, vt compoſitę, vel reliquę, rationem habeant G H ad H I; addantur enim lineæ B K, D L in ratione E ad F, & ſi fieri poſſit, ſit A K ad C L, vt G H ad H I: erit igitur vt A K ad C L, ſic A B ad C D; vnde & B K ad D L, id eſt per conſtructionem E ad F, vt A K ad C L, id eſt G H ad H I: Quod eſt contra hypotheſim: igitur ordinata additio non continget.



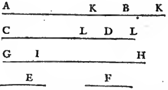
Eodem modo detrahantur ordinatim B K, L D, in ratione E ad F; & ſi fieri poſſit ſit A K ad C L, vt G H ad H I: erit igitur A K ad C L, vt A B ad B C, quare & B K ad L D, id eſt E ad F, vt A B ad C D, quod eſt contra hypotheſim, igitur, &c.

Neque

Neque etiam addi, vel demi reciprocè poterunt lineæ in ratione E ad F, vt residuæ vel compositæ rationem habeant GH ad HI. addantur enim DL, BK in ratione E ad F, & si fieri possit sit AK ad CL, vt GH ad HI: erit igitur vt AK ad CL, sic AB ad CD, quare & BK ad DL, est vt AB ad CD, ideoque BK maior ipsâ DL; Quod est contra hypothesim: ergo, &c. eodem modo ostenditur detractionem reciprocam fieri non posse.

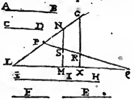


16 Sit ratio E ad F eadem cum ratione AB ad CD, minor autem ratione GH ad HI: dico ordinatim addi nec demi posse lineas in ratione E ad F, sic vt compositæ vel reliquæ, rationem habeant GH ad HI. addantur enim BK, DL in ratione E ad F, & si fieri possit sit AK ad CL, vt GH ad HI: erit igitur ratio AK ad CL, id est GH ad HI, maior ratione BK ad CL, id est E ad F, quare & ratio AB ad CD a maior ratione AK ad CK, id est GH ad HI, Quod est contra hypothesim: igitur ordinata additio non continget. a 33. Quinti

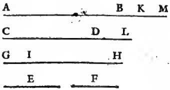


Eodem planè modo ostenditur, ordinatam detractionem fieri non posse.

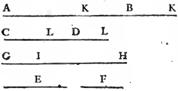
Detrahi tamen reciprocè poterunt lineæ in ratione E ad F, vt reliquæ rationem habeant GH ad HI. Fiat enim vt E ad F, sic XL ad ML & MQ ad XQ, erectisque ex X & M, parallelis XO, MN, quæ lineis AB, CD, sint æquales; ducatur ON linea, quæ occurret XL lineæ in L, quia OX est ad NM, id est AB ad CD, vt XL ad ML, id est E ad F; dein fiat vt GH ad HI, sic OP ad NP, erit NP linea minor lineâ NL, quia ratio OP ad NP, id est GH ad HI, maior ponitur ratione OL ad NL, id est XL ad ML, id est E ad F vt sæpiùs ostensum: quare iuncta PQ secabit lineas OX, NM in R & S: eritque SM ad RX ablata ad ablatam, vt MQ ad XQ, id est E ad F, & reciprocè OR ad NS, vt OP ad NP, id est GH ad HI.



Addi verò reciprocè lineæ non poterunt in ratione E ad F, &c. addantur enim lineæ DL BK in ratione E ad F, & si fieri possit, sit AK ad CL vt GH ad HI. Fiatque vt AB ad CD, ita BM ad DL, erit BM maior quàm DL, adeoque multo maior ipsâ BK. cùm igitur sit vt AB ad CD, sic BM ad DL, & componendo, AM ad CL vt BM ad DL, id est AB ad CD, erit ratio AM ad CL minor ratione AK ad CL, id est GH ad HI; Quod fieri non potest, cùm AM recta maior sit rectâ AK. quare reciproca additio non continget.

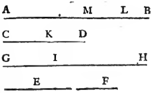


17 Sit iterum ratio E ad F inæqualitatis, & eadem cum ratione AB ad CD, quę maior sit ratione GH ad HI, dico ordinatim lineas in ratione E ad F demi vel addi non posse, vt reliquæ vel compositæ rationem habeant GH ad HI.



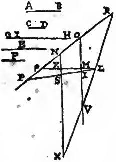
demantur enim in ratione E ad F, lineæ BKLD, sitque si fieri possit AK ad CL, vt GH ad HI; cùm igitur sit vt AB ad CD, sic E ad F, id est KB ad LD, ablata ad ablatam; erit & AK ad CL reliqua ad reliquam, vt AB ad CD; quod est contra hypothesim: cùm ratio AK ad CL, id est per constructionem GH ad HI, minor ponatur ratione AB ad CD. Quare ordinata detractio non continget.

Eodem modo probatur ordinatam additionem fieri non posse.



Sed neque detractio reciproca continget: demantur enim in ratione E ad F, lineæ KD, LB; & si fieri possit, sit vt GH ad HI, sic AL ad CK: fiat dein vt AB ad CD, sic MB ad KD, erit MB maior, quàm KD, adeoque multo maior rectâ LB. igitur cùm sit vt AB ad CD, sic MB ad KD, erit & AM ad CK, vt AB ad CD, sed ratio AM [a] ad CK, minor est ratione AL ad CK, igitur & ratio AB ad CD minor est ratione AL ad CK, id est GH ad HI: Quod est contra hypothesim. quare nec reciprocè lineæ detrahi poterunt in ratione E ad F, &c.

a 13. Quinti.



Poterit tamen fieri additio reciproca, &c. Fiat enim vt E ad F, sic KL ad ML, erectisque ex K & M parallelis KN, MO, quæ AB, CD lineis sint æquales; ducatur recta ON; fiatque OP ad NP, item NR ad OR, vt GH ad HI: occurratque OP lineæ rectæ KM in Q; erit NQ linea minor rectâ NP, quia ratio OP ad NP, id est GH ad HI, minor est ratione OQ ad NQ, id est OM ad NK, siue AB ad CD: quare & iuncta PL secabit lineas NK, OM, in S & T. Vnde KS est ad MT, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F, & OT ad NS, vt OP ad NP, id est GH ad HI.

Addi etiam sic poterunt lineæ in ratione E ad F, vt NK minor vtriusque rationis habeat antecedentes. ducatur enim recta RL: occurret illa lineis OM NK in V & X, quia ratio KL ad ML id est E ad F maior ponitur ratione NR ad RO. Vnde erit KX ad MV, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F, & NX, ad OV, composita ad compositam, vt NR ad RO, id est GH ad HI.

Scholion.

Possent in hac propositione plures casus determinari, & aliqui etiam, quibus propositio absolui non potest; sed ne tædium Lectori adferam, consultò abstinui: satis esse ducens, viam ad reliquas determinationes Geometriæ studioso aperuisse.

PARS

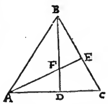
PARS SECVNDA.

De Triangulis, eorumq; proprietatibus.

PROPOSITIO XIX.

ESto A B C triangulum Iſoſceles, habens A B, A C, latera æqualia; ducanturq; ex A & B normales A E, B D, ad oppoſita latera, occurrentes ſibi mutuo in F.

Dico eſſe A F ad B C, vt A D ad D B.



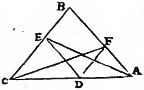
Demonſtratio.

QVoniam anguli A E B, B D C, per conſtructionem recti ſunt, & angulus E B F, communis triangulis E B F, D B C, erunt E B F, D B C triangula inter ſe ſimilia. Eodem modo oſtenditur triangulum A F D, ſimile triangulo D B C: vnde vt A D ad D B, ſic A F ad B C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

EX quouis puncto baſeos trianguli A B C Iſoſcelis eductæ D F, D E exhibeant angulos æquales E D C, F D A, iunganturque A E, C F.

Dico A E D, C F D triangula eſſe inter ſe æqualia.



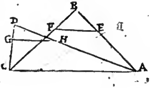
Demonſtratio.

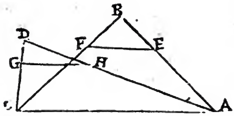
CVm enim tam angulus F D A, angulo E D C per conſtructionem, quàm angulus F A D, angulo E C D æqualis ſit, erunt A F D, C E D triangula inter ſe ſimilia. Quare vt A D ad D C, ſic F D ad E D. Rurſum cum angulus F D A, æquetur angulo E D C, addito communi angulo E D F, erit angulus E D A, æqualis angulo C D F. Vnde cùm & latera, æquales angulos continentia, reciprocè ſint proportionalia, [a] erunt A E D, C F D triangula inter ſe æqualia. Quod erat demon- [a] 15. Sexti.
ſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

SInt duo triangula Iſoperimetra A B C, A D C, ſuper eadem baſi A C conſtituta; diuiſiſq; A B, C D lateribus proportionaliter in E & G, ducantur E F, G H parallelæ baſi A C:

Dico Iſoperimetra quoque fore E B F, D G H triangula.

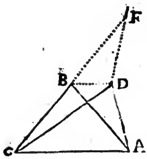




Demonſtratio.

QVoniam in triangulis ABC, ADC proportionaliter ſectæ ſunt lineæ ſuper baſi erectæ erunt vt ABC ſimul ſumptæ, ad EBF ſimul ſumptas, ita ADC ſimul ſumptæ ad HDG ſimul ſumptas, & permutãdo vt ABC latera ad latera ADC, ſic EFB ad HDG ſimul ſumpta; ſed ex ſuppoſitione æquales ſunt lineæ ABC, rectis ADC: Ergo etiam EBF, rectis HDG. Sed & recta FE æqualis eſt lineæ GH. Igitur Iſoperimetra quoque ſunt triangula EBF & HDG. Quod fuit demonſtrandum.

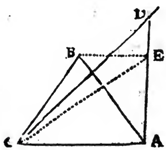
PROPOSITIO XXII.



TRiangulorum Iſoperimetrorum ſuper eadem baſi conſtitutorum, maximam habet altitudinem Iſoſcelium.

Demonſtratio.

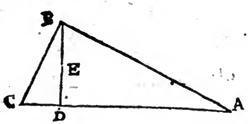
SInt ABC, ADC triangula iſoperimetra, & ABC quidem iſoſcelium; dico ABC maioris eſſe altitudinis quàm ſit ADC. Habeat enim ſi fieri poſſit triangulum ADC, eandem cum ABC triangulo altitudinem: producatur CB in E, vt BE linea ſit æqualis lineæ CB: iunganturque BD, ED. Quoniam AC, BD lineæ ex ſuppoſitione ſunt parallelę, erit angulus ABD, æqualis angulo CAB, id eſt angulo ACB, id eſt angulo EBD; ſunt autem latera duo BE, BD, duobus AB, BD lateribus æqualia; igitur triangulũ ABD æquale triangulo EBD, & AD latus, lateri ED æquale. Sed ED, DC latera ſimul ſumpta, maiora ſunt latere EC, hoc eſt lateribus AB, BC ſimul ſumptis; igitur & AD, DC latera ſimul ſumpta, maiora ſunt lateribus AB, BC. Quod eſt cõtra hypotheſin. vnde triangulum ADC, eandẽ non habet altitudinẽ cum triangulo ABC.



Habeat iam ADC triangulum, maiorem altitudinem quàm ABC; ducatur ex B linea BE, parallela baſi AC, occurrens AD lateri in E; iunganturq; CE. Quoniam AEC triangulum, eandem habet altitudinem cũ triangulo ABC, & ABC ſit Iſoſcelium; erunt AE, CE latera ſimul ſumpta, maiora lateribus AB, BC ſimul ſumptis per primam partem huius propoſitionis; ſed AD, DC latera maiora ſunt lateribus AE, EC; cùm E cadat infra D, igitur & latera AD, DC, multo maiora ſunt lateribus AB, BC. Quod eſt contra hypotheſim. igitur triangulum ADC, maiorem non habet altitudinem triangulo ABC; ſed neque æqualem habet; igitur triangulorum iſoperimetrorum ſuper eadem baſi conſtitutorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

Propoſitio hæc aliter demonſtratur libro noſtro de Ellipſi.

PROPOSITIO XXIII.



ESto ABC triangulum rectangulum, & ex B, ad AC baſim, demiſſa normalis BD.

Dico ABC triangulum, ad tria laterum quadrata, eam habere rationem, quam BD linea ad quadruplum lineæ AC.

Demon-

Demonstratio.

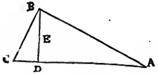
QVoniam Angulus ABC ponitur rectus, & BD normalis, erunt ABD, ABC triangula similia, & AB ad BD, vt AC ad CB, vnde ABC [a] rectangulum æquale rectangulo AC, BD, sed AC, BD rectangulum, est ad quadratum AC, vt BD linea ad lineam [b] AC; igitur & ABC rectangulum, est ad quadratum AC, vt BD linea ad lineam AC: est autem quadratum AC, æquale quadratis [c] AB, BC, igitur rectangulum ABC, est ad tria laterum AB, BC, CA quadrata vt idem rectangulum, ad quadratum AC bis sumptum; id est vt BD linea ad AC lineam bis sumptam. sed ABC triangulum, dimidium est rectanguli ABC, igitur triangulum ABC, ad AC quadratum bis sumptum, id est ad tria laterum quadrata, illam habet rationem, quam BD linea, ad quadruplum lineæ AC. Quod erat demonstrandum.

a 17. Sexti.
b 1. Sexti.
c 47. Primi.

PROPOSITIO XXIV.

IIsdem positis, diuidatur BD bifariam in E.

Dico ABC triangulum, ad quadratum BC, eam habere rationem, quam habet ED linea, ad lineam DC.

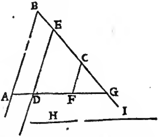


Demonstratio.

QVoniam BD linea in E diuisa est bifariam, erit ABC triangulum, æquale rectangulo AC DE; nam in præcedenti propositione ostensum est, rectangulum ABC, æquale rectangulo super AC & BD: rursum cùm ABC angulus sit rectus, & BD normalis, erit ACD rectangulo, æquale quadratum BC; quare ABC triangulum, est ad quadratum BC, vt ACDE rectangulum, ad rectangulum ACD, id est vt ED linea, ad lineam DC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

LAteri AB, anguli ABC, æquidistet DE. oportet per F punctum intra angulum DEC, rectam ponere AG, vt AD ad FG, datam habeat rationem H ad I.

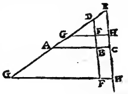


Constructio, & demonstratio.

DVcatur FC, quæ æquidistet ipsi AB; & fiat vt H ad I, sic BE ad CG: dein ponatur GFA. Dico factũ quod requiritur. cùm enim sit tam EB ad AD quàm CG ad FG, vt EG ad DG, (ob AB. ED, CF parallelas) erit EB ad AD, vt CG ad FG; & permutando AD ad FG vt BE ad CG; id est per constructionem vt H ad I. igitur &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXVI.

IN dato triangulo ABC, parallelam vni laterum constituere, rectam DE: vt quadratum ED, æquale sit AEC, rectangulo.



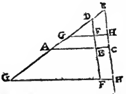
Con-

Constructio & demonstratio.

a Per elementa.

VT AC quadratum, ad CB quadratum, ita fiat linea AE ad a EC: & erigatur ED, quæ æquidistet ipsi BC. Dico ED soluere problema; quoniam enim DE æquidistat rectæ BC, erit quoque quadratum AE, ad ED, vt AC quadratum, ad CB: hoc est vt linea AE, ad EC: igitur sunt tres in continua ratione AE, ED, EC. cum ratio quadrati AE, ad DE quadratum, hoc est ratio AE, ad EC, duplicata sit rationis AE lineæ, ad ED lineam; est igitur quadratum DE, æquale rectangulo AEC. Quod erat exhibendum.

PROPOSITIO XXVII.



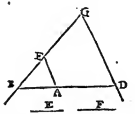
IIsdem positis constituatur GH, quæ æquidistet basi AC.

Dico rectangulo GFH æquari rectangulum FDE.

Demonstratio.

REctangulum GFH, ad FDE rectangulum, rationem habet compositam, ex ratione GF, ad FD, hoc est AE ad ED; & ex ratione FH, ad ED, hoc est EC ad ED; si igitur fiat vt EC, ad ED, ita ED ad aliam, erit illa per præcedentem ipsa AE: igitur vt AE ad AE, ita rectangulum GFH ad FDE: patet igitur æqualia esse rectangula illa inter se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

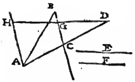


DAto A. puncto, intra angulum BCD, per illud lineam BAD ducere, quæ diuisa sit in A iuxta datam rationem E ad F.

Constructio, & demonstratio.

POnatur AE, æquidistans ipsi DC: & fiat vt E ad F, ita CE ad EB; deinde ex B, per A ducatur recta BAD, quæ pertingat in D. Dico factum quod quæritur: manifestum est ex elementis.

PROPOSITIO XXIX.



ADato puncto D extra angulum ABC. rectam ponere quæ diuidatur secundùm datam rationem à lineis angulum constituentibus.

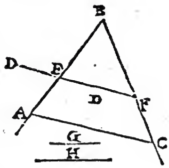
Constructio & demonstratio.

SIt data ratio E ad F, & ex D puncto ducatur quæuis GH: Ita vt sit DG ad GH vt E ad F: quo facto ponatur HA parallela ipsi BG. & ducatur DA, occurrens BG productæ in C. Dico DC ad CA, eandem rationem continere, quæ reperitur inter datas E, F. Cùm enim æquidistent AH, CG. erunt in eadem ratione DC, CA, cum rectis DG GH: hoc est E & F. præstitimus igitur quod requisitum fuit.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

DAtoangulo ABC, & D puncto extra lineas datas: rectam DF ponere quæ rectas EB BF auferat, in data ratione G ad H.



Constructio & demonstratio.

FIat vt G ad H, ita BA ad BC. iunctæque AC ducatur DF æquidistans: patet ex elementis factum esse quod petitur.

PROPOSITIO XXXI.

ESto ABC trianguli basis AC; quâ diuisâ in D, vt DE recta æquidistans lateri BC, media quoque sit, inter AD, DC: ducatur quæuis GF, parallela basi AC, occurrens ED lineæ in H.

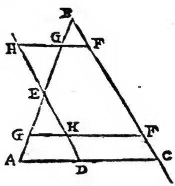
Dico GHF rectangulum, æquari rectangulo DEH.

Demonstratio.

ESt enim vt AD ad DE, sic GH ad HE; quia AD, GH lineæ æquidistant; sed vt AD ad DE, sic DE est ad DC, ex hypothesi; ergo etiam vt GH ad HE, sic DE ad DC: est autem HF ipsi DC [a] æqualis, igitur vt GH ad HE, sic DE ad HF: & GHF rectangulum, [b] æquale rectangulo DEH. Quod fuit demonstrandum.

a 34. Primi.

b 17 Sexti.



PROPOSITIO XXXII.

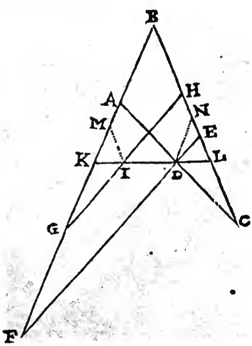
ESto ABC trianguli basis AC, bifariam diuisa in D; actâque per D lineâ EF, occurrente trianguli ABC lateribus, in E & F, ducatur quædam HG parallela rectæ EF, vt HI illius dimidia, media quoque sit inter ED & DF;

Dico GBH triangulum, æquale esse triangulo ABC.

Demonstratio.

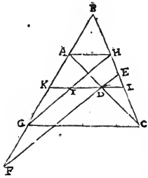
ACtâ per D & I, lineâ KL, erigantur ex I & D lineę IM, DN: & IM quidem lateri CB; DN verò AB lateri parallela. Vt FD ad GI, sic GI est ad DE per hypothesim, sed vt FD ad GI, sic DK est ad IK, & vt IH ad DE, sic IL ad DL, igitur vt DK ad IK, sic IL ad DL, & diuidendo vt DI ad IK, sic DI ad DL: quare IK, DL lineæ sunt inter [c] se æquales. ac proinde cùm (vt ex constructione patet,) triangula KMI, DNL, singula triangulo KBL similia sint, erunt & inter se similia, adeoque (cùm IK, DL rectæ æquentur) erunt & inter se æqualia; latusque KM,

c 9. Quinti.



lateri D N, & M I latus, N L lateri æquale: Rursum est vt K I ad I L, sic K M ad M B, & vt L D ad D K, sic L N ad N B. sed vt K I ad I L, sic L D ad D K, (ex antè dictis) igitur vt K M siue D N ad M B, sic L N siue I M ad N B: sed quia C A dupla ponitur ipsius C D, erit & A B ipsius D N, & C B ipsius C N, id est rectæ N B dupla: similiter quia G H linea, ipsius G I dupla est, erit quoque B H dupla lineæ M I; vti & G B ipsius M B; sunt autem D N, M B, I M, N B ostensæ proportionales, ergo & A B, B G, B H, B C illarum duplæ quoque sunt proportionales: & A B C, G B H [a] triangula inter se æqualia, cùm circa communem angulum A B C,
a 15. Sexti. latera habeant reciprocè proportionalia. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

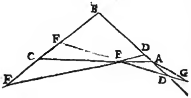


Iisdem positis quæ suprà: si H B G triangulum æquale fuerit triangulo A B C: Dico quadratum G I, dimidiæ scilicet ipsius G H, æquale esse rectangulo F D E.

Demonstratio.

IVngantur puncta A H, G C. Quoniam A B C triangulum per hypothesin æquale est triangulo G B H, ablato communi triangulo A B H, æqualia remanent triangula A G H, A C H, vnde & A H, G C lineæ [b] sibi mutuo æquidistant,
b 40. Primi. & cùm L K linea, bifariam secet rectas A C, H G, ex hypothesi erit & L K, ipsi A H parallela, & I K recta, æqualis rectæ D L: quare vt D I ad I K sic I D ad D L, & componendo vt D K ad I K, sic I L ad D L: sed est vt D K ad I K, sic F D ad I G, & vt I L ad D L sic I H ad D E; igitur vt F D ad G I, sic H I siue G I ad D E: adeoque F D E rectangulum æquale quadrato G I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIV.



DAto angulo A B C, & intra illum puncto E, oportet per E rectam ducere, occurrentem vtrimque anguli lateribus, cuius segmenta minimum contineant rectangulorũ quod segmentis cuiusuis lineæ per E ductæ contineri potest.

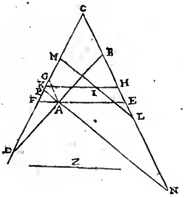
Constructio & demonstratio.

COnstituat recta A C, per E ducta Isosceles A B C, dico factum esse quod petitur; agatur enim per E recta quæuis alia F E D, & si C E A rectangulum non sit minimũ, sit D E F rectangulũ, vel æquale rectangulo A E C, vel minus: primo sit æqua-
c 14. Sexti. le. Quoniam igitur A E C, D E F rectangula sunt inter se æqualia, erit vt D E [c] ad A E, sic E C ad F C, sunt autem anguli ad E oppositi inter se æquales; igitur triangula A E D, F E C sunt inter se similia; adeoque angulus D A E, id est B C A ex-
d 16. Primi. ternus, æqualis angulo interno C F E. Quod [d] fieri non potest; quare D E F rectangulum, æquale non est rectangulo A E C.

Sit igitur D E F rectangulum minus rectangulo A E C. producatur F D linea in G, vt

PROPOSITIO XXXV.

DAto puncto A intra angulum B C D; per A rectam ducere pertingentem ad latera B C, C D, vt rectangulum quod sub segmentis continetur, æquale sit quadrato dato Z: quod oportet esse non minus minimo rectangulorum quæ segmentis linearum per A ductarum continentur.



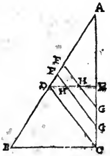
Constructio & demonstratio.

QVadratum Z vel æquale est minimo rectangulorum quæ sub segmentis linearum per A describi possunt, vel maius. Si æquale, agatur per A linea E F exhibens E C F triangulum isosceles; patet per præcedentem E A F rectāgulum æquari quadrato Z. sit igitur quadratum Z maius minimo rectangulorum. Ducatur per A linea D B vt in A diuisa sit bifariam (quod fiet si ducta ex A linea A G parallela lateri C B, fiat D G linea æqualis lineæ G C: & ex D per A recta ducatur D B) dein ducatur linea H K, parallela rectæ E F, [a] triangulum auferens H C K æquale triangulo B C D, eritq; H C K quoque isosceles, & H I quadratum [b] quod fit à dimidia lineæ H K, æquale rectangulo E A F: quod per hypothesim minus est quadrato Z. dupla igitur rectæ Z maior erit lineâ H K, poteritque auferre triangulum isosceles sub angulo C, maius triangulo H C K. Ducatur ergo L M, dupla rectæ Z, auferens [c] triangulum L C M æquale triangulo H C K; & per A recta agatur N P, parallela lineæ L M. Dico factum esse quod peritur. cùm enim recta B D in A diuisa sit bifariam, & per A ducta quædam N P, cuius parallela L M, triangulum aufert æquale triangulo H C K, id est per constructionem æquale triangulo B C D; erit N A P rectangulum æquale [d] quadrato dimidiæ ipsius L M, id est per constructionem quadrato Z duximus igitur per A lineam, &c. Quod erat faciendum.

[a] 32. Huius.
[b] 33. Huius.
[c] 32. Huius.
[d] 33. Huius.

PROPOSITIO XXXVI.

ESto A B C triangulum scalenum ductâq; ex C, lineâ C D, ad oppositum latus, quæ angulum A C D æqualem faciat angulo A B C, ducatur ex D linea D E, parallela ipsi C B; quam in H secent rectæ quotcunque F G, parallelæ ipsi C D, occurrentes C A D trianguli lateribus in F, & G.



Dico D H E rectangula, æquari rectangulis F H G.

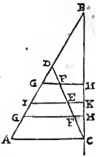
Demonstratio.

ANgulus A G F, id est A C D, per constructionem est æqualis angulo A B C, id est A D E: sunt autem & anguli F H D, E H G ad verticem oppositi inter se

D 2 æquales,

æquales, igitur DFH, HEG triangula sunt similia. Vnde FH ad HD, vt HE ad
a 17. Sexti. HG, adeoque DHE [a] rectangula, æqualia rectangulis FHG. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.



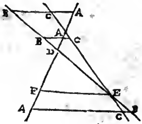
Esto ABC triangulum, ducaturque ex C, recta quæuis CD, secans AB latus oppositum in D; diuisa autem CD bifariam in E, agatur per E linea IK, parallela basi AC, cui & alia quæuis GH, ducatur æquidistans, occurrens CD lineæ, in F.

Dico IEK rectangulum, maius esse rectangulo GFH.

Demonstratio.

b 23. Sexti. Ratio IEK rectanguli, ad rectangulum GFH, [b] composita est ex ratione IE ad GF, id est DE ad DF, & ex ratione EK ad FH, id est EC ad FC: sed ex
c Ibid. iisdem quoque [c] composita est ratio rectanguli DEC, ad rectangulum DFC. Igitur vt DEC rectangulum, ad rectangulum DFC, sic IEK rectangulum, est ad re-
d Papp. l. 7. Prop. 13. ctangulum GFH. est autem DEC rectangulum maius rectangulo [d] DFC (cùm DC in E diuisa sit bifariam) igitur & IEK rectangulum maius est rectangulo GFH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.



Occurrant AB lineæ quotcunque inter se parallelæ, rectis EBD, EC, EF: quas omnes secet linea FAD.

Dico ABC rectangulum, ad rectangulum ABC, eam habere rationem, quam habet DBE rectangulum, ad rectangulum DBE.

Demonstratio.

e 23. Sexti. Ratio rectanguli ABC, ad rectangulum ABC, [e] componitur ex ratione AB ad AB, id est DB ad DB, & ex ratione BC ad BC, id est BE ad BE, sed ex iisdem composita est ratio rectanguli DBE, ad rectangulum DBE, igitur rectangulum ABC, ad ABC rectangulum, eam habet rationem, quam DBE rectangulum, ad rectangulum DBE. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

Esto ABC trianguli basis AC, bifariam diuisa in D, & recta ducta BD.

Dico

Dicó quadrata A B, B C ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadratis A D, D B bis ſumptis.

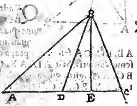


Demonſtratio.

Demittatur ex B linea B E, normalis ad baſim A C; & B E quidem 1. cadat extra triangulum A B C: Quoniam igitur B E normalis, cadit extra triangulum A B C formans angulum A E B rectum, patet angulos B A E, B D E, B C E acutos eſſe; quare A B quadratum ſuperat [a] quadrata A D, D B, rectangulo A D E bis ſumpto. & B C [b] quadratum ab iiſdem deficit rectangulo C D E, id eſt A D E bis ſumpto: addendo igitur ad quadratum B C, exceſſum quo A B quadratum, ſuperat quadrata A D, D B, fit vt A B, B C quadrata ſimul ſumpta æqualia ſint quadratis A D, D B bis ſumptis. a 11. Secundi. b 12. Secundi.



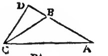
Sit iam E B normalis, eadem cum latere B C, adeoque angulus A C B rectus; quadratum A B. ſuperat [c] quadrata A D, D B, rectangulo A D C bis ſumpto. id eſt quadratum A B, eſt æquale quadratis A D, D B, & D C quadrato bis ſumpto: ſed B C quadratum, deficit [d] à quadrato B D, quadrato D C: igitur ſi quadratum D C, id eſt dimidium exceſſus quo A B quadratum ſuperat quadrata A D, D B, addatur quadrato B C; patet A B, B C quadrata, æquari quadratis A D, D B bis ſumptis. c ibid. d 13. Secundi.



Cadat B E normalis, inter B C & B D lineas: Quoniam anguli A E B, C E B ſunt recti, erunt A B, B C quadrata, æqualia quadrato B E bis ſumpto i vna cum quadratis A E, E C; ſed A E, E C quadrata, [e] dupla ſunt quadratorum A D, D E; igitur quadrata A B, B C, æqualia ſunt, quadratis B E, A D, D E bis ſumptis; eſt autem B D quadratum bis ſumptum, æquale quadratis D E, B E bis ſumptis; igitur quadrata A B, B C ſimul ſumpta, ſunt æqualia quadratis A D, D B bis ſumptis. Quod erat demonſtrandum. e 9. Secundi.

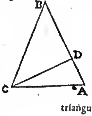
Eſt hæc Pappi Lib. 7. Prop. 122.

PROPOSITIO XL.



Eſto A B C triangulum iſoſceles, & ex C, alterutro angulorum æqualium, ducta normalis C D, ad latus oppoſitum;

Dico quadrata tria laterum trianguli, A B C æquari quadrato A D ſemel; quadrato D B bis, & D C quadrato ter ſumpto.



Demonſtratio.

Qvoniam angulus C D B per conſtructionem rectus eſt, erit C B quadratum, æquale quadratis C D, D B: ſed A B linea ex conſtructione eſt æqualis lineæ C B igitur & quadratum A B, æquale eſt quadratis C D, B D. Rurſum quadratum A C, æquale eſt quadratis C D, D A: igitur tria laterum

trianguli A B C quadrata, sunt æqualia quadrato A D semel, quadrato D B bis, & C D quadrato ter sumpto. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.



Esto ABC triangulum rectangulum, & ex B recta demittatur quæuis BD, ad oppositum latus AC.

Dico AD, BC quadrata simul sumpta, æquari quadratis AC, BD simul sumptis.

Demonstratio.

QVoniam angulus B A C rectus ponitur, erit B C quadratum, vna cum quadrato AD, æquale tribus quadratis AB, AC, AD: sed ijsdem æquale est quadratum BD vna cum quadrato AC, igitur AD, BC quadrata, æqualia sunt quadratis AC BD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLII.



Esto ABC triangulum, & ex singulis angulis ductæ lineæ BD, AF, CE secent latera opposita bifariam in D, E, F.

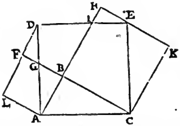
Dico AF, EC, BD, quadrata, ad quadrata tria laterum trianguli ABC, eam habere rationem, quam tria ad quatuor.

Demonstratio.

QVadrata AB, BC simul sumpta, æqualia sunt quadratis BD, [a] AD bis sumptis: & AC, BC quadrata, æqualia sunt quadratis EC, AE bis sumptis; quadrata verò AB, AC æquantur quadratis AF, CF bis sumptis; igitur quadrata AB, BC, CA semel sumpta, æqualia sunt quadratis AF, CE, BD, AD, AE, CF semel sumptis. Sed AD, AE, CF quadrata, sunt quarta pars quadratorum AB, BC, AC: igitur quadrata reliqua AF, CE BD, tres habent quartas, quadratorum AB, BC, AC. Quod erat demonstrandum.

a 39. Huius.

PROPOSITIO XLIII.

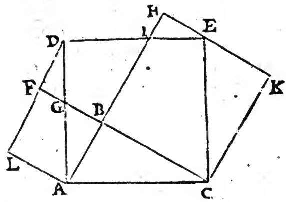


IN triangulis rectāgulis quadratum, quod fit à latere rectum angulum subtendente, æquale est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus, describuntur quadratis.

Demonstratio.

SIt ABC triangulum rectangulum, & laterum quadrata sint AE, AF, CH, & FB linea secet AD in G. Quoniam anguli KCB ECA sunt inter se æquales dempto communi angulo ECB, erunt anguli ACB, ECK reliqui, inter

inter se æquales: sunt autem E C, K C duo latera, æqualia duobus lateribus A C, C B; igitur reliquum latus trianguli C K E, reliquo lateri trianguli A B C est æquale: vnde punctum E est in recta H K, & E K C triangulum, æquale triangulo A B C. Eodem modo ostenditur triangulum A B C æquale triangulo D L A, & punctum D esse in directum cum L F producta. Rursum cùm D L latus, æquale sit lateri C K, hoc est K H,



& F L æquale ipsi A B, id est E K; erit reliquum latus E H, æquale reliquo D F; est autem angulus F G D (ob B F, L A parallelas) æqualis angulo D A L, id est I A C, id est angulo E I H; & angulus E H I, æqualis angulo D F G, igitur D F G, E H I triangula, & D G, I E latera sunt inter se æqualia. Iterum cùm anguli A D I, G A C sint inter se æquales, & A C, A G latera, æqualia lateribus A D, D I, erit I D A triangulum, æquale triangulo G A C; vnde dempto communi triangulo A B G, erit A B C triangulum, æquale Trapezio I B G D I. Igitur cùm triangulum A B C, id est E K C æquale sit trapezio I B G D I, & D F G triangulum, æquale triangulo E H I, reliqua verò sint communia, erit A E quadratum, lateris rectum angulum subtendentis, æquale quadratis A F, C H, laterum rectum angulum continentium. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

Demonstrat hanc Clauius ad 47. primi Element. triplici aliâ methodo; secus quàm Peletarius fieri posse existimauit: copiæ tamen, non necessitatis ergo; etiam nos illam, aliâ viâ demonstrandam assumpsimus, maximè occasione sequentium duarum propositionum.

PROPOSITIO XLIV.

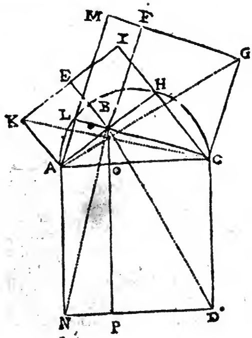
Esto A B C triangulum amblygonium, & laterum quadrata A D, A E, C F. ducaturq; ex C linea C H secans orthogonaliter in H & I, lineas A B, K E.

Dico A D quadratum, superare quadrata A E, C F, rectangulo A B H bis sumpto.

Demonstratio.

Dvcatur ex A linea A M, secans in L & M orthogonaliter lineas C B, G F, & super A C vt diametro describatur semicirculus A H C; a transibit is per H & L. Iunganturq; puncta A G, C K, B D, B N, dein ex B, recta demittatur B O, secans orthogonaliter in O P, lineas A C, D N. Quoniam A M, C G lineæ, per constructionem æquidistant, erit A G C triangulum æquale dimidio rectanguli G L: eodem modo triangulum C A K, æquale est dimidio rectanguli A I; Rursum cùm anguli A B E, C A N, per constructionem recti sint, addito communi angulo B A C, erunt anguli B A N, C A K inter se æquales: sunt autem A B, A N late-

a 31. Tertij.



ra, æqualia duobus lateribus A C, A K; igitur triangulum N A B, æquale est triangulo C A K, & A I rectangulũ, æquale rectangulo A P: eodem modo ostenditur rectangulum C M, æquari rectangulo C P. Vnde A D quadratum, æquale est rectangulis A I, C M simul sumptis. Sed A I rectangulum, superat quadratum A E, rectangulo B I, id est rectangulo A B H, & C M rectangulum, superat quadratum C F, rectangulo B M, id est rectangulo C B L, id est A B H rectangulo; igitur quadratum A D, superat quadrata A E, C F, rectangulo A B H bis sumpto. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

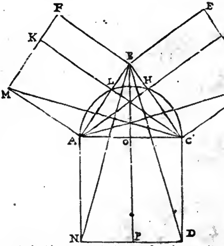
Propositionem hanc, vti & sequentem, licèt demonstret Euclides Lib. 2. prop. 12. & 13. non iniucundum tamen fore putaui, si vtramque eo discursu quo Pythagoras 47. primi Element. hoc loco demonstrarem.

PROPOSITIO XLV.

ESTo A B C triangulum oxygonium, & laterum quadrata A D, C E, A F. Ducaturque ex A linea A G, secans orthogonaliter in H, & G, lineas C B, I E.

Dico A D quadratum deficere à quadratis C E, A F, rectangulo H B C bis sumpto.

Demonstratio.



141. Tertij.

DVcatur ex C linea, secans orthogonaliter in L & K lineas A B, F M, iunganturque puncta A I, C M, B D, B N. descripto dein super A C vt diametro, semicirculo A H C, (qui transibit per H & K) demittatur ex B, linea B O, secans orthogonaliter in O & P, lineas A C, D N. Quoniam A M, L C lineæ æquidistant, erit M A C triangulum, æquale dimidio rectanguli A K, eodemq; modo triangulũ A I C, æquale dimidio rectanguli C G. rursum cùm anguli M A B, C A N per constructionem sint æquales, addito communi angulo B A C erunt anguli M A C, B A N quoque inter se æquales, sunt autem & latera A M, A C æqualia duobus lateribus A B, A N, igitur triangulum M A C, æquale triangulo B A N, & A K rectangulum, æquale rectangulo A P: duplo nimirum trianguli B A N. Eodem modo ostenditur rectangulum C G, æquale esse rectangulo C P: quare A D quadratum, æquale est rectangulis C G, A K. sed C G rectangulum deficit à quadrato C E, rectangulo H E, id est rectangulo H B C; & A K rectangulum; deficit à quadrato A F, rectangulo L F, id est rectangulo A B L, id est rectangulo H B C; igitur quadratum A D, deficit à quadratis C E, A F, rectangulo H B C, bis sumpto. Quod erat demonstrandũ.

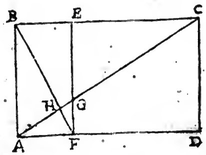
P R O-

PROPOSITIO XLVI.

PArallelogrammi ABC, diametrum AC, secet EF, æquidistans ipsi AB in G. ponatur insuper BF.

Dico GH, HA, HC. tres esse in continua ratione.

Demonstratio.



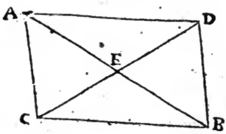
SImilia namque sunt triangula, AHF, BHC, quemadmodum & triangula GHF, AHG: quare vt CH ad HA, hoc est BH ad HF, ita HA ad HG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVII.

SInt AB CD cuiuscumque parallelogrammi, diametri AB, CD.

Dico diametrorum quadrata simul sumpta, æqualia esse quadratis laterum figuræ.

Demonstratio.



PEr trigesimam nonam huius, quadrata AC, AD æquantur quadratis EC, EA bis sumptis: & per eandem quadrata CB, BD æqualia sunt ijsdem; scilicet quadratis EC, EB bis sumptis, sed quadratum CD a æquatur EC quadrato quater sumpto, & AB quadratum, quadrato EA quater sumpto: patet ergo veritas propositionis.

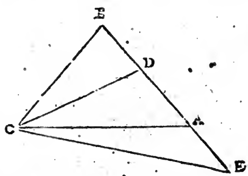
a 4. Secundi.

PROPOSITIO XLVIII.

ESto ABC triangulum isosceles, ductâque ex C, alterutro angulorum æqualium, vtcunque lineâ CD, quæ AB lateri, occurrat in D, fiat ipsi CD æqualis DE, iunganturque EC.

Dico angulum BCD, duplum esse anguli ACE.

Demonstratio.



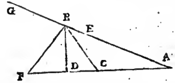
b 16. Primi.

ANgulus DAC æqualis b est duobus angulis DEC, ACE, id est per constructionem, angulo DCE vnà cum angulo ACE, id est angulo DCA vnà cum angulo ACE bis sumpto. Sed angulo DAC æquatur angulus BCA, cùm ABC sit isosceles; igitur angulus BCA, æquatur angulo DCA, vnà cum angulo ACE bis sumpto, dempto igitur communi angulo DCA, manet angulus BCD, æqualis angulo ACE bis sumpto. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIX.

ESto ABC triangulum obtusangulum, oporteat AB latus subtensum angulo obtuso ita secare in E, vt AE, EB quadrata, æqualia sint quadratis AC, CB.

Constructio, & demonstratio.



PRoductâ AC in F, vt AC, CF lineæ sint inter se æquales, iungantur FB, producaturque AB in G vt GB, BF lineæ sint æquales: tum AG bifariam secetur in E: Dico factum esse quod petitur: Quoniam AC, CF lineę sunt inter se æquales, erũt ABC, CBF triangula æqualia, & quia angulus ACB obtusus est, erit AB latus, subtensum angulo ACB, maius latere BF, id est per constructionem, latere GB. quare punctum E cadet inter A & B. igitur cùm AG linea diuisa sit bifariam in E, & non bifariam in B, erunt AB, BG quadrata dupla [a] quadratorum AE, EB: sed & AB, BG quadrata, id est AB, BF, dupla [b] sunt quadratorum AC, CB, igitur quadrata AE, EB, æqualia sunt quadratis AC, CB. diuisimus igitur latus AB, &c. Quod erat faciendum.

a 9. Secundi.
b 39. Huius.

Aliter.

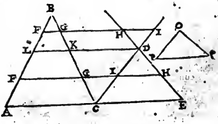
DEmittatur ex B linea BD, normalis ad rectam AC, seceturque AB in E vt AEB rectangulum æquetur rectangulo. ACD (quod fieri posse ex eo constat, quòd AB linea maior sit lineâ AD.) Dico factum esse quod petitur. Quadratum AB æquale est quadratis AC, CB & ACD [c] rectangulo bis sumpto, sed & AB quadratum æquale [d] est quadratis AE, EB & AEB rectangulo bis sumpto, igitur quadrata AC, CB, vnâ cum rectangulo ACD æqualia sunt quadratis AE, EB, vnâ cum rectangulo AEB: sunt autem ACD, AEB rectangula inter se per constructionem æqualia, igitur & quadrata AC, CB, æqualia sunt quadratis AE, EB. diuisimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

c 12. Secundi.
d 4. Secundi.

PROPOSITIO L.

DAtis duobus triangulis ABC, CDE inæqualis altitudinis, super eadem, vel æquali basi in directum constitutis, lineam ducere, parallelam basi AC, quæ auferat triangula in data ratione M ad N.

Constructio & demonstratio.



DVcatur ex D linea DK, parallela basi AC, occurrens ABC trianguli lateribus, in K & L: dein fiat vt M ad N, sic LBK triangulum, ad triangulũ OPQ, quod simile sit triangulo CDE. tum quędam ducatur FG, parallela basi AC, occurrens ABC trianguli lateribus in F & G, & CDE trianguli lateribus in H & I, vt [e] FG sit ad HI, sicut LK ad PQ. Dico factum esse quod petitur. Quoniam FG est ad HI, vt LK ad PQ, erit permutando inuertendo vt LK ad FG, sic PQ ad HI: sed LBK triangulum, est ad triangulum FBG, in duplicata [f] ratione eius, quam habet LK linea, ad lineam FG, & POQ triangulum est ad triangulum CDE in duplicata [g] ratione linee PQ

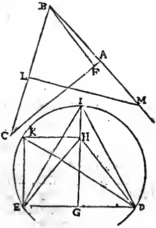
e 16. Huius.
f 19. Sexti.
g Ibid.

ad HI, quia P O Q, H D I triangula sunt similia, igitur vt triangulum L B K ad triangulum F B G, ita est triangulum P O Q, ad triangulum H D I, & permutando vt L B K triangulum, ad triangulum P O Q, sic F B G triangulum, est ad triangulum H D I: sed L B K triangulum, per constructionem est ad triangulum P O Q, vt M ad N, igitur vt M ad N sic F B G triangulum est ad triangulum H D I. Duximus igitur lineam, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LI.

Dato triangulo A B C, lineâ D E, & angulo A B C. Oporteat in eodem angulo A B C rectam subtendere L M, datæ D E æqualem, quæ auferat triangulum, dato A B C triangulo æquale. Oportet autem A B C triangulum, non esse maius isosceli, quod super D E poni potest, habens ad verticem angulum, dato A B C æqualem.

Constructio & demonstratio.



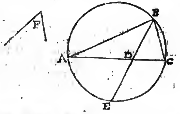
Super D E linea segmentum fiat circuli, continens angulum, A B C æqualem. Diuisaque D E bifariam in G, erigatur recta G I, normalis ad lineam A C, iunganturque puncta D I, I E. Dein ex B demittatur linea B F, normalis ad basim A C: fiatque vt D E ad A C, ita B F ad H G, erunt A B C, D H E [a] triangula inter se æqualia, & H punctum non cadet supra I, quia A B C triangulum per constructionem non est maius, triangulo D I E: tum recta ducatur H K, parallela basi D E, occurrens circulo in K. Iunctisque punctis D K, E K, fiat B M æqualis ipsi D K, & B L æqualis ipsi K E, iungaturque L M. Dico L B M triangulum satisfacere petitioni: Quoniam H K, D E lineæ sunt parallelæ, erit E K D triangulum æquale triangulo D H E, id est per constructionem triangulo A B C; est autem angulus A B C, æqualis angulo D I E, id est angulo [b] D K E, & D K, K E latera per constructionem æqualia lateribus L B, B M, igitur triangulum L B M æquale est triangulo D K E, id est triangulo A B C, & M L latus æquale lateri D E. igitur angulo A B C rectam subtendimus, &c. Quod erat faciendum.

[a] Clau. ad 21. sexti.

[b] 21. Tertij.

PROPOSITIO LII.

Datâ rectâ A B, vtcunque diuisa in D; super A B triangulum constituere A C B, habens ad C verticem, angulum dato F, æqualem; quem recta ex C per D acta, diuidat bifariam.



Constructio & demonstratio.

Super A B recta segmentum describatur circuli, continens angulum B C A æqualem dato F; perfectoque circulo A C B, secetur arcus A E B bifariam in E, & ex E per D linea agatur E C, occurrens circuli peripheriæ in C: iunganturque puncta A C, C B. Dico factum esse quod petitur, cùm enim arcus A E B per

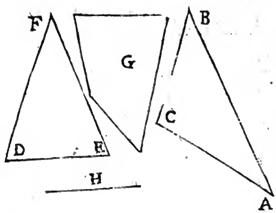
 constru-

a 17. Tertij. constructionem bifariam in E sit diuisus, erunt ACE, BCE anguli inter se a æquales, adeoque angulus ACB bifariam diuisus, sed angulus ACB per constructionem est æqualis angulo dato F; igitur super AB recta triangulum constituimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LIII.

DAto Angulo ABC, rectam subtendere, quæ ABC triangulum æquale constituat, figuræ rectilineæ G; sic vt AB, BC laterum, differentia sit æqualis datæ rectæ H.

Constructio, & demonstratio.



FIat EFD triangulum isosceles æquale figuræ rectilineæ G, habens angulum ad verticem æqualē angulo ABC: habitâ dein mediâ DF, & excessu extremarum H, b inueniantur extremæ AB, BC iunganturque puncta AC. Dico factum esse quod petitur. Quoniam angulo ABC, per constructionem æqualis est angulus EFD, sit autem vt AB ad DF sic DF ad BC per constructionem, id est EF ad BC, erit ABC triangulum c æquale triangulo DFE; id est per constructionem, figuræ rectilineæ G: est autem H differentia laterum AB, BC; igitur angulo ABC rectam subtendimus, &c. Quod erat faciendum.

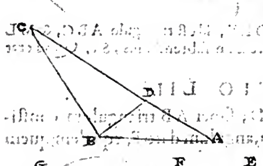
b Per Andersonium & alios.

c 15. Sexti.

PROPOSITIO LIV.

DAto Angulo ABC, rectam subtendere AC, vt ex B in AC, demissa linea BD, angulum producat ADB, æqualem angulo ABC; abscindatq; rectam CD, ad quam AB linea, datam habeat rationem H ad I.

Constructio & Demonstratio.



FIat vt H ad I, sic AB linea ad lineam FG. dataque AB mediâ, & FG extremarum differentia, inueniantur extremæ EG, EF: erit EG maior rectâ AB. Ducatur igitur ex A linea AC æqualis rectæ EG, occurrens BC lateri in C, sumptaque CD æquali ipsi FG, iungantur puncta DB. Dico factum esse quod petitur. Quoniam tam AC, EG lineæ, quàm DC, FG sunt inter se æquales, erit AD reliqua, æqualis reliquæ EF. Quare AD est ad AB, vt AB ad AC: est autem angulus CAB, communis triangulis ADB, ACB: igitur triangula ADB, ACB sunt d inter se similia: angulusque ADB æqualis angulo ABC. Rursum cùm DC per constructionem sit æqualis ipsi FG, erit vt AB ad FG, sic AB ad DC, sed AB est ad FG per constructionem vt H ad I, igitur vt H ad I, sic AB est ad DC, vnde angulo ABC rectam subtendimus &c. Quod erat faciendum.

d 13. Sexti.

PARS TERTIA.

De rectangulorum inter se proportione.

PROPOSITIO LV.

SI AB linea, diuisa fuerit vtcunque in C & D: Dico ACB, CDB rectangula, æqualia esse rectangulis BDA, DCA.

A C D B

Demonstratio.

QVadratum AB, æquale est BA quadrato; sed AB [a] quadratum æquatur quadratis AC, CD, DB, vnà cum rectangulis ACB, CDB, bis sumptis, & BA quadratum æquatur quadratis BD, CD, CA, vnà cum rectangulis BDA, DCA bis sumptis: Igitur ablatis communibus quadratis AC, CD, DB, remanent ACB, CDB rectangula, æqualia rectangulis BDA, DCA. a 4. Secun-di.

Corollarium.

PRopositio hæc quoque vera est, si AB linea, vtcumque & quotcumque punctis diuidatur. Eademque est methodus progrediendi, & demonstrandi, qua in propositione vsi sumus.

PROPOSITIO LVI.

SI fuerit vt AB ad BC, sic AD ad DF, & BC lineæ æqualis EF. Dico ABDE, rectangulum æquale esse rectangulo CBD.

A B C D E F

Demonstratio.

QVoniam per constructionem est, vt AB ad BC, sic AD ad DF, erit permutando, inuertendo, vt AD ad AB, sic DF ad FE, id est ad BC: & diuidendo, vt AB ad BD, sic FE ad DE, id est BC ad DE; quare ABDE rectangulum, æquale est rectangulo CBD. Quod erat demonstrandum.

A B C E F
D

PROPOSITIO LVII.

SI fuerit AB recta diuisa in C & D vt AC DB, lineæ sint inter se æquales;

A C D B

Dico CB quadratum, æquari quadrato AC vnà cum rectangulo ABCD.

Demonstratio.

QVadratum AB, æquale est quadratis AC, CB, vnà cum ACB rectangulo bis sumpto: sed AC quadratum, vnà cum rectangulo ACB, æquale est re-

ctangulo CAB, igitur quadratum AB, æquale est quadrato CB, vnà cum rectangulis ACB, CAB. Rursum AB quadratum, æquale est rectangulis ABCD, CAB, DBA; igitur quadratum CB, vnà cum rectangulis ACB, CAB, æquale est rectangulis AB CD, CAB, DBA. quare dempto communi rectangulo CAB; æqualia remanent CB quadratum, vnà cum rectangulo ACB, rectangulis ABCD, DBA, id est rectangulis ABCD, BDA, vnà cum quadrato DB: ablatis igitur æqualibus rectangulis BDA, ACB, manet CB quadratum, æquale quadrato DB, id est AC, vnà cum rectangulo ABCD. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LVIII.

A B E C D

SI fuerit AD linea, diuisa in B & C, vt AB CD lineæ sint æquales, sumatur autem inter B & C, punctum quoduis E;

Dico AED rectangulum, æquale esse rectangulis CEA, EBA, vnà cum quadrato AB.

Demonstratio.

a 1. Secundi. REctangulum AED, æquale est rectangulis [a] ABEC, BEC, BECD, vnà cum quadrato AB: sed ijsdem, æqualia sunt rectangula AEC, ABE, vnà
b Ibid. cum quadrato AB; (quia AEC, [b] æquatur rectangulis ABEC, BEC) igitur AED rectangulum, æquale est rectangulis CEA, EBA, vnà cum quadrato AB, Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

SI fuerit AG linea, vtcunque diuisa in D, B, E;

Dico rectangula ADC, AEC, DBE; æqualia esse rectangulis ABC, ADB, BEC, ADEC.

A D B E C

Demonstratio.

c Ibid. REctangulum ADC, æquale est rectangulis ADB, [c] ADBE. ADEC: &
d Ibid. AEC rectangulum, [d] æquale est rectangulis, CEB, CEBD, CEDA; quare addito rectangulo DBE, erunt ADC, AEC, DBE rectangula, æqualia rectangulis ADB, ADBE, ADEC, CEB, CEBD, CEDA, DBE. sed & ABC rectangulum, æquale est rectangulis DBE, ADBE, CEBD, CEDA; additis igitur rectangulis ADB, BEC, ADEC, erunt ABC, ADB, BEC, ADEC rectangula, æqualia rectangulis ADB, ADBE; ADEC, CEB, CEBD, CEDA, DBE: sed & ijsdem rectangulis, ostensa sunt æqualia, rectangula ADC, AEC, DBE; Igitur rectangula ADC, AEC, DBE, æqualia sunt rectangulis ABC, ADB, BEC, ADEC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LX.

SI fuerit AB linea, diuisa in quinque partes ęquales, punctis C, D, E, F. & ei ęquis in directum adijciatur GA.

Dico GD quadratum, ęquale esse quadrato AG, vnà cum rectangulo GCB.

G A C D E F B

Demon-

Demonstratio.

QVadratum GD, æquale est quadratis AG, AD vnà cum a rectangulo GAD bis sumpto: sed AD quadratum, æquale est quadratis AC, CD, vnà cum rectangulo ACD bis b sumpto; id est vnà cum quadratis DE, EF: & GAD rectangulum bis sumptum, æquale est rectangulis, GACE, GAEB, id est rectangulo GACB (ob CE, EB lineas æquales lineæ CB) igitur quadratum GD, æquale est, quadratis AG, AC, CD, DE, EF. vnà cum rectangulo GA, CB. Rursum rectangulum GCB. æquale est rectangulis GACB, ACB: sed ACB rectangulum æquale est, rectangulis ACD, ACDE, ACEF, ACFB, id est quadratis AC, CD, DE, EF, vnà cum rectangulo GACB; igitur addito quadrato AG, erit GCB rectangulum, vnà cum quadrato AG, æquale quadrato GD. Quod erat demonstrandum.

a 4. Secundi.
b Per eandem.

PROPOSITIO LXI.

SEcetur AB, in quotuis partes vtcunque in C, D, E, &c.

A C D E B

Dico quadrata AC, CD, DE, EB, simul cum rectangulis ACB, CDB, DEB bis sumptis, æquari quadrato totius AB.

Demonstratio.

QVadratum enim AB, æquatur quadratis AC, CB & rectangulo c ACB bis sumpto; eodem modo quadratum CB, æquale est quadratis CD, DB, & rectangulo CDB, bis sumpto; denique & quadratum DB æquale est quadratis DE, EB, & rectangulo DEB bis sumpto. collectis igitur in vnum quadratis AC, CD, DE, EB, & rectangulis ACB, CDB, DEB bis sumptis, exsurget quantitas, quadrato AB æqualis. Quod fuit demonstrandum.

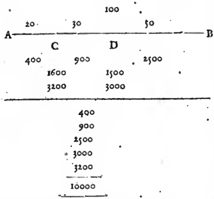
c 4. Secundi.

Corollarium.

HInc colligere licet; quod de duabus rectis lineis, quomodocumque diuisis etiam secundùm dissimillimas rationes, iudicium ferre debeamus. Ex discursu enim posito in demonstratione huius propositionis constat; quadrata partium cuiuscumque lineæ, cum rectangulis bis simul sumptis, quæ sub partibus fiunt, secundùm tenorem propositione contentum, æqualia esse quadrato totius; vnde eam proportionem habere necessarium est quadrata partium vnius, simul cum rectãgulis bis sumptis, ad quadrata omnia partium alterius, cum rectangulis suis bis sumptis, quam ipsamet quadrata totarum inter se obtinent. Quod admiratione non caret, cùm vna quantitatum, in paucissimas partes possit diuidi, altera verò in quamplurimas.

Hoc etiam quod subiungam, ignorantibus Geometriam maximè, videbitur parum credibile; si datum numerum verbi gratia 100. quis iubeatur, secum tacitus in plures pro libitu partes partiri, deinde singularum partium quadrata, in vnam summam collecta, seponat; quæ summæ, ex multiplicationibus partium inter se, secundùm sensum propositione contentum, coniuncta, certum quendam numerum sibi computarit. Alter verò Geometriæ gnarus, sponsione cum eo facta, certet se diuinaturum eum numerum, quem supputatione facta, in codicillis conscripserit. Vt res etiam tyronum captui magis accommodetur; eam fusiùs nonnihil deducam.

Ponatur



Ponatur numerus 100. expositus, diuisus in quotuis partes; verbi gratia in A C, C D, D B. sitque A C partium 20: C D, partium 30: residuum igitur partium 50. iubetur singulas partes multiplicare per seipsas; producent hæ multiplicationes tres summas; quarum prima 400. secũda 900. tertia 2500. partes continebit. Vlterius iubetur A C, multiplicare per numerum C B. hoc est 20. per 80. & emergit summa 1600. quæ bis sumpta, excrescit ad summam 3200. Denique hoc facto, etiam numerum C D ducere in D B. & exsurget summa 1500. quæ bis sumpta efficit numerum 3000. tandem colligit hæc producta in vnam massam, cuius sũmma est 10000. quam Geometra discursu propositionis iam positæ, sola multiplicatione numeri 100. per 100. factam illico manifestam habebit, scilicet 10000.

PROPOSITIO LXII.



SI fuerit A B linea, diuisa vtcunque punctis C D. Dico rectangulum sub A B, & composita ex A C D B; vnà cum rectangulo sub C D, & composita ex A C D B; æquale esse rectangulis B C A, D B C, A D B, C A D, simul sumptis.

Demonstratio.

a 1. Secundi. Rectangulum super A B, & composita ex A C D B, æquale [a] est rectangulis C A B, D B A; id est rectangulis A C B, A D B, vnà cum quadratis A C, D B; id est æquale rectangulis C D B, A C D B, D C A, B D C A, vnà cum quadratis A C, D B. Rursum rectangulum super C D, & composita ex A C D B, æquale est rectangulis A C D, C D B: igitur rectangulum super A B, & composita ex A C D B, vnà cum rectangulo super C D, & composita ex A C D B, æquale est rectangulis, C D B, A C D B, D C A, B D C A, A C D, C D B, vnà cum quadratis A C, D B. Iterum rectangulum B C A, æquale est rectangulis D C A, B D C A; item D B C rectangulum, æquale est rectangulo B D C, vnà cum quadrato D B; item A D B rectangulum, æquale est rectangulis C D B, A C D B; denique rectangulum, C A D, æquale est rectangulo A C D, vnà cum quadrato A C; igitur rectangula B C A, D B C, A D B, C A D, æqualia sunt rectangulo sub A B, & composita ex A C D B, vnà cum rectangulo sub C D, & composita ex A C D B. Quod erat demonstrandum.

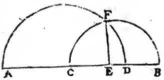
PROPOSITIO LXIII.

REctam A B, diuisam vtcunque in C D, iterum in E diuidere, vt A E D rectangulum, æquale sit rectangulo B E C.

Con-

Constructio & demonstratio.

SVper AD, CB vt diametris, circuli describantur, AFD, DFC. qui occurrant sibi mutuo in F: tum ex F recta demittatur FE, normalis ad lineam AB. Dico punctum E, satisfacere petitioni. patet; cùm tam AED, quàm BEC rectangulum æquale [a] sit quadrato FE. igitur lineam AB, vtcumque in C & D diuisam, iterùm secuimus in E; &c. Quod erat faciendum.



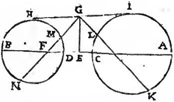
a 35. Tertij.

PROPOSITIO LXIV.

LIneam AB diuisam vtcunque in C, D. iterum diuidere in E, vt CEA rectangulum, æquale sit rectangulo DEB.

Constructio & demonstratio.

DEscribantur super AC, DB lineis, vt diametris, circuli AIC, BHD: quos in H & I contingat linea HI; quâ bifariam in G diuisa, demittatur ex G linea GE, normalis ad rectam AB. Dico punctum E, esse quod quæritur. secetur BE linea in F, vt EF quadratum sit æquale rectangulo DEB. & per F, ex G ducatur recta GN, occurrens circulo DHB in M, & N: & ex G ducatur altera GK, occurrens circulo AIC in L & K, factâ constructione vt priùs. Quoniam per constructionem, EF quadratum, æquale ponitur rectangulo DEB; & HG recta est tangens, erit FG quadratum, æquale [b] rectangulo MGN; sed FG quadratum æquale est quadratis EG, EF, igitur & MGN rectangulum æquale est quadratis, EG, EF: id est quadrato EG, vnà cum rectangulo DEB; eodem modo ostendetur LGK rectangulum, æquari quadrato EG, vnà cum rectangulo AEC. Vnde, eùm æqualia sint rectangula LGK, MGN, dempto communi quadrato EG, erunt AEC, DEB rectangula, inter se æqualia. Diuisimus igitur lineam AB in E, &c. Quod erat faciendum.



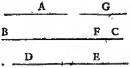
b Pappi L. 7. pr. 159.

PROPOSITIO LXV.

DAtæ sint duæ lineæ A & BF. oportet BF lineæ, quandam FC adijcere, vt quadratum A ad BCF rectangulum datam habeat rationem D ad E.

Constructio & demonstratio.

FIat vt D ad E, sic A quadratum, ad quadratum G; dein FB lineæ quædam adiungatur FC, vt BC, G, FC, tres sint in continua analogia: quod fiet si data differentia extremarum BF. & media G. inueniantur extremæ FC, CB per Andersonium & alios. Dico factum esse quod petitur. Quoniam BC, G. FC lineæ sunt conti-



F nuæ

nuæ proportionales, erit B C F rectangulum, æquale quadrato G: igitur quadratum A est ad rectangulum B C F vt A quadratum, ad quadratum G; id est per constructionem vt D ad E. Igitur rectæ B F quandam addidimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LXVI.

DAtæ lineæ A B, inæqualiter in C diuisæ, quandam B D adiicere, vt B D A rectangulum, æquale sit quadrato C D.

Constructio & demonstratio.

A E C B D

Fiat A E æqualis C B. & fiat quadrato C B æquale rectangulum E C B D. Dico factum esse quod petitur. Sunt enim per constructionem continuæ D B, B C, C E, & quia A E æqualis est C B, erunt & B D, D C, D A [a] continuæ proportionales: vnde C D quadrato æquale est rectangulum B D A. addidimus igitur rectam. Quod erat faciendum.

a 13. Huius.

PROPOSITIO LXVII.

A B C D

E F G H

SI fuerit A ad B, vt C ad D, & E ad F, vt G ad H. Dico A H rectangulum, ad rectangulum B G, eam habere rationem, quam habet C F rectangulum, ad rectangulum D E.

Demonstratio.

b 23. Sexti. Ratio rectanguli A H, ad B G rectangulum, est composita ex ratione A ad [b] B, & ex H ad G. Sed etiam ratio C F rectanguli, ad rectangulum D E, composita est ex ratione C ad D, id est per constructionem A ad B; & ex F ad E, id est H ad G. igitur rectangulum A H, ad rectangulum B G, eam habet rationem, quam C F rectangulum, ad rectangulum D E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

A B C D

E F G H

SI A, B, C, D lineæ fuerint in continua ratione, sint autem & aliæ quatuor E, F, G, H in continua analogia; Dico A H rectangulum, ad rectangulum D E, rationem habere triplicatam eius, quam habet B G rectangulum, ad rectangulum C F.

Demonstratio.

c Ibid. d 10. Defin. Quinti. e 23. Sexti.

Ratio rectanguli A H, ad rectangulum E D, [c] composita est ex ratione A ad D, id est, ex triplicata [d] ratione B ad C, quia A, B, C, D continuæ sunt proportionales & ex H ad E, id est ex triplicata ratione G ad F; sed B G rectangulum, ad rectangulum C F, rationem habet compositam ex [e] B ad C, & ex G ad F; igitur rectangulum A H, ad rectangulum D E, rationem habet triplicatam, eius quam habet D E rectangulum, ad rectangulum C F. Quod erat demonstrandum.

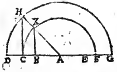
PRO-

PROPOSITIO LXVII.

SI AB, AC, AD lineæ fuerint continuæ, quibus æquales fiant AE, AF, AG, in directum;

Dico DCG rectangulum, ad CBF rectangulum, esse vt DA ad BA.

Demonstratio.



CEntro A, interuallis AC, AD, semicirculi describantur DHG, CKF, erectâque ex C normali CH, ducatur recta AH, occurrens circulo CKF in K, iunganturque BK, vt AC ad AD, sic AK ad AH, sed vt AC ad AD sic AB est ad AC per constructionem; igitur vt AB ad AC, sic AK ad AH; adeoque BK, HC lineæ sunt parallelæ, & BK recta, normalis ad lineam AC: quare DCG rectangulum, est ad rectangulum CBF, vt HC quadratum, ad quadratum KB, id est in duplicatâ ratione lineæ HC ad KB, id est AC ad AB, id est vt AD, linea ad lineam AB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

SI fuerint quotcunque lineæ continuæ proportionales AB, CB, DB, EB, FB, GB.

A C D E F G B

Dico rectangula ABDE, CBDE, CBEF, DBEF, DBFG, EBFG in continua esse analogia; & quidem in ratione AB ad CB.

Demonstratio.

REctangulum enim ABDE ad rectangulum CBDE, est vt AB [a] linea, ad lineam CB; & CBDE rectangulum ad rectangulum CBEF, est vt [b] DE ad EF, id est, vt AB ad CB; Rursum rectangulum CBEF, ad rectangulum DBEF, est vt CB ad DB, id est AB ad CB. (quia AB, CB, DB, &c. ponuntur continuæ, & DBEF rectangulum, ad rectangulum DBFG, est vt EF ad FG, id est iterum AB ad CB; & sic de ceteris. Igitur rectangula ABDE, CBDE, CBEF, &c. in continua sunt analogia, & quidem in ratione AB ad CB. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. Sexti.
[b] Ibid.

PROPOSITIO LXIX.

SI fuerint tres ordines continuè proportionalium A, B, C, D. E, F, G, H. I, K, L, M. & AF rectangulo æquale fiat quadratum N: & R quadratum æquale rectangulo EK; sit autem & IF rectangulo, æquale quadratum O, & EB rectangulo, quadratum S. dein & rectangulo CH, æquale quadratum P; & T quadratum, æquale rectangulo GM; denique rectangulo LH, æquale quadratum Q, & GD rectangulo, quadratum V;

Dico quadratum N esse ad quadratum P, vt est quadratum S, ad quadratum V: & R quadratum, ad quadratum T, vt O quadratum ad quadratum Q.

Demonstratio.

A.	B.	C.	D.
E.	F.	G.	H.
I.	K.	L.	M.
N.	P.	S.	V.
R.	T.	O.	Q.

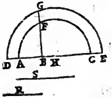
Qvadratum enim N ad quadratum P, id est per constructionem, AF rectangulum, ad rectangulum CH rationem habet a compositam, ex A ad C, id est per hypothesim ex duplicata ratione A ad B; & ex F ad H, id est duplicata ratione E ad F; sed ratio quadrati S ad quadratum V, id est per hypothesim rectanguli EB, ad rectangulum GD, etiam componitur ex ratione B ad D, id est duplicata ratione A ad B, & ex ratione E ad G, id est duplicata ratione E ad F, igitur vt quadratum N ad quadratum P: sic quadratum S ad quadratum V. Eodem modo ostenditur quadratum R, ad quadratum T esse, vt quadratum O, ad quadratum Q. Quod erat demonstrandum.

a 23. Sexti.

PROPOSITIO LXX.

Sit AC linea diuisa inæqualiter in B, oportet vtrimque rectas æquales adijcere AD, CE, vt ABC rectangulum, ad rectangulum DBE, datam habeat rationem, R ad S.

Constructio & demonstratio.



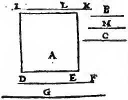
Descripto super AC, vt diametro, semicirculo AFC, erigatur ex B, normalis BF; & fiat vt R linea ad S. lineam, ita BF quadratum, ad quadratum BG, tum centro communi H, interuallo HG, describatur semicirculus DGE occurrens AC lineæ productæ in D & E. Dico AD, CE, lineas satisfacere petitioni. Rectangulum enim ABC, æquale est quadrato b FB, & GB quadrato, æquale est rectangulum DBE: igitur rectangulum ABC, est ad rectangulum DBE, vt FB quadratum, ad quadratum BG, id est linea R ad lineam S per constructionem. datæ igitur lineæ AC rectas æquales vtrimque adiecimus; &c. Quod erat præstandum.

b 35. Tertij.

PROPOSITIO LXXI.

Dato quadrato A, & lineâ DF, vtcunque in E diuisâ, exhibere rectam, quæ diuisa secundùm rationem DE ad EF, exhibeat quadratum sub tota, vnà cum rectangulo sub segmentis, ad quadratum A, in data ratione B ad C.

Constructio & demonstratio.



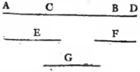
Inuentâ M, mediâ inter B & C, fiat vt quadratum B ad quadratum M, ita DF quadratum vnà cum rectangulo DEF, ad quadratum G, deinde vt G linea, ad DF lineam, sic latus quadrati A fiat ad quandam IK; quæ ita secetur in L, vt DF est diuisa in E. Dico IK lineam esse quæsitam. Quoniam est vt G linea, ad lineam DF, sic latus quadrati A ad rectam IK, erit inuertendo, permutando, DF ad IK, vt G ad latus quadrati A. Rursum eùm IK, DF lineæ proportionaliter sint diuisæ,

diuisæ, erit vt IK ad DF sic LK ad EF. Est autem ratio rectanguli ILK ad rectangulum DEF, [a] composita ex ratione IL ad DE, & LK ad EF, id est ex duplicata ratione IK ad DF, item quadratum IK ad quadratum DF, duplicatam habet rationem, eius quam habet IK linea, ad lineam DF; igitur, erit ILK rectangulum vnà cum quadrato IK ad rectangulum DEF vnà cum quadrato DF, in duplicata ratione IK ad DF. & quia est vt DF ad G sic IK ad latus quadrati A, erit vt rectangulum DEF vnà cum quadrato DF, ad quadratum G, sic ILK rectangulum vnà cum quadrato IK, ad quadratum A. sed per constructionem est DEF rectangulum vna cum quadrato DF, ad quadratum G, vt quadratum B ad quadratum M, id est vt linea B ad lineam C, igitur rectangulum ILK vnà cum quadrato IK, est ad quadratum A, vt B ad C. Vnde dato quadrato A, &c. Quod erat faciendum.

[a] 23. Sexti.

PROPOSITIO LXXII.

Esto AB linea diuisa vtcunque in C, oportet eam augere rectâ BD, vt ACB rectangulum, ad rectangulum ADB, datam habeat rationem E ad F.

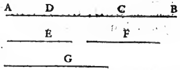


Constructio & demonstratio.

Fiat vt E ad F, sic ACB rectangulum ad G quadratum; deinde datâ mediâ G, & excessu extremarum AB, inueniantur extremæ AD, DB per Andersonium & alios. Dico factum esse quod petitur: est enim vt E ad F, sic ACB rectangulum, ad quadratum G. sed quadrato G, per constructionem æquale est rectangulum ADB, igitur vt E ad F, sic ACB rectangulum, ad rectangulum ADB; datæ igitur lineæ AB, quandam adiecimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LXXIII.

Datam rectam AB diuisam in C vtcunque, iterum in D secare, vt DAB rectangulum, ad rectangulum DCB, datam habeat rationem E ad F.



Constructio & demonstratio.

Fiat vt E ad F, sic AB linea ad lineam G, dein AB secetur in D, vt AD sit ad DC, sicut CB est ad G. Dico factum esse quod petitur.

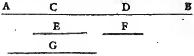
Ratio DAB rectanguli, ad rectangulum DCB, composita est ex ratione AB ad CB, & AD ad DC, id est per constructionem CB ad G. sed etiam ratio [b] AB ad G, id est E ad F, componitur ex ratione AB ad CB, & CB ad G, igitur rectangulum DAB ad rectangulum DCB, eam habet rationem quam AB linea ad G, id est E ad F; rectam igitur AB in D secuimus, &c. Quod erat faciendum.

[b] Defin. 5. sexti.

PROPOSITIO LXXIV.

Rectam AB diuisam vtcunque in C, iterum secare in D, vt ABD rectangulum, ad quadratum CD, datam habeat rationem E ad F.

Constructio & demonstratio.



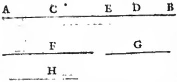
Fiat vt E ad F, sic AB ad G. dein AB secetur in D, vt DB, DC, & G lineæ sint continuæ. Dico fa-

ctum esse quod iubetur. Ratio enim rectanguli A B D, ad quadratum C D, componitur ex ratione A B ad C D, & D B ad C D, id est ex ratione C D ad G. sed & ratio lineæ A B ad G (id est E ad F per constructionem) composita est ex ratione a A B ad C D, & ex C D ad G, igitur A B D rectangulum ad quadratum C D, eam habet rationem, quam E ad F. diuisimus ergo A B lineam in D, &c. Quod erat faciendum.

a 5. Defin. sexti.

PROPOSITIO LXXV.

Lineam A B diuisam vtcunque in C & D, iterum diuidere in E, vt E A C rectangulum ad rectangulum E B D, datam habeat rationem F ad G.

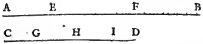


Constructio, & demonstratio.

Fiat vt A C ad D B, sic F ad H, & A E ad E B, vt H ad G. Dico factum esse quod iubetur. Ratio lineæ F ad G b composita est ex ratione F ad H, & H ad G; sed ratio E A C rectanguli, ad rectangulum E B D, composita est ex c ratione A C ad D B, id est per constructionem F ad H, & ex A E ad E B, id est H ad G, igitur vt F ad G, sic E A C rectangulum, ad rectangulum E B D. Diuisimus igitur lineam A B in E, &c. Quod erat faciendum.

b 5. Defin. sexti.
c 23. Sexti.

PROPOSITIO LXXVI.



Sint A B, C D, diuisæ quomodocunque; Dico quadrata partium A B, vnà cum rectangulis A E B, E F B bis sumptis, ad quadrata partium lineæ C D, vnà cum rectangulis C G D, G H D, H I D bis sumptis, eam habere rationem quam A B quadratum ad quadratum C D.

Demonstratio.

Demonstratum est A B d quadratum æquari quadratis partium lineæ A B vnà cum rectangulis A E B, E F B bis sumptis, quemadmodum etiam de quadratis partium C D eiusque rectangulis C G D, G H D, H I D bis sumptis; patet ergo ea inter se illam obtinere rationem quæ inter quadrata A B C D reperitur.

d 61. Huius

PROPOSITIO LXXVII.

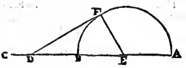
Datarum duarum alteram ita secare, vt sectæ partes cum insecta, in continua sint analogia.

Propositionem hanc demonstratam inuenies in libro nostro de progressionibus geometricis propos. 36. duplici methodo: lubet aliâ tamen praxi hic eandem expedire.

Con-

Constructio & Demonstratio.

SInt AB, BC lineæ quarum alteram BC, ita oporteat partiri in D. vt sint in continua ratione, AB, BD, DC: diuisâ AB bifariam in E, fiat rectangulo super datis ABC contento, vnà cum quadrato dimidiæ, EB æquale quadratum ED, cadet punctum D, inter C & B, cùm EC quadratum sit æquale [a] quadrato BE vnà cum rectangulo ACB; quod maius est rectangulo ABC: adeoque & EC quadratum maius quadrato BD. Dico itaque peractum quod postulatur: constituto enim super AB semicirculo AFB, ducatur tangens FD, iungaturque FE ad centrum; erit itaque quadratum DE, quadrato DF, hoc est [b] rectangulo BDA; vnà cum quadrato EB, hoc est quadrato EF æquale. Adeoque rectangulum ADB, vnà cum quadrato EB, ipsi ABC cum eodem quadrato æquabitur, ablato igitur communi quadrato BE remanet ADB rectangulum, æquale ABC rectangulo, quare AD est ad AB, vt est BC ad DB. & vt AB ad BD, ita DB ad DC; sunt igitur CD, DB, BA in continua ratione; igitur datarum duarum alteram ita secuimus, &c. Quod erat faciendum.



a 6. Secundi.

b 35. Tertij.

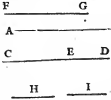
PROPOSITIO LXXVIII.

DAtarum duarum alteram ita partiri, vt rectangulum sub indiuisa & altera parte diuisæ, ad quadratum residuæ, datam habeat rationem.

Constructio, & demonstratio.

P*Ropositionem quam prius particularem soluimus in ratione æqualitatis, conabimur quoque vniuersaliter soluere.*

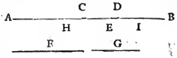
Sint igitur, AB, CD, lineæ, oporteatque diuidere CD, in E. vt rectangulum AB DE, ad quadratum CE, rationem habeat datam H, ad I. Fiat vt H ad I, sic AB ad FG; dein CD diuidatur in E, vt ED, EC, FG sint continuæ per præcedentē. Dico factum esse quod petitur. erit enim rectangulum super ABED, ad quadratum CE, vt idem ABED rectangulum, ad rectangulum FGED, id est vt AB, ad FG, id est per constructionem vt H ad I. Diuisimus igitur lineam CD, &c. Quod erat faciendum.



Huius Propositionis aliam inuenies demonstrationem in libro nostro de progressionibus. Propos. 37.

PROPOSITIO LXXIX.

DAtam AB sectam in C & D, ita secare in E puncto, inter C & D constituto, vt rectangulum AED, ad CEB rectangulum; datam obtineat rationem quadrati F, ad G quadratum.



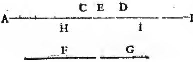
Con-

Constructio & demonstratio.

Diuidatur AD in H: & CB in I bifariam: & recta HI diuisa sit in E vt sit HE ad EI, sicut est F ad G. Dico rectangulum AED, ad CEB rectangulum habere rationem quadrati F, ad G, quadratum.

Huius rei demonstrationem reperies libro de parabola. Ex cuius proprietatibus est eruta.

PROPOSITIO LXXX.



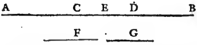
Datam iterum AB, sectam vtcunque in C & D, denuo partiri in E, vt rectangulũ AEC ad BED datam rationem cõtineat quadrati F, ad G.

Constructio & demonstratio.

Diuidantur vt priùs rectæ AD, CB, in H, & I punctis bifariam; quo facto diuidatur HI recta in E, secundùm proportionem G, ad F. Dico rectangulum AEC, ad BED rectangulum, datam habere rationem quadrati F, ad G quadratum.

Huius quoque demonstrationem inuenies eodem libro de parabola.

PROPOSITIO LXXXI.



Datam denuo AB, diuisam vtcunque in C & D, iterum diuidere in E, vt rectangulum ACE, ad BDE rectangulum, datam obtineat rationem quadrati F ad G.

Constructio & demonstratio.



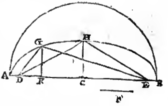
Fiat vt AC ad DB, ita HI, ad KL; & vt F ad G, ita IM ad KN, tandem fiant in continuata analogia HI, MI, OI; & similiter KL, NK, PK: denique diuidatur CD in E, secundùm rationem IO ad KP: Dico factum quod requiritur. Rectan-
a 23. Sexti. gulum ACE, ad BDE, [a] habet rationem compositam ex AC, ad DB, hoc est HI, ad KL, & ex ratione CE ad ED, hoc est OI, ad KP. Igitur rectangulum ACE, ad BDE eandem obtinet rationem, quam rectangulum HIO ad LKP; sed HIO ad LKP, eandem habet rationem, quam quadratum IM ad KN, (ex constructione enim sint tres in continua analogia tam IO, IM, IH, quàm KP, KN, KL.) hoc est quàm quadratum F, ad G, quadratum; Igitur rectangulum ACE, ad BDE, eandem rationem continet, quam F quadratum, ad G quadratum. Perfecimus igitur quod imperatum fuit.

PROPOSITIO LXXXII.

Datâ basi, aggregato laterum, & altitudine trianguli, exhibere triangulum.

Con-

Constructio & demonstratio.

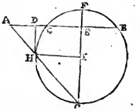


Dato laterum aggregato, æqualis ponatur AB; quā bifariam diuisā in C, fiat DE æqualis basi trianguli, bifariam diuisæ in C, & altitudini æqualis ponatur F; ex lateribus AC, CB, DE, fiat triangulum DHE; nam AC, CB simul sumptæ maiores sunt DE. erit igitur DHE Isosceles: deinde fiat vt HC quadratum, ad quadratum F, sic ACB rectangulum, ad rectangulum AKB, & erigatur KG æqualis ipsi F, parallela HC, iunganturque DG, GE. Dico DGE triangulum esse quæsitum. Demonstrationem huius inuenies libro de ellipsi Propos. tat.

PROPOSITIO LXXXIII.

Datam AB sectam in C, diuidere in D, vt quadratum AD, æquale sit CDB. rectangulo.

Constructio & demonstratio.



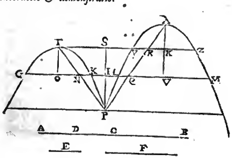
Diuisa CB in E bifariam, ponatur ex E normalis EG, æqualis ipsi AE; iunctisque AG, describatur per C, B, G, puncta circulus CBG, occurrens EG lineæ in F: diuisaque FG bifariam in I, agatur per I recta IH parallela ipsi CB, occurrens AG lineæ in H puncto; ex quo normalis erigatur HD, occurrens CB lineæ in D. Dico factum esse quod petitur: cùm enim HI parallela sit ipsi AE, ponanturque AE, EG lineæ æquales, erunt & HI, IG quoque inter se æquales, & H communis intersectio linearum HI, HG cum circulo. Vnde & HD eundem contingit in H: estque CDB [a] rectangulum æquale quadrato HD, id est AD. Diuisimus igitur AB lineam, &c. Quod erat faciendum.

[a] 35. Tertij.

PROPOSITIO LXXXIV.

Datam rectam AB sectam in C, denuo partiri in D, vt quadratum AD, ad rectangulum BDC, datam obtineat rationem.

Constructio & demonstratio.



Data sit ratio E ad F, & fiat rectangulū aliquod GIK, quod ad rectangulum LIM rationem eandem cū ratione E ad F contineat; hoc facto ponatur quædam IS, orthogonalis ad GM, & inuentā IN mediā inter KI, IG; diuidatur KG bifariam in O, & erigatur OT parallela IS, donec concurrat cum TS, quæ æquidistet GM, in T: & iungatur TN, quæ SI producta occurrat in P. Deinde inuentā mediā IQ inter LI, & IM, ducatur recta PQ, occur-

rens

rens T S protractæ in R. tandem diuidatur L M bifariam in V, & erigatur V X æquidistans T O, concurrens cum P Q in λ; & fiat vt Vλ quadratum, ad quadratum Xλ, ita quadratum V L, ad Xγ quadratum: Dico T Z lineam diuisam esse in S, γ, secundùm rationem postulatam; vnde si diuidatur A B in D, & C. vt est diuisa T Z, in S, & γ; habebitur ratio quadrati A D, ad C D B rectangulum, in ratione E ad F. quod fuit postulatum. Vlterius non pergo in demonstratione huius rei, cùm non sit huius loci; sed eam reperies libro de parabola Geometricè tractatam, & perfectam.

Libri primi finis.

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER SECVNDVS

DE PROGRESSIONIBVS GEOMETRICIS.

AD LECTOREM.

PRæsens liber, quem de progreſſionibus Geometricis inſcribimus, omnino neceſſarius eſt ad ſternendam viam, quam inimus circulo ad quadratum reducendo: non ita ta men hoc velim intelligas, vt omnes omnino propoſitiones, quę in toto eius decurſu reperiuntur, ad eum finem requiri credas; ſed quod ſine vſu huius libri, quoad partes maximè principales, difficulter ad ſcopum peruenire quis poſſit: exigebat autem libri argumentum, ad doctrinæ formam vel leuiter ſaltem concinnari, & cognatis materijs exornari, ne fætum imperfectum ederemus. Idem de ſequentibus libris iudicium ferre dignabere.

ARGVMENTVM.

PLurimi de hoc argumento Speculationes non tantùm Theorematicas, verùm etiam Problematicas conſcripſerunt: ſed omnes, prout ex libris huc vſque conſcriptis cognoſcere potui, Arithmeticas materias concernentes, in medium attulerunt: quas authoribus ſuis omnino intactas relinquo; mei enim instituti eſt progreſſiones tractare Geometricas, non Arithmeticas: & per illas cognoſcere quantitatum omnis ſpeciei magnitudines, ſiue illæ in lineis, ſiue ſuperficiebus, vel etiam ſolidis exhiberi debeant. Occaſionem huic conſiderationi ſubminiſtrarunt nonnulla, cùm in Archimede, tum in Euclide loca, quæ iubent in conſtructione Geometrica, auferri (verbi gratia,) ab aliqua quantitate dimidium, & huius iterum dimidij dimidium, & pro clauſula adſertur, & hoc ſemper fiat. *Titillauit me hæc particula, & coëgit moroſiore cogitatione circa hæc verſari: tandem poſt longas vexas intellectus, ea quæ mihi inciderũt, tibi benigne Lector communico, vt quæ huic materiæ deſunt ſupplere digneris. Illam etenim ſolùm direxi ad cognoſcendas quantitates, quas instituto meo neceſſarias eſſe arbitratus ſum: communi enim Geometriâ, quam à vete-*

ribus accepimus, non existimaui posse quempiam viam sibi sternere, ad problemata soluenda, quæ à Mathematicis per tot sæcula desiderantur: vnde nouas artes & methodos nouas inditam excogitandas, quæ supplerent Geometriæ antiquæ defectus; dignaberis itaque benigne Lector, boni hæc consulere, & cùm aduerteris, multa hic esse quæ incudi reddi debeant, vtpote malè tornata; memineris velim ita scientias in orbem esse ingressas; primò mutilas & inconcinnas, quas multorum tandem manus ad perfectum nitorem reduxerunt; facili etenim negotio inuentis quidpiam addi potest, plura quippe vident oculi, quàm oculus; qui domini sui iussu certis terminis se continere cogitur.

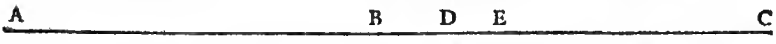
In quatuor partes partimur hunc tractatum, quo distinctiùs procedamus, & captui tyronum magis inseruiamus.

Prima inseruiet contemplationi progressionum inchoatarum, siue necdum terminatarum, quod terminus progressionum nondum in considerationem adducatur. quid autem sit Progressio Geometrica, quis eius terminus, & his similia, patebit ex sequentibus. Sed tribus verbis conabimur præsentis partis nomenclaturam explicare.



Detur quæuis ratio A ad B; & petatur tertia proportionalis ad has duas quantitates, exhibeaturque tertia C: continuatio trium horum terminorum dicetur esse progressionis interminatæ; eo quod possit vlteriùs procedi in eadem serie: nam si dentur tres quantitates D, E, F, & addatur quarta G, quæ continuet eandem rationem D ad E, progressio terminorum D, E, F, G, vlterius est producta, quàm sit progressio terminorum A, B, C: cùm hæc consistat in duabus rationibus; illa verò in tribus. Porro hac methodo procedendo, continuò auctis rationibus, augetur progressio; manet interim semper interminata. Hæc igitur pars prima non perget vlterius, & sistet in sola consideratione Progressionis huius, quam vocamus interminatam, ad distinctionem alterius, quæ tota exhaurietur, ac proinde terminabitur seipsâ. varijs igitur proprietatibus inchoatæ progressionis in medium allatis, subsequitur

Secunda pars, quæ tota versabitur circa progressionem terminatam, absolutam, siue exhaustam; atque hoc vniuersim in quocunque genere quantitatis: indagando scilicet cuiuscunque rationis, si in infinitū censeatur continuata, magnitudinem, seu quantitatem. neque velim quis in animum inducat, nos materiam ingredi, quæ placitis philosophorum contradicat: imò ostendemus luce clarius, hâc nostrâ methodo dissolui etiam grauissimas difficultates, quibus in Gymnasijs & Philosophorum Lycæis solent in materia quantitatis inuicem esse molesti. Quod vt exemplo vno manifestiùs explicetur, subeat memoria argumenti, quod Achilles Zenonis nominatur, quo omnem motum eliminare ex orbe se posse contendebat: omnibusque studebat persuadere, falli oculos, dum quid loco moueri arbitrarentur; argumento ad id formato duorum, quæ mouerentur; Achillis scilicet velocissimè currentis, & testudinis tardissimè reptantis.



Ponatur, inquiebat ille, Achilles cursor pernicissimus, ex A puncto, testudinem pergentem per semitam BC tardissimo motu, velle assequi suo cursu: Quo tempore Achilles tendit ex A in B, mota est testudo ad aliquod spatium, perueniens in D; igitur necdum Achilles assecutus est testudinem: iterum quo tempo-

re

re ex B. Achilles currit, ut assequatur testudinem existentem in D, mota est testudo perueniens ad E punctum; igitur nondum assecutus est testudinem, atque hoc in infinitum continget; igitur nunquam assequetur Achilles testudinem. Argumentum hoc Zenonis facillimè expedietur per ea, quæ secundâ huius libri parte adferemus; nam ex doctrina illius partis, non solùm manifestum fiet, Achillem peruenturum ad testudinem, sed ipsum punctum assignabitur in quo apprehensio testudinis futura est.

Tertia Pars huius libri versabitur circa progressiones terminatas, planorum præsertim similium, quæ commodiora sunt ut ad doctrinæ seriem reducantur: ut si datis duobus quadratis in ratione maioris inæqualitatis, quis requirat superficiem exhiberi, quæ æqualis existat magnitudini, quam tota illa series quadratorum produceret, orta ex progressione rationis primi quadrati ad secundum, & huius secundi ad tertium, & sic in infinitum: atque ut idipsum familiariùs exponam, ponatur quis equum generosissimum velle à quopiam mercari, qui vulgi opinione mille aureis æstimatur: cumque mille aurei eidem non sint ad manum, hac sponsione contrahit, se post mensem centum aureos ei donaturum; post secundum verò mensem quinquaginta, post tertium verò vigintiquinque, atque ita deinceps; post singulos menses, perpetuo censu dimidium dimidij pretij pendat eius, quod postremo mense creditori persoluerit: tandem pertæsus molestiarum, conetur pacisci cum eodem, offerendo ducentos aureos pro residuo, ut ab illo censu sese expediat, quis horum duorum tali contractu decipitur; emptorne an venditor? huius & similium quæstionum solutiones, doctrina tertiæ partis huius libri, liquidissimè expediet: & assignabit, quæ post singulos menses summa sit residuè debiti; imò & si quis postularet nosse qualis summa residua esset futura, post centesimum, imò millesimum mensem, Geometricâ certitudine ex præsentis Partis scientia cognoscet.

Quarta Pars totam doctrinam prioribus partibus explicatam corporibus solidisque applicabit: spero huius tractatus argumentum non fore illis ingratum, qui communi Geometria exculti sunt; admiranda enim Theoremata huius libri notitiâ eruuntur, & Problemata (quæ communi Geometria difficili methodo soluuntur) praxi commodissimâ expediuntur: sine adminiculo enim huius libri nulla esset huius operis lucubrationum certitudo, quæ maxima ex parte huic fulcimento innixa est.

DEFINITIO PRIMA.

GEometricam ſeriem voco quantitatem finitam, diuiſam ſecundùm continuationem cuiuſcunque rationis datæ.

Explicatio.

QVamuis ſenſus,quem verba indicant obſcurus non videatur, nihilominus mentem meam circa definitionem præſentem cenſui apponendam: ponatur itaque linea quæuis A B, diuiſa in C, ſecundùm quamcumque proportionem; & fiat quemadmodum eſt tota A B ad C B, ita C B ad D B, & denuo vt C B ad D B, ita

A C D E F G B

D B ad E B, & hoc ſemper fiat. Oritur in hac ratione procedendi duplex conſideratio; prima, rationis A B ad C B, & C B ad D B, & vlterius D B ad E B, atque ita deinceps: altera rationis A C ad C D, & C D ad D E, iterum D E ad E F, & ita conſequenter; & licet hæ conſiderationes videantur diuerſæ, in vnum tamen ſcopum collimant: nam cùm ratio A B ad C B, & C B ad D B, eadem ſit cum ratione A C ad C D, & C D ad D E, atque ita vlteriùs, ſi fiat rectæ A C æqualis H I & hæc H I,

H K L M I

diuidatur in punctis K, L, M, ſecundùm rationem A B ad C B, & C B ad D B, &c. tunc apparebit ratio, qua duæ iſtæ conſiderationes in vnam coaleſcunt; ſi quis igitur petat, quid velim intelligi nomine ſeriei? reſpondeo me nomine ſeriei, totam illam continuationem linearum intelligere, quarum prima eſt A C, ſecunda C D, ita vt ratio A C ad C D, eadem ſit cum illa quam obtinet C D ad D E, atque ita deinceps terminatam eodem termino, quo terminatur ratio A B ad C B, &c. Et quia in definitione, particula adiuncta eſt *finitam*; hinc hoc loco explicare cogor ſeriem per rationes A B ad C B, & C B ad D B, & ita conſequenter, cùm necdum demonſtratum ſit quo puncto lineæ A C D terminus exiſtat ſeriei rationis A C ad C D. nam pluſquam notum eſt, apud philoſophos, nunquam perueniri poſſe ad terminum continuationis, per partes proportionales A C ad C D, & C D ad D E, cùm reſidua ſemper remaneat quantitas diuidenda, ſecundùm eaſdem rationes; quare terminus, hoc tenore progrediendi acquiri nequit: ſed ſi quis procedat iuxta conſiderationem continuationis A B ad C B, & C B ad D B, & ſic in infinitum, ſemper includit terminum, ad quem per continuationem rationis A C ad C D, perueniri nequit; ſeriem itaque voco, quantitatem finitam A B, diuiſam ſecundùm continuationem rationis A C ad C D, & C D ad D E. quæ eadem ſemper exiſtit cum ea quæ fit continuando rationes A B ad C B. Quotieſcunque igitur occurret mentionem fieri continuationis alicuius ſeriei A C ad C D, & C D ad D E; ſubeat animo continuationem hanc finitam eſſe, & totam illam terminorum infinitorum collectionem, alibi terminatam eſſe: quę collectio ſeries alicuius rationis Geometricæ nuncupatur.

DEFINITIO SECVNDA.

PRogreſſio Geometrica eſt quotcunque terminorum ſecundùm eandem rationem continuatio.

Explicatio.

EſT itaque omnis progreſſio pars ſeriei, cùm vt explicatum eſt, omnis ſeries ſit continuatio alicuius rationis eouſque producta, donec ampliùs protrahi nequeat, modo priùs explicato; Progreſſio verò prout differt à ſerie, propriè interminata eſt; ac proinde eius pars: vbi tamen inueneris in contextu ſequentium, agi de tota progreſſione rationis alicuius continuata, de ſerie agi memineris, neque enim hæc magis ſcru-

ſcrupuloſè obſeruari volo, quàm à Geometris omnibus ſeruatur nomenclatura proportionis, vel rationis;quarum licet altera in duobus terminis conſiſtat,altera in pluribus,nihilominus,pro arbitratu ſcribentis,paſſim confunduntur.Sint igitur hæc præmiſſa,ſi non exactarum definitionum loco, ſaltem vberioris explicationis ſupplemento. Datis itaque A & B: vel ratio A ad B eſt maioris inæqualitatis,vel prorſus æqualitatis, vel minoris inæqualitatis: quod ſi fiant cõtinuæ proportionales A B C D. huiuſmodi continuatio progreſsio vocetur, quotcunque tandem termini exſtant.

A B C D

A B C D

A B C D

Progreſsio verò Geometrica iam explicata duplex eſt;alia continua, alia diſcreta. Continua eſt cùm omnes termini rationem connectentes,habent rationem antecedentis, & conſequentis; vt in ſcemate rationum explicatarum, ſi fuerit quemadmodum A ad B, ita B ad C; & quemadmodum B ad C, ita C ad D, atque ita in quouis tandem numero terminorum; huiuſmodi progreſsionem continuam voco.

Diſcreta progreſsio eſt ſimilium rationum ſecundùm aliquam continuationem poſitio, vt conſequentes non fiant antecedentes. exempli cauſa; ſi fiat quemadmodum A eſt ad B, ita C ad D. & B fuerit minor quam A, vel C, talem progreſsionem in quotlibet tandem terminis conſtituta ſit, voco diſcretam; etiam in his terminis 1 2. 5,10. 3,6, 8,16. Vbi diſcreta ratio valde interrupta eſt, quia eſt continuatio ſimilium rationum.

A B C D

DEFINITIO TERTIA.

Terminus progreſſionis eſt ſeriei finis, ad quem nulla progreſſio pertinget, licet in infinitum continuetur; ſed quouis interuallo dato propiùs ad eum accedere poterit.

Explicatio.

A C D E F G B

Ponatur recta A B, diuiſa in C D E F G. vt contineant eandem rationem A B, C B, D B, E B, F B, G B. Cùm ſit eadem ratio A C ad C D, & C D ad D E, atque ita deinceps, cum ea, quæ reperitur inter lineas A B, C B, D B, &c. ſimilis quoque erit eiuſdem rationis progreſsio A C ad C D, cum progreſsione A B, ad C B. terminus autem rationis A C ad C D, dicitur punctum B, ſiue illum intrinſecum velis, ſiue extrinſecum, per me licet; nam de re nobis eſt hîc quæſtio, non de verbo: ad quod punctum nulla progreſsio pertingere valet, cùm omnis progreſsio interminata pars ſeriei exiſtat: nihilominus tamen, poterit ad illum progreſſio per continuationem magis ac magis accedere, ita vt vicinior vltimus terminus progreſſionis interminatæ exiſtat ipſi termino ſeriei, quàm ſit diſtantia quæcunque propoſita.

An autem talis detur terminus progreſsionis, & quo pacto inueſtigari debeat, libro ſecundo huius tractatus diſceptabitur, illud interim inſinuatũ hoc loco deſidero, huiuſmodi terminum ſolùm reperiri in ijs progreſsionibus,quę proportionem maioris inæqualitatis continuant, nam earum progreſsionum quæ vel terminis ſemper æqualibus conſtant, vel certè terminis minoris inæqualitatis, nullum aſsignari poſſe terminum,manifeſtum nimis eſt, quàm vt explicatione indigeat; quandoquidem dictæ progreſsiones, ſi continuentur, magnitudinem quauis data maiorem exhibere natæ ſint. Itaque ſecundo libro, tertio, & quarto, in quibus progreſsiones iam terminatæ conſi-

confiderantur, nullæ proponentur, præter eas, quæ maioris erunt inæqualitatis: in primo verò, quoniam illic à termino adhuc abstrahitur, etiam progreßiones æqualitatis, & minoris æqualitatis contemplabimur. Terminus igitur progreßionis talis est, quemadmodum explicuimus, cùm scilicet aggregatum, siue summa terminorum progreßionis, quantumuis continuatæ, numquam excedit quandam magnitudinem; excedit verò omne minus illa magnitudine, atque ita posset etiam dici productum siue quantitas totius, datæ progreßionis, & magnitudo illa æqualis diceretur toti progreßioni datæ; hoc est omnibus terminis proportionalibus simul sumptis. Idem igitur quoad rem erit, siue terminum quærere progreßionis, siue magnitudinem toti progreßioni parem, siue ipsammet integram seriem progreßionis exhibere. sed hæc meliùs propositione quinta, secundæ partis, huius libri, percipi poterunt. Si quid prætereà pertinebit ad terminorum explanationem, in decursu operis exponetur.

PRO-

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM

PARS PRIMA

Progreßiones conſiderat indeterminatas.

PROPOSITIO PRIMA.

Continuè proportionalium differentiæ ſunt in continua analogia eiuſdem rationis ſuorum integrorum.

A B C D E F G

Sint magnitudines continuæ proportionales A G, B G, C G, D G, E G, F G. oſtendendum eſt A B, B C, C D, D E, E F differentias in continua eſſe analogia ſuorum integrorum, & contrà ſi A B, B C, C D, &c. fuerint continuæ, & F G addatur vt A G, B G, A B, B C ſint proportionales; Dico & A G, B G, C G, &c. eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.

QVoniam A G eſt ad B G, vt B G ad C G: erit diuidendo vt A B ad B G, ſic B C ad C G: & permutando A B ad B C, vt B G ad C G, ſiue vt A G ad B G. Similiter B G eſt ad C G, vt C G ad D G: & diuidendo B C ad C G vt C D ad D G, & permutando B C eſt ad C D, vt C G ad D G, id eſt vt B G ad C G, id eſt vt A G ad B G. atqui erat vt A G ad B G, ſic A B ad B C, ergo B C eſt ad C D vt A B ad B C. Continuæ ſunt igitur proportionales A B, B C, C D, & quidem in analogia ſuorum integrorum A G, B G. ſimili ratione oſtendam reliquas cum his tribus eſſe continuas: quod erat primum.

Sint iam A B, B C, C D, &c. continuæ, quibus addita ſit F G, ſic vt A G ſit ad B G vt A B ad B C. Dico omnes A G, B G, C G, D G, &c. eſſe in continua analogia differentiarum. Quia vt A B ad B C, ſic A G ad B G, ergo permutando & diuidendo, & rurſum permutando vt A B ad B C, hoc eſt ex datis vt A G ad B G, ſic B G ad C G. quoniam autem iam B G eſt ad C D, vt A G ad B G, hoc eſt ex datis vt A B ad B C, hoc eſt rurſum ex datis vt B C ad C D, eodem planè diſcurſu oſtendemus B G, C G, D G eſſe continuas, & quidem in ratione B C ad C D, hoc eſt A B ad B C. Quare cùm etiam A G, B G, C D ſint in eadem ratione continuæ, omnes quatuor A G, B G, C G, D G erunt in ratione A B ad B C continuæ. ſimiliter oſtendemus & reliquas cum iiſdem eſſe continuas. Patet igitur veritas propoſitionis.

PROPOSITIO II.

SI quatuor fuerint quantitates in continuata analogia, erunt aggregata ex prima & ſecunda, ex ſecunda & tertia, ex tertia & quarta, in continua proportione.

A B C D E

Demonſtratio.

SVnto quatuor in continua analogia A B, B C, C D, D E. Dico etiam A C, B D, C E, eſſe continuè proportionales. cùm enim ſit vt A B ad B C, ita B C ad C D,

 erit

a 12. Quinti. erit[a] vtraque antecedens AC, ad vtramque consequentem BD, vt AB ad BC, vnà antecedens, ad vnam consequentium: similimodo quia BC ad CD, est vt CD ad DE, erit vtraque antecedens BD, ad CE vtramque consequentem, vt BC ad CD, id est vt AB ad BC, hoc est vt AC ad BD. Sunt igitur AC, BD, CE in continua analogia quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO III.

A C D B
E

SIt AB diuisa in C & D. vt ratio AB ad AC duplicata sit eius, quam habet BD ad DC.

Dico AC, AD, AB, tres esse in continua ratione.

Demonstratio.

POnatur AE, media inter AB, & AC; igitur tres erunt continuæ quantitates AC, AE, AB. quare per primam huius erit ratio AB ad AE, eadem cùm ratione BE ad EC. sed ratio AB ad AC, duplicata est rationis AB ad AE, igitur & ratio AB ad AC duplicata est rationis BE ad EC. quare diuisa est CB in E, vt diuisa est eadem CB in D: ac proinde punctum D, vnum idemq; est cum puncto E. Vnde cùm sint tres continuæ proportionales AC, AE, AB, ex constructione, erunt quoque in continuata ratione AC, AD, AB. Quod demonstrandum fuit.

PROPOSITIO IV.

QVod si AB, AC, AD, sint quantitates proportionales: Dico AD ad AB, rationem eius habere duplicatam, quam habet DC ad CB.

A B C D

Demonstratio.

RAtio enim AD ad AB, duplicata est rationis AD ad AC, sed per primam huius vt AD ad AC, ita quoque est DC ad CB, igitur ratio AD ad AB duplicata est rationis DC ad CB: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

A	D
B	E
C	F

SInt tres continuæ proportionales A, B, C, sit autem ratio A ad B, triplicata eius, quam habet D ad E: ratio quoque B ad C, triplicata rationis E ad F.

Dico D, E, F quantitates, in continua fore analogia.

Demonstratio.

CVm ratio A ad B, sit eadem cum ratione B ad C; igitur etiam ratio B ad C triplicata est rationis D ad E. est autem & ratio B ad C ex suppositione triplicata eius quam habet E ad F; igitur ratio D ad E, est eadem cum ratione E ad F. Sunt igitur in continuata proportione D, E, F. Quod demonstrandum fuit.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Sit A ad BK in minore ratione, quàm C ad D.

Dico A ad EI mediam proportionalem inter A & BK, esse in minori ratione, quàm sit C ad F mediam inter C & D.

Demonstratio.



Fiat enim A ad BG in ratione C ad D, erit a BG minor quàm BK. Et fiat inter A & BG media EH, erit quoque EH minor quàm EI. Rursum quia A ad BG, duplicatam habet rationem A ad EH, & C ad D eamdem ex constructione habet rationem, quam A ad BG; habebit etiam C ad D rationem duplicatam eius, quam habet A ad EH: sed & C ad D duplicatam habet eius, quam C ad F; igitur ratio C ad F, eadem est cum ratione A ad EH; sed EI ostensa est maior quàm EH, igitur A ad EI b minorem habet rationem, quàm A ad EH, id est quàm C ad F. Quod erat ostendendum.

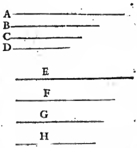
a 10. Quinti.
b 8. Quinti.

Corollarium.

Simili modo demonstrabitur si plures mediæ inter primam & secundam, & inter tertiam & quartam ponantur, fueritque in prioribus maior proportio vel minor primæ ad secundam, quàm in posterioribus tertiæ ad quartam; fore etiam in prioribus primæ ad primam mediarum, vel secundam, aliamque quamcumque maiorem vel minorem proportionem, quàm tertiæ ad similem ordine mediam inter posteriores.

PROPOSITIO VII.

Sint duo ordines continuè proportionalium A, B, C, D, & E, F, G, H: & maior sit ratio A ad B, quàm E ad F.



Dico maiorem quoque esse rationem A ad C tertiam, vel D quartam, quàm E ad G tertiam, vel H quartam.

Demonstratio.

Cum enim sit eadem ratio A ad B, quæ B ad C, & C ad D; Similiter F ad G ratio, & G ad H eadem, quæ est E ad F, sitque A ad B maior ratio, quàm E ad F; erit etiam tam B ad C quàm C ad D maior ratio, quàm F ad G, aut G ad H: & proinde erit A ad c C maior ratio, quàm E ad G: & similiter B ad D maior ratio, quàm F ad H; & A ad D maior quàm E ad H: quæ erant demonstranda.

c 12. Quinti.

PROPOSITIO VIII.

Sint tres magnitudines AC, AB, AF; & FE æqualis ſit CB.

Dico ſi AC minima trium, & CB minor differentia, & BE, vtriuſque differentiæ, differentia ſint continuè proportionales, ipſas quoque magnitudines AC, AB, AF eſſe in continua ratione.

A C B E F

Demonſtratio.

a 3. Secundi. b 1. Secundi. c 17. Sexti. d 4. Secundi. e 17. Sexti.

Rectangulum FAC [a] æquatur rectangulo FCA vnà cum quadrato CA, rectangulum autem FCA æquatur [b] rectangulo ACB, & rectangulo AC BE (id eſt [c] quadrato CB, cum AC, CB, BE ponantur continuæ) ac præterea rectangulo AC EF; id eſt ACB, quia æquales ſunt CB, EF: igitur rectangulum FAC æquatur quadratis AC, CB, & rectangulo ACB bis, hoc eſt quadrato [d] AB; ſunt [e] igitur tres proportionales magnitudines AC, AB, AF. Quod erat demonſtrandum.

Aliter.

Vt BC ad CA, ſic EB ad BC, id eſt EF: igitur componendo vt BA ad CA, ſic BF ad EF, hoc eſt BF ad BC: ergo permutando & componendo FA ad BA, vt BA ad CA. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

A C B E F

Si autem AC, CB, EF fuerunt proportionales, & BE æqualis CB minori differentiæ, erunt rurſum AC, AB, AF continuæ proportionales. Demonſtratio eadem eſt, quę propoſitionis iam poſitæ.

PROPOSITIO IX.

Sint in continua analogia AB, AC, AD, & minori differentiæ BC, æqualis ſit ED.

Dico minimam AB, & minorem differentiam BC, deinde & CE, vtriuſque differentiæ differentiam, eſſe proportionales.

A B C E D

Demonſtratio.

f 3. Secundi. g 1. Secundi.

Rectangulum DAB [f] æquatur rectangulo DBA, & quadrato AB: rectangulum autem DBA [g] æquatur rectangulis ABC, & AB ED, id eſt rurſus rectangulo ABC (ſunt enim ED, BC lineæ æquales) & rectangulo AB CE: ergo rectangulum DAB, æquatur quadrato AB, & rectangulo ABC bis, & prætereà rectangulo ABCE; quadratum verò AC, æquatur quadrato AB, rectangulo ABC bis, & quadrato BC: Atqui cùm AB, AC, AD ponantur continuæ proportionales,

h 17. Sexti.

erit rectangulum [h] DAB æquale quadratò AC; ergo quadratum AB, rectangulum ABC bis, & rectangulum ABCE ſimul ſumpta, æquantur quadrato AB, rectangulo ABC bis, & quadrato BC ſimul ſumptis. Itaque demptis communibus quadrato AB, & rectangulo ABC bis, æqualia remanent quadratum BC, & rectangulum ABCE; quare AB, [i] BC, CE, ſunt tres continuæ proportionales. quod erat demonſtrandum.

i Ibidem.

Aliter.

Aliter.

QVoniam D A, C A, B A ponuntur proportionales, ergo per primam huius D C ad C B est vt C A ad B A: quare (cùm æquales sint D E, B C ex hypothesi) vt C D ad E D, sic C A ad B A, ergo diuidendo C E ad E D, hoc est, C B, vt C B ad B A. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

A B C E D

QVod si positis continuè proportionalibus A B, A C, A D, sumatur C E, æqualis minori differentiæ B C, erunt A B, B C, E D in continua analogia: quod demonstrabitur prorsus eodem modo quo propositio iam posita.

PROPOSITIO X.

SInt tres magnitudines A B, A C, A D, in continua analogia; ponantur autem maxima trium A D, & maior differentia C D, dein & tertia quæpiam E D, continuæ proportionales.

Dico B C, C E, æquales esse lineas.

A B C D
E

Demonstratio.

CVm tres ponantur continuæ A B, A C, A D, erit D C ad [a] C E, vt D A ad C A: [a 1. Huius] quare [b] rectangulum D C A rectangulo D A B C, æquale est. Similiter cùm [b 16. Sexti] ponantur continuæ AD, CD, ED, est A C ad C E, [c] vt A D ad C D: ergo rectan- [c 1. Huius] gulum idem A C D æquatur etiam rectangulo A D C E. rectangula ergo A D B C, A D, C E, inter se æquantur; vnde B C, [d] C E æquales sunt. quod erat demonstrandũ. [d 1. Sexti]

Aliter.

QVandoquidem ponantur continuæ A B, A C, A D, ergo per primam huius vt D A ad C A, sic D C ad C B. Iterùm quoniam ponuntur continuæ A D, C D, E D; per primam huius vt A D ad C D, sic A C ad C E; & permutando vt A D ad A C, sic C D ad C E. Sed vt A D ad A C, sic ostendi esse C D ad B C; ergo C D est ad C E, vt C D est ad B C. æquales igitur sunt B C, C E. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

A B C E D

SImili planè modo, si positis continuis A B, AC, A D, etiam A D trium maxima, C D maior differentia, & tertia quæpiam C E fuerint continuæ proportionales. Dico B C, E D æquales esse. Demonstratio eadem est quę propositionis decimæ.

PROPOSITIO XI.

SInt A B, A C, A D in continua analogia, & minori differentiæ B C æqualis sit C E.

Dico E D, C D, A D in continua quoque analogia esse.

A B C E D

Demonstratio.

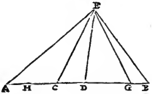
A B C E D

a 1. Secundi. b 1. Secundi. Rectangulum A D E æquatur [a] rectangulo A E D cum quadrato E D: rectangulum autem A E D, æquatur rectangulo [b] D E C, & D E C B, hoc est rursus rectangulo D E C (cùm C E, C B sint æquales) & rectangulo D E B A. Sed per corollarium nonæ huius, A B, B C, E D sunt continuę, ergo rectangulum E D A B æquale est quadrato B C, hoc est quadrato E C. rectangulum igitur A E D æquatur rectangulo D E C bis, & quadrato E C. quare rectangulum A D E æquatur rectangulo
c 4. Secundi. D E C bis, & quadratis E C, E D, hoc est [c] quadrato C D. Vnde A D, C D, E D sunt tres continuæ proportionales, quod erat demonstrandum.

Aliter.

QVoniam D A, C A, B A ponuntur continuæ, erit per primam huius D A ad C A, sicut D C ad C B, id est C E: quia æquales sunt ex datis B C, C E: Itaque diuidendo vt D C ad C A, sic D E ad E C: & inuertendo vt A C ad C D, ita C E ad E D, & componendo vt A D ad C D, sic C D ad E D. Quod erat demõstrandum.

Corollarium.



EX hac propositione educitur hoc Theorema. Sint A B, C B, D B proportionales, erigatur autem ad angulũ quemcunque recta B E, æqualis ipsi C B, iunganturque puncta A E, C E, D E. Dico A E C, C E D angulos esse æquales: & si A E C, C E D anguli fuerint æquales, & C B linea æquetur rectę B E, dico A B, C B, D B esse proportionales: si verò A E C, C E D anguli æquentur, & A B, C B, D B sint proportionales; dico C B, E B lineas esse æquales.

Demonstratio.

d 7. Sexti. QVoniam ponitur vt A B ad C B, hoc est B E, sic B E ad D B, & angulus A B E sit communis, erit D E B [d] triangulum, A E B triangulo simile, adeoque angulus D E B angulo E A B æqualis. Rursum cùm C B, E B latera æquentur, erunt
e 32. Primi. anguli C E B, E C B æquales; est autem angulus E C B, æqualis [e] duobus angulis E A C, A E C, igitur angulus C E B ęquatur duobus angulis A E C, E A C: sed D E B æqualis ostensus est angulo E A C; demptis igitur æqualibus E A C, D E B, manent A E C, C E D reliqui æquales.

Sint iam anguli A E C, C E D & C B, B E lineæ æquales, dico A B, C B, D B
f Ibid. esse continuas. Quoniam angulus E C B hoc est C E B ęquetur angulis E A C, [f] A E C; & C E D ponatur æqualis ipsi A E C, erit D E B reliquus reliquo E A C æqualis: est autem angulus A B E communis; ergo tertius tertio ęquatur, adeoque & A E B, D E B triangula similia: vnde vt A B ad E B hoc est C B, ita E B siue C B ad D B. Quod erat secundum.

Iam verò sint A E C, C E D anguli ęquales, & A B, C B, D B tres continuę proportionales: dico C B, E B lineas æquari: si enim non sint ęquales, sit C B maior, fiatque C G ipsi B E æqualis. erunt igitur per secundã partem huius propos. A G, C G, D G
g 11. Huius. continuę proportionales. vnde si fiat H C æqualis ipsi C D, erunt tam [g] A G, A C, A H; quàm A B, A C, A H continuę proportionales; igitur tam A G A H rectangulum, quàm A B A H rectangulum, æquale quadrato A C medię communi: quare
h 14. Sexti. A G A H, A B A H rectangula æquantur inter se. Vnde vt A H, ad A H [h] sic A B ad A G: sed A H sunt æquales, ergo A G, A B rectæ ęquantur, & G punctum idem est quod punctum B: & C B, C G, id est B E lineæ æquales. eodem modo ostenditur C B non esse minorem ipsâ B E.

PRO-

PROPOSITIO XII.

DEntur tres lineæ in continua ratione A B, B C, C D, ita vt B C sit maior A C, & fiat rectæ A C æqualis B E.

Dico A B, B E, E D esse proportionales.



Demonstratio.

CVm ponantur in continua analogia A B, B C, C D, igitur erit vt B C [a] ad C D ita A C, hoc est ex constructione B E ad B D. Ergo diuidendo vt B D ad D C, ita E D ad D B; & inuertendo vti C D ad B D, ita se habet B D ad D E. Quare [b] B D quadratum æquatur E D C rectangulo; quadratum autem [c] B E æquale est quadratis B D, D E, & rectangulo E D B bis sumpto: atqui rectangulum A B E D æquatur iisdem: nam rectangulum A B E D, æquatur E D C [d] rectangulo (hoc est, vt ostendi, quadrato B D) & rectangulo E D A C (hoc est rectangulo B E D, id est rursum [e] quadrato E D cum rectangulo E D B, & rectangulo insuper E D B, rectangulum itaque A B E D, cùm iisdem æquale sit, æquabitur B E quadrato: patet igitur A B, [f] B E, E D esse in continua analogia, quod demonstrandum fuit.

a 21. Huius.
b 17. Sexti.
c 4. Secūdi.
d 1. Secundi.
e 3. Secundi.
f 17. Sexti.

PROPOSITIO. XIII.

POnantur A B, B C, C D, tres lineæ in continua proportione; & fiat B C æqualis D E.

Dico A E, E C, C D, esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVandoquidem ponuntur esse continuæ proportionales lineæ A B, B C, C D, etiam erunt continuæ proportionales A B, D E, C D; & B C mediæ æqualis D E erit quadratum D E rectangulo A B C D æquale. quadratū autem [g] C E æquatur C D, D E quadratis, & rectangulo C D E bis sumpto: quibus etiam æquatur rectangulum A E C D nam rectangulum A E C D æquatur E C D rectangulo (hoc est quadrato [h] C D cum rectangulo C D E) & rectangulo D C B, hoc est (quia ex constructione B C, D E æquantur) iterum rectangulo C D E & rectangulo insuper A B C D, (id est, vt modò ostendimus, quadrato D E) quare rectangulum A E C D cùm iisdem æquale sit, quadrato C E æquari necesse est: adeoque C D, C E, E A esse in continua analogia. Quod erat demonstrandum.



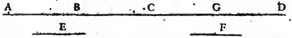
g 4. Secundi.
h 3. Secundi.

PROPOSITIO XIV.

SInt A B, A C, A D, in continua analogia; & fiat vt A B ad B C, ita B C ad E lineam; & vt A D ad D C, sic D C fiat ad F.

Dico E & F esse inter se æquales.

Demonstratio.



QVoniam supponuntur continuæ A B, A C, A D, si fiat D G æqualis B C, erunt continuæ [i] A B, B C, C G, ergo cùm ex datis etiam sint in continua ratione, A B, B C,

i 19. Huius.

AB, BC, & E, erit linea E æqualis CG: deinde quia continuæ sunt AB, AC, AD,
a 11. Huius. si fiat BC æqualis GD, erunt quoque in continua analogia [a] CG, DC, DA: ponuntur autem continuæ AD, DC & F; erunt igitur continuæ F, DC, AD; est igitur F æqualis CG: vnde F & E quoque sunt æquales, vtpote ipsi CG æquales. Quod erat propositum demonstrare.

Lemma.

DAti sint duo ordines trium quantitatum CA, BA, DA & CF, EF, GF; & sit vt CA ad DA, sic CF ad GF, sitque item vt BA ad DA, sic CF ad EF. Dico etiam esse CA ad BA, vt EF est ad GF.

Z

A D B C E G F

Demonstratio.

SI enim non est CA ad BA, vt EF ad GF, erit ergo aliqua maior vel minor, quàm CA, nempe Z ad BA, vt EF est ad GF; quoniam ergo vt CF prima ad EF secundam, ita in altero ordine BA secunda est ad DA tertiam, & vt EF secunda ad GF tertiam, ita in ordine altero Z prima, est ad BA secundam, ergo ex
b 23. Quinti. æquo in proportione perturbata, vt CF ad GF, ita Z [b] ad DA: atqui ex hypothesi etiam CA erat ad DA, vt CF ad GF, ergo vt CA ad DA, sic Z (maior vel mi-
c 8. Quinti. nor quàm CA) est ad DA, quod est [c] absurdum: non est igitur CA ad BA, in alia proportione, quàm EF ad GF.

PROPOSITIO XV.

SInt proportionales AB, AC, AD; & linea BD composita ex vtraque differentia BC, CD, diuidatur bifariam in F, ac mediæ proportionali AC, æqualis sit producta AG.

Dico FC, FB, FG in continuata esse proportione.

G A B C D
F

Demonstratio.

CVm enim GC bisecta sit in A, & BD in F, erit CG ad AG, vt BD ad FD. præterea cùm AB, AC, AD ponantur continuæ, erit per primam huius BC ad CD, vt AB ad AC, id est AG; & componendo vt BG ad AG, ita BD ad CD: sed ante ostenderamus esse vt CG ad AG, ita BD ad FD. Quare per lemma præcedens etiam erit vt CG ad BG; ita CD ad BF, hoc est FD; & diuidendo CB ad BG, vt CF ad FD, hoc est FB; Itaque inuertendo, permutando, & componendo erit vt GF ad BF, ita BF ad CF; ergo GF, BF, CF sunt proportionales. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

G A E B C D F

EX hac propositione hoc Theorema deducimus. Sint tres proportionales AB, BC, CD, diuisaque sit AB bifariam in E. Dico AE, EC & compositam ex AE & lineis BC, CD bis sumptis, esse proportionales, & si AE, EC, & composita ex AE & BC, CD lineis bis sumptis, sint continuæ; dico AB, BC, CD esse in continua analogia.

Demon-

Demonstratio.

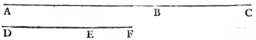
PRoducatur CD in F, vt DF linea æquetur BD compositæ: BA verò producatur in G, vt GA, BC æquentur. Quoniam GA, BC lineæ sunt æquales, erunt a DC, DB, DG continuæ proportionales. Rursum cùm GA æquetur rectæ BC, & AE ipsi EB sit æqualis, erit GC in E bifariam quoque diuisa: est autem DF æqualis ipsi BD per constructionem; ergo EB, EC, b EF, hoc est AE, EC, & composita ex AE & BC CD bis sumptis, sunt continuæ proportionales. quod erat primum. a 8. Huius. b 15. Huius.

2. Quoniam EB, EC, EF sunt continuæ, & EC lineæ æquatur EG. & BF linea ex construc. sit in D bifariam diuisa, erunt DC, DB, c DG continuæ: quare & AB, BC, CD tres erunt d continuæ proportionales. quod erat demonstrandum. c Ibid. d 9. Huius.

PROPOSITIO XVI.

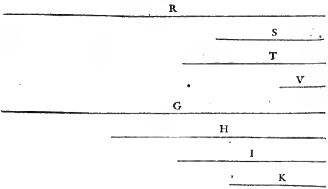
SI sit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam, erit vt prima cum secunda ad tertiam, ita omnes quatuor ad primam cum tertia; vel vt prima cum secunda ad secundam, ita omnes quatuor ad secundam cum quarta.

Demonstratio.



ESto AB ad BC, vt DE ad EF, dico esse AC ad AB, vt aggregatum ex AC & DF ad aggregatum ex AB, DE. Cùm enim sit AB ad BC, vt DE ad EF, erit inuertendo & componendo AC ad AB, vt DF ad DE: quapropter erit etiam vtraque antecedens AC, DF e ad vtramque consequentem AB, DE, vt vna antecedens AC ad AB vnam consequentem, quod erat propositum. e 12 Quinti.

Corollarium.



SI igitur ex quatuor proportionalibus fiat vna ęqualis omnibus quatuor, verbi gratiâ R: & fiat altera S æqualis primæ, ac tertiæ, & tandē recta T exhibeatur æqualis primæ & secundæ: denique si ponatur V æqualis primæ, erit R ad S, vt T ad V: similiter si omnibus quatuor fiat æqualis G, & secundæ cum quarta, æqualis H, & primæ cum secunda æqualis I, & secundæ æqualis K, erit vt G ad H, sic I ad K. res hæc à

 Pappo

Pappo lib. tertio propositione decimaseptima in tribus continuè proportionalibus proposita fuit; quæ cùm vniuersalis sit, censuimus etiam hoc ipsum verbo indicandum ad ampliorem vsum.

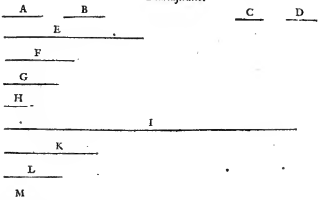
PROPOSITIO XVII.

Sit A æqualis B, & C æqualis D; omnibus autem A, B, C, D, ponatur æqualis E; duabus verò B, D, ponatur æqualis F: similiter duabus C, D, æqualis G; & rectæ D, æqualis H.

Dico rationem E ad F, & G ad H esse duplam. Quod si rectis E, F, G, H, æqualis ponatur I, & duabus F & H, æqualis statuatur K, & lineis G, H, æqualis ponatur L, denique residuæ H, fiat M æqualis;

Dico rationem I ad K, & L ad M esse triplam.

Demonstratio.



A cum B, dupla est ipsius B; & C cũ D, ipsius D dupla est: ergo etiam A, B, C, D simul sumptæ, duarum B, D, simul sumptarum duplæ sunt. Sed lineis A, B, C, D æqualis est E, & lineis B, D, æqualis F, ergo E dupla est F: similiter C, D, simul sumptæ, hoc est G, ipsius D, id est H, sunt duplæ. Quod erat primum. Secundam partem ita expedimus. E continet rectam A bis, & C bis; ipsa verò F continet A semel, & C semel: ipsa tandem G continet C bis; & H æqualis est C; igitur omnes E, F, G, H, hoc est recta I, continet A terriò, & rectam C sexies: recta verò K, continet ex hypothesi F, & H; sed F continet B & D, hoc est ipsam A semel, & semel rectam C, igitur si addatur H, hoc est C, recta K erit semel A, & C bis sumptam. sed A sumpta semel, cum C bis, est tertia pars A lineæ ter sumptæ, & lineę C sexies sumptæ: ratio ergo I ad K tripla est. Eodem modo ostendemus quod L, sit tripla lineę M, nam L æqualis est G, H; ipsa verò G continet bis C lineam, cui si adiungatur H, ipsi C æqualis, erit G cum H, hoc est L, tripla rectæ C, hoc estH, hoc est M: patet ergo veritas propositione exposita.

Scholion.

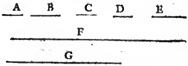
Pappus lib. 3. propositione 18. tribus continuis quantitatibus applicuit hanc materiam, quæ scilicet eandem continuant rationem; quia verò aduerti non solùm continuis rationibus conuenire hanc proportionalium proprietatem, verùm etiam discretissimis, modo rationes similes assumantur: hinc operæ pretium duxi, hoc insinuare. Notatu autem dignum existimo, si quis vlterius

terius proportiones ita conuertat, quemadmodum hac propositione fecimus, in infinitum reperiet plures ac plures subdiuisiones rationum, solâ praxi in propositione posita obseruatione.

PROPOSITIO XVIII.

SInt quæcumque & quotcumque magnitudines A, B, C, D, E; ponaturque F omnibus (præter vltimam) bis sumptis, ac vltimæ E semel sumptæ æqualis; G verò æqualis omnibus simul sumptis, denique H æqualis vltimæ E.

Dico F, G, H arithmeticam analogiam continuare.



Demonstratio.

LInea F, id est A, B, C, D, bis sumptæ, vnà cum E semel, excedit rectã G, id est A, B, C, D, E semel sumptas, excessu A, B. C, D, semel sumptis. Sed eodem excessu excedit linea G, ipsam H, quæ æqualis ponitur rectæ E, igitur F, G, H lineæ arithmeticam continuant proportionem. Quod erat demonstrandum.

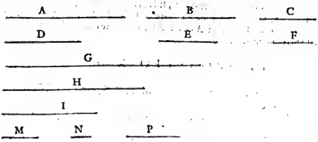
Scholion.

QVare mirum videri non debuit Frederico Commandino, Pappum, cùm lib. 3. ex Geometrica proportione, analogias, ac medietates eruit, Arithmeticas neglexisse: quandoquidem non ex Geometrica tantum sed quacumque quantitatum serie producatur; quod Pappum in cæteris sagacissimum latere potuisse vix credi potest; vel certè oportuisset Commandinum dum Pappi defectum, vt vocat, eodem libro propositione 19. supplere nititur, continuitatem Geometricam assignare, ex qua, cùm quapiam ratione Arithmeticam analogiam deduxisset, non ideò cæteris non proportionalibus quantitatibus commune esse, posset demonstrari: siquidem à problematici nitoris splendore alienum videtur, certum & determinatum quid in constructionem adhibere, cùm obuium quodlibet fuerit sufficiens. Sed hæc in gratiam antiquitatis dicta sint, quam venerari omnes deberent: illius enim sæculi virorum labores, & ingeniorum partu hucusque non vidi à recentioribus adæquata.

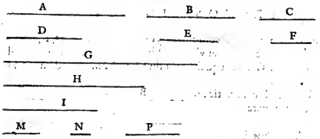
PROPOSITIO XIX.

DAtis duabus progressionibus terminorum in continua ratione Arithmetica A; B, C; D, E, F; ex vtriusque seriei terminis A, D, B, E, C F in vnum conflatis constituatur tertia series G, H, I.

Dico etiam G, H, I esse in continua Arithmetica analogia.



Demonstratio.



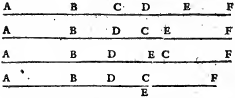
TErminorum feriei A,B,C, mutuus exceffus fit M; N, verò exceffus alterius; M autem & N fibi additi, faciant P: quoniam igitur A fuperat B exceffu M, & D fuperat E exceffu N, A & D fimul fumpti, hoc eft G, fuperabunt B & E fimul fumptos, hoc eft H, excefsibus M & N fimul fumptis, hoc eft exceffu P: fimiliter oftendemus H fuperare I exceffu P. funt igitur G, H, I in Arithmetica analogia. Quod erat demonftrandum.

PROPOSITIO XX.

ESto AB ad BC, vt BD ad DE; & fiat ipfi BC æqualis EF, vbicumque tandem cadat punctum E.

Dico effe vt AB ad AC, fic AD ad AF, & BD ad BE.

Demonftratio.



QVoniam eft vt AB ad BC, ita BD ad DE, erit componendo, conuertendo vt AB ad AC, ita BD ad BE: vlteriùs, cùm fint EF, BC æquales, erit tota AF æqualis quatuor proportionalibus AB, BC, BD, DE: & AD æqualis primæ & 116. Huius. tertiæ, vti & AC primę ac fecundæ: quare vt * AC ad AB, ita AF ad AD: & inuertendo vt AB ad AC, ita AD ad AF, & vt antè oftendimus, ita BD ad DE: quod erat demonftrandum.

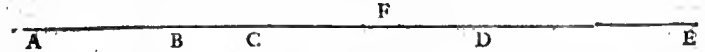
PROPOSITIO XXI.

DAtæ fint quatuor proportionales, minima AB, fecunda AC, tertia AD, quarta AE.

Dico primò DB differentiam primæ & tertiæ, minorem effe EC, differentiâ fecundæ & quartæ:

Secun-

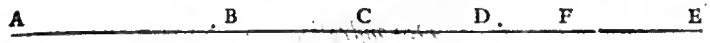
Secundò si B D minori auferatur æqualis E F, ex C E maiori, vt A B ad B D, vel vt A C ad C E, sic B C differenriam primæ & secundæ, fore ad C F differentiam differenriarum B D & C E.



Demonstratio.

CVm ex hypothesi A B sit ad A C, vt A D ad A E: igitur permutando vt A B ad A D, sic A C ad A E; & diuidendo vt A B ad B D, sic A C ad C E: igitur permutando vt A B ad A C, sic B D ad C E: atqui A B minor est quàm A C, igitur & B D minor est quàm C E. Quod erat primum. deinde ex discursu iam facto, vt A B, ad A C, sic est B D ad C E; quare cum E F ex hypothesi sit æqualis ipsi B D, erit etiam A B ad A C, vt E F ad C E; ac diuidendo vt A B ad B C, sic E F ad F C. & permutando vt A B ad E F, id est vt A B ad B D, sic B C ad C F: atqui etiam vt A B ad B D, sic est A C, ad C E, (vt antè ostendi) ergo vt A B ad B D, vel A C ad C E, sic est B C ad C F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.



DAtæ sint quatuor proporrionales, minima A B, secunda A C, rertia A D, quarra A E.

Dico primò, differentiam primæ & secundæ B C, minorem esse differentiâ D E, tertiæ & quartæ:

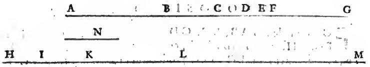
Secundò si ex E D maiori tollatur E F, æqualis minori B C, fore vt A D ad D E, sic B D differenriam primæ & tertiæ, ad D E differenriam differentiarum B C, D E.

Demonstratio.

CVm sit AB ad A C, vt A D ad A E, igitur inuertendo, diuidendo, rursumque inuertendo, vt A B ad B C, sic A D ad D E: Itaque permutando vt A B ad A D, sic B C ad D E. sed A B minor est A D, ergo & B C minor est quàm D E: Quod erat primum.

Deinde cùm modò ostensum sit, esse A B ad A D, vt B C est ad D E; & cùm F E ponatur æqualis B C, etiam A B est ad A D, vt E F ad D E. Itaque inuertendo, ac conuertendo vt A D ad B D, sic D E ad F D: ac demum permutando vt A D ad D E, sic B D ad D F. Atqui etiam vt A D ad D E, sic est A B ad B C, (vt antè ostendi) ergo vt A D ad D E, vel A B ad B C, sic est B D ad D F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.



SInt conrinui proportionalium processus A B, B C, C D, D E, E F: assumrâ vero quauis aliâ N, fiat vt A B ad N, sic N ad H I: vtque B C ad N, sic N fiat ad I K, & vt C D ad N, sic N ad K L, & sic deinceps:

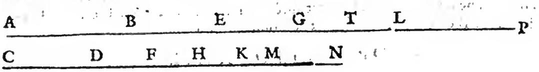
Dico H I, I K, K L, &c. esse in conrinua analogia.

Demonstratio.

EX hypothesi lineæ AB, N, HI, sunt continuæ proportionales; item BC, N, IK;
a 17. Sexti. ergo tam rectangulum ABHI quàm rectangulum BCIK ª æquatur quadrato
b 16. Sexti. N. ac proinde æqualia sunt inter se rectangula; ergo vt AB ad ᵇ BC, sic IK ad HI, similiter rectangula BCIK, & CDKL, æquantur inter se, quia eidem quadrato N, æqualia sunt; igitur vt BC ad CD, sic KL ad KI: atqui ex datis BC est ad CD, vt AB ad BC, hoc est, vt ostendi, sicut IK ad HI, ergo KL, est ad IK, vt IK ad HI: continuæ sunt proportionales igitur HI, IK, KL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

SI continuè proportionalium rectangulorum bases sint in continua analogia: erunt & altitudines in continuata proportione.



Demonstratio.

SInt AB, BE, EG, GI, IL, insuper & rectangula ABCD, BEDF, EGFH &c. in continua analogia. Dico etiam CD, DF, FH &c. esse continuè proportiona-
a 13. Sexti. les. Rectanguli enim ABCD proportio ad rectangulum BEDF, ª componitur ex rationibus AB ad BE, & CD ad DF: item rectanguli BEDF proportio ad EGFH rectangulum, componitur ex rationibus BE ad EG, & DF ad FH: quare cùm ex hypothesi rectangulorum ABCD, BEDF, EGFH, æquales siue eędem proportiones sint, erunt quoque rationes AB ad BE, & CD ad DF, simul sumptæ æquales, siue eædem cum rationibus BE ad EG, & DF ad FH simul sumptis. sunt autē ex hypothesi etiam æquales rationes AB ad BE, & BE ad EG; Quare si ab æqualibus rationibus, nempe à composita ex rationibus AB ad BE, & CD ad DF, itemque à composita ex rationibus BE ad EG, & DF ad FH, auferas æquales rationes, AB ad BE, & BE ad EG; patet reliquas proportiones CD ad DF, & DF ad FH fore æquales: vt constat ex definitione compositionis proportionum. continuę sunt igitur proportionales CD, DF, FH. Simili discursu etiam reliquæ HK, KM, &c. cum præcedentibus eandem continuabunt rationem. constat ergo quod propositum erat demonstrare.

Corollarium.

EOdem genere discursus, si rectangula ABCN, BEDN, EGFN, &c. itemque bases AB, BE, EG, &c. sint in continua analogia, demonstrabimus eorum altitudines CN, DN, FN, &c. continuam quoque seruare analogiam.

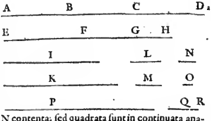
PROPOSITIO XXV.

POnantur denuo AB, BC, CD proportionales, vti etiam EF, FG, GH; & ratio AB ad EF, continuetur quomodocunque in I, K, P; & similiter ratio BC ad FG producatur in L, M, Q: & ratio CD ad GH, pergat in N, O, R, &c.

Dico etiam I, L, N, & K, M, O, item P, Q, R, continuare suam rationem.

Demon-

Demonstratio.



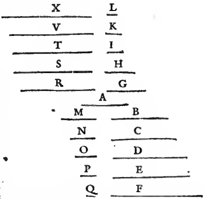
a 17. Sexti.

QVadratum enim EF est æquale rectangulo sub AB & I; & quadratum FG, æquale est rectangulo sub BC & L; vti etiam quadratum GH, rectangulo sub CD & N contento: igitur vt quadrata EF, FG, GH inter se sunt, ita etiam rectangula sub lateribus AB & I, sub BC & C, item sub CD, & N contenta: sed quadrata sunt in continuata analogia, (cùm latera super quibus fiunt ex hypothesi sint in continua analogia) igitur etiam rectangula, sub lateribus AB & I, BC & L, CD & N, sunt continuè proportionalia: cùm autem ipsorum bases ponantur in continuata ratione AB, BC, CD; etiam I, L, N, altitudines erunt in continuata analogia per præcedentē. Eodem modo quia ex hypothesi EF, FG, GH, & ex demonstratis modò I, L, N, sunt continuæ: itemque ex hypothesi EF, I, K: & FG, L, M; item G, H, N, O, continuam seruant analogiam: demonstrabimus K, M, O esse continuas. similiter quoque procedetur in lineis P, Q, R, atque ita in infinitum. constat ergo veritas propositionis.

PROPOSITIO XXVI.

SInt series continuæ proportionalium, habentes primum terminum A, communem, A, B, C, D, E, F, & A, M, N, O, P, Q; continuatâ autem serie vtriusque, fiat vt B ad A, ita A ad G, &c. & vt M ad A, ita A ad R, sic vt omnes F, E, D, C, B, A, G, H, I, K, L: item omnes Q, P, O, N, M, A, R, S, T, V, X sint in continuata analogia.

Dico esse B ad M, vt R ad G, & C ad N, vt S ad H, & D ad O, vt T ad I, &c.



Demonstratio.

CVm B, A, G, sint tres continuæ, item M, A, R, erit tam b rectangulum BG, quàm rectangulum MR, quadrato A, ideoque & inter se æqualia. Quare vt B ad M, sic c R ad G: similiter quoniam C, B, A, G, H, sunt continuæ, ita vt mediam A, æqualis vtrimque proportionalium numerus cingat: patet ex elementis, A esse mediam proportionalem, inter C & H: rectangulum igitur HC æquatur quadrato A; eodem modo rectangulum SN quadrato A æquale erit: ergo inter se æquantur rectangula HC, SN. Quare d vt C ad N, sic S ad H, simili discursu erit vt D ad O, sic T ad I, & sic de cæteris. Quod erat demonstrandum.

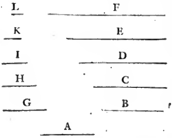
b 17. Sexti.

c 16. Sexti.

d ibid.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.



Sint duo ordines continuè proportionalium eandem habentes primam, A, B, C, D, E, F, & A, G, H, I, K, L.

Dico proportionem H ad C, esse duplicatam proportionis G ad B; & rationem I ad D, rationis G ad B esse triplicatam: & rationem K ad E, quadruplicatam: L verò ad F quintuplicatam eiusdem rationis G ad B: & sic in infinitum.

Demonstrat hanc Eucl. lib. 14. pr. 28. de quatuor continuè proportionalibus. Nos eandem de quotcunq., & aliâ planè methodo demonstrabimus.

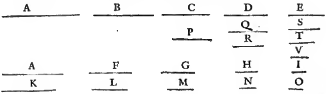
Demonstratio.

Quoniam tam A, G, H quàm A, B, C sunt continuæ proportionales, rectangu-
a 17. Sexti. lum H A, quadrato G, & rectangulum C A, quadrato [a] B æquale erit. vnde rectangulum H A, ad rectangulum C A, est vt quadratum G, ad quadratum B: itaque
b 20. Sexti. cùm quadrata G, B, sint [b] in duplicata ratione basium G ad B, erit & rectangulorum proportio duplicata, rationis G ad B: sed ratio rectanguli H A, ad rectangu-
c 1. Sexti. lum C A, est ratio [c] H ad C; ergo proportio H ad C est duplicata rationis G ad B. Deinde quoniam tam G, H, I, quàm B, C, D, sunt continuæ, erit rectangulum I G, quadrato H, & rectangulum D B, quadrato C æquale. itaque ratio rectangulorum
d 23. Sexti. I G, D B, hoc est ratio [d] composita ex proportionibus laterum I ad D, & G ad B, æqualis est rationi quadrati H, ad C: atqui ratio quadratorum H, C, est quadruplicata rationis G, B; (est enim ratio quadratorum H, C duplicata rationis H ad C, quæ ostensa modò est duplicata rationis G ad B:) ergo proportio composita ex rationibus I ad D, & G ad B, est quadruplicata rationis G ad B. ex quo patet rationem I ad D solam, esse triplicatam rationis G ad B. Simili discursu demonstrabimus rationem K ad E, esse quadruplicatam; & rationem L ad F, quintuplicatam rationis G ad B. constat ergo veritas propositionis.

PROPOSITIO XXVIII.

Sint duo ordines continuarum A, B, C, D, E; & A, F, G, H, I eandem nacti primam A: ponatur autem tertius ordo continuè proportionalium; K, L, M, N, O, secundo ordini similis; ita tamen vt A & K, sint inæquales. Deinde inter tertias C & G, ponatur media P; & inter quartas D & H, ponantur duæ mediæ Q & R; tandem inter quintas ponantur tres mediæ S, T, V, & ita deinceps.

Dico esse vt L ad B, ita M ad P, & N ad R, vt O ad V, &c.



Demon-

Demonstratio.

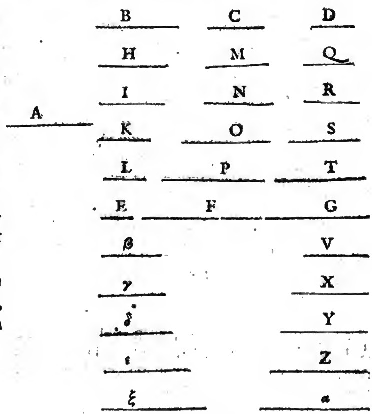
QVoniam vtriusque seriei, primus terminus idem est A, ergo per præcedentem G est ad C, in duplicata ratione F ad B: sed G etiam est ad C, in duplicata ratione G ad P, igitur G est ad P, vt F ad B: sed ex supposito F ad G est vt L ad M; igitur alternando M est ad G, vt L ad F; est igitur ex æquo M ad P, vt L ad B. Simili modo per præcedentem H ad D, triplicatam habet rationem, F ad B; sed etiam H ad D, habet triplicatam eius, quam habet H ad R; ergo vt F ad B, sic H ad R: deinde est F ad H, vt L ad N, vnde alternando, & ex æquo N ad R vt L ad B. Eadem prorsus ratione demonstrabitur esse O ad V, vt est L ad B. Quare patet veritas propositionis.

Hinc etiam patet B, P, R, V esse continuas cum L, M, N, O, sint continuæ, & quidem in eadem analogia in qua sint lineæ A, F, G, H, I. vt patet.

PROPOSITIO XXIX.

POnantur duæ series continuarum; A, B, C, D; & A, E, F, G, communem habentes primam A; & inter secundas B, E, sint quotuis mediæ H, I, K, L; totidemque inter tertias interponantur; M, N, O, P; Similiter inter quartas D & G, ponantur mediæ Q, R, S, T.

Dico A, H, M, Q; item A, I, N, R; & A, K, O, S; & A, L, P, T esse in continua analogia.



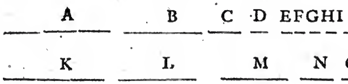
Demonstratio.

POnantur enim inter A & M, media proportionalis V; & inter A & N media X; similiter Y, Z, α, mediæ ponantur inter A, O, & A, P, & A, F. Quoniam ergo A, B, C, & A, V, M sunt continuæ proportionales, erit [a] ratio C ad M, duplicata eius, quam habet B ad V. vlterius cùm A, V, M, & A, X, N etiam sint continuæ proportionales, erit ratio [b] M ad N, duplicata eius quam habet V ad X: eodem pacto ostendetur, rationes N ad O, & O ad P, & P ad F, esse duplicatas rationum X ad Y, & Y ad Z, & Z ad α: Quare cùm C, M, N, O, P, F ponantur esse continuæ, etiam B, V, X, Y, Z, α, patet esse continuas. Est igitur ratio B ad α, quintuplicata rationis B ad V, & quia tam α, quàm E, mediæ sunt inter A & F, inter se æquales erunt; ideoque & ratio B ad α, & ratio B ad E, eadem est; ergo ratio B ad E, quintuplicata est rationis B ad V. quia autem B, H, I, K, L, E ponuntur continuæ, etiam ratio B ad E, est quintuplicata rationis B ad H; est igitur B ad V, vt B ad H. vnde æquales sunt H & V. Similiter ostendetur I & X, K & Y, L & Z æquales esse. Quare cùm ex constructione A, V, M; A X N; A Y O; A, Z, P, sint continuæ; etiam A, H, M; A, I, N; A, K, O; A, L, P continuæ erunt. Non alia ratione ostendemus, etiam ipsas A, H, M, Q; item A, I, N; R; &c. esse in continuata analogia;

[a] 27. huius.
[b] Ibid.

(Si nempe ipſis A, H, M inueniamus quartam β, & ipſis A, I, N quartam γ; & ipſis A, K, O quartam δ. & ipſis A, L, P quartam ϵ, denique ipſis A, E, F quartam ξ) demonſtrabimus eſſe vt priùs ipſas $\beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi$, ipſis Q, R, S, T, G æquales; ac proinde omnes quatuor A, H, M, Q; A, I, N, R; &c. eſſe continuas. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXX.



Dentur binæ ſeries continuè proportionalium in diuerſis rationibus; A, B, C, D, &c. K, L, M, N, &c. ita tamen vt A K, L B ſint etiam continuæ proportionales.

Dico omnes A, K, L, B, N, O : C, Q, R, D, & ſic deinceps, (omiſſo in ſerie KL tertio quoque termino M, P, S) eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.

QVIa A, K, L, B ponuntur continuæ, ergo vt K ad L, ſic L ad B: ſed etiam eſt ex hypotheſi vt K ad L, ſic L ad M, ergo L ad B, & M eandem habet rationem; æquales [a] igitur ſunt B & M. ideoque rationes [b] B ad C, M ad C æquales ſunt. Quoniam autem A, K, L, B ſunt quatuor continuæ proportionales, erit ratio A ad B, id eſt ex hypotheſi ratio B ad C, id eſt ex demonſtratione ratio M ad C, triplicata rationis A ad K: ſed ratio A ad K, ex hypotheſi eſt ratio K ad L, id eſt ratio M ad N: ergo ratio M ad C, triplicata eſt rationis M ad N: eſt autem ratio M ad P, triplicata rationis M ad N, (ſunt enim M, N, O, P continuæ) igitur vt M ad C, ſic M ad P: vnde & æquales ſunt C & P. quare cùm loco M, in ſerie ſtatuatur illi æqualis B, & loco P, illi æqualis C. erunt A, K, L, B, N, O, C continuæ proportionales. ſimiliter oſtendemus ſeriem hanc per terminos Q, R, D, &c. continuari in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

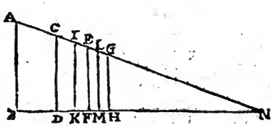
a 9. Quinti.
b 7. Eiuſdem.

Corollarium.

HInc ſequitur: rationem A ad B, triplicatam eſſe rationis, K ad L: & B ad C, triplicatam ipſius L ad M: item C ad D, triplicatam ipſius M ad N: & ſic de ceteris. nam ratio A ad B continuatur, eſtque illa triplicata rationis K ad L, quæ per reliquos terminos continuatur.

PROPOSITIO XXXI.

IN triangulo quouis A B N quatuor ponantur parallelæ A B, C D, E F, G H, in continua analogia: ac inter A B, G H, media ſit I K; inter E F verò & G H, media ſit L M:



Dico rationem A B ad I K triplicatam eſſe rationis L M ad G H.

Demonſtratio.

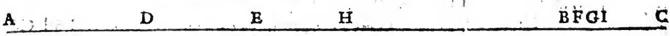
RAtio A B ad G H, duplicata eſt ex hypotheſi, rationis A B ad I K: & ratio E F ad G H, duplicata rationis L M ad G H; ergo cùm iterum, ex hypotheſi ratio A B ad G H triplicata ſit rationis E F ad G H, erit ratio A B ad I K, quæ

quæ dimidiata eſt rationis AB ad GH, triplicata rationis LM ad GH; quæ dimidiata eſt rationis EF ad GH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

QVantitas ex quotuis continuè proportionalibus compoſita, ad aliam ex pari numero terminorum eiuſdem ſeriei productæ conflatam, multiplicem rationem habet proportionis primæ ad ſecundam, ex quot terminis alterutra quantitatum componitur.

Demonſtratio.



POnatur ſeries rationis alicuius, conſtituere quantitatem AB, & ſeries vlterius producta conficiat quantitatem BC; hoc tamen pacto vt vtraque pari numero conſtet terminorum continuè proportionalium eiuſdem ſeriei productæ; verbi gratia ſi numeret AB quantitas terminos octo continuè proportionales, & BC totidem eiuſdem ſeriei productæ; dico AB ad BC, octuplicatam habere rationem eius quã AD ad DE. Cùm enim tota ſeries rationis AD ad DE, pergat vniformiter & continuè ex ſuppoſito vſque ad C, & ſint tot termini eiuſdem ſeriei in AB, quot ſunt in BC, exempli cauſa in ſingulis octo; habebit ergo prima AD ad BF, octuplicatam rationem eius, quam habet AD [a] ad DE: ſimiliter ratio DE ad FG, octuplicata eſt rationis DE ad EH, id eſt rationis AD ad DE: quare cùm rationes AD ad BF, & DE ad FG, octuplicatæ ſint eiuſdem rationis AD ad DE, erit vt AD ad BF, ſic DE ad FG: eodem modo erit vt DE ad FG, ſic EH ad GI, & ſic de ceteris. Quare omnes [b] antecedentes, id eſt octo termini qui conſtituunt AB, ſe habent ad omnes conſequentes, hoc eſt ad octo terminos qui conſtituunt BC, vt vna antecedens AD, ad vnam conſequentem BF. Quare cùm AD ad BF, rationem habeat octuplicatam rationis AD, ad DE, habebit quoque AB ad BC octuplicatam eius, quam habet AD ad DE. Quod erat demonſtrandum.

[a] Defin. 5. ſexti.
[b] 12. Quinti.

PROPOSITIO XXXIII.



INter tres continuè proportionales AD, BD, CD, mediæ ſint GD, ED: rurſum inter AD, GD, media ſit FD, & inter BD, ED, media ſit HD: & hoc ſemper fiat:

Dico eſſe vt AB ad BC, ſic AG ad BE, & AF ad BH, &c.

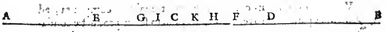
Demonſtratio.

CVm inter tres continuas AD, BD, CD, mediæ ſint GD, ED, erunt AD, GD, BD, ED, CD, (vt patet ex elementis) omnes continuæ proportionales: proindeque etiam [c] AG, GB, BE, EC erunt continuæ proportionales: ergo AG ad GB, vt BE ad EC: & componendo ac per conuerſionem rationis AB ad AG, vt BC ad BE. Igitur alternando AB ad BC, vt AG ad BE: Deinde quoniam AD, GD, BD, ED, ſunt continuæ, AD eſt ad GD, vt BD ad ED: Quare ſi inter AD, GD media ſit FD, & inter BD, ED, media HD, patet ex elementis eſſe AD ad FD, vt BD ad HD. atqui cùm AD, FD, GD, ſint continuæ, AF eſt ad FG, vt AD ad FD. per 1. huius. Et cùm BD, HD, ED ſint continuæ etiam BH eſt ad HE, vt BD ad HD, hoc eſt (ſicut iam oſtendi) vt AD ad FD, ergo AF eſt ad FG, vt BH ad HE. Quare componendo ac per conuerſionem

[c] 1. Huius.

uersionem rationis vt AG est ad AF, sic BE ad BH: & permutando vt AG ad BE, hoc est (sicut ostendi) vt AB ad BC, sic AF ad BH. Constat ergo propositionis veritas.

PROPOSITIO XXXIV.



SInt in continua analogia AB, CB, DB, & inter AB, CB media sit EB; inter CB verò & DB sit media FB; deinde inter EB, CB, ac CB, FB mediæ sint GB, HB: Denique inter GB, CB, & CB, HB sint mediæ IB, KB. & sic deinceps.

Dico rationem AC ad CD, duplicatam esse rationis EC ad CF; quadruplicatam autem rationis GC ad CH; & octuplicatam rationis IC ad CK: atque ita in infinitum.

Demonstratio.

CVm AB, CB, DB sint continuæ proportionales, erit AC ad CD [a] ratio eadem cum ratione AB ad CB: item quia continuæ sunt AB, EB, CB, erit ratio AE ad EC eadem cum ratione AB ad EB: & quia inter tres continuas AB, CB, DB mediæ sunt EB, FB, patet ex elementis AB, EB, CB, FB, DB omnes esse continuè proportionales: quare ratio AB ad CB, id est vt iam ostendi, ratio AC ad CD, duplicata est rationis AB ad EB, id est vt ostendi, rationis AE ad EC. quia autem continuæ proportionales sunt AB, EB, CB, FB, etiam erunt AE, EC, [b] CF continuæ: ergo vt AE ad EC, sic EC ad CF: ergo ratio AC ad CD, etiam duplicata est rationis EC ad CF; quod erat primum. Eodem discurrendi modo demonstrabimus, rationem EC ad CF, duplicatam esse rationis GC ad CH: adeoque rationem AC ad CD, quadruplicatam esse rationis GC ad CH: denique ostendemus etiam simili ratiocinatione, rationem GC ad CH, duplicatam esse rationis IC ad CK. Vnde manifestum est rationem AC ad CD, eiusdem octuplicatam esse. Quæ erant demonstranda.

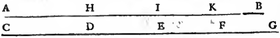
a Ibid.

b 1. Huius.

PROPOSITIO XXXV.

DAtam lineam secare in quotuis continuè proportionales, secundùm datam rationem.

Constructio & demonstratio.



DAta sit linea AB diuidenda sicut postulat propositio, in quatuor continuas, secundùm rationem datam CD ad DE. Continuetur toties ratio CD ad DE, quot continuas numero desideras in linea data AB, nempè CD, DE, EF, FG: tum diuide lineam [c] AB, sicut diuisa est linea CG: in punctis H, I, K. Dico AB, esse diuisam prout exigit propositio: patet demonstratio ex constructione.

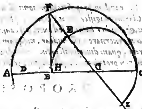
c 10. Sexti.

PROPOSITIO XXXVI.

DAtarum linearum alteram ita secare, vt partes lineæ sectæ, cum in secta, sint in continua analogia.

Con-

Constructio & demonstratio.

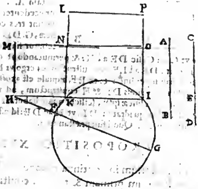


DAtæ sint duæ lineæ A B & B C, quarum alteram scilicet A B, oporteat diuidere in D puncto, vt A D, D B, B C sint in cõtinua analogia, pro constructione, super B C diametro describatur circulus, item super linea A C, composita ex duabus datis A B & B C, qui sint B E C & A F C; & ex puncto B erigatur perpendicularis B F, ad rectam A C; ducaturque ex F puncto, linea F I. per centrum minoris circuli G; fiat denique rectæ G F, æqualis G D. Dico factum esse quod imperatum fuit; quoniam quadrato F B tam æquatur rectangulum A B C, quàm [a] E F I, hoc est B D C, erunt B D C, A B C rectangula æqualia inter se: sed A B C rectangulo rectangulum æquantur rectangula A D B C, D B C; & B D C rectangulo æquatur rectangulum D B C, vnà cum quadrato D B; dempto igitur communi rectangulo D B C, manet D B quadrato, æquale rectangulum A D B C. igitur A D, D B, B C sunt continuæ. a 35. Tertij.

Aliter.

DAtæ sint A B, C D, quarum vna C D, ita secanda sit in E, vt A B, C E, E D sint in analogia continua.

Constructio & demonstratio.



ASsumptâ F G lineâ maiori quàm A B, fiat super F G tanquam diametro circulus F I G: deinde (quod ex elementis facilè perficitur) rectangulũ G H F æquale fiat rectangulo A B C D; & ex pũcto H ita ducatur H K I, vt K I æqualis sit A B (quod ab alijs factum, & nos libro nostro de circulis alia atque alia methodo præstabimus) denique ex K erectâ normali K L, æquali ipsi C D, præscindatur ex K L (ostendam enim esse maiorem) linea K N, æqualis ipsi H K. Dico factum quod petebatur.

Nam rectangulum [b] I H K æquatur rectangulo G H F, id est ex constructione rectangulo A B C D, id est rursum ex constructione I K L, ergo vt I H ad K I, ita est reciprocè K L ad K H: atqui I H maior est quàm I K, ergo & L K, quàm K H maior erit, quod assumptum fuerat in constructione: perficiantur iam rectangula I H K, I K L, ductis per N & L parallelis ad H I, & normalibus H M, I O P. Quoniam igitur rectangula I M, I L æqualia sunt, ablato communi K O, reliqua O L, K M æqualia erunt. Quare cum K M (vt ex constructione patet) sit quadratum, erunt N O, K N, L N tres continuæ. Atqui N O est K I, hoc est A B; & K L est C D. Factum igitur est quod petebatur. b 36. Tertij.

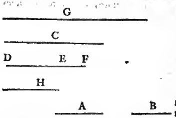
Scholion.

Hanc eandem propositionem nonnulli alij & proposuerunt, & feliciter soluerunt. Vti R. P. Clauius Magister meus (cuius per plures annos familiaris & domesticus auditor fui) Peletarius, & Guido Vbaldus: sed exercitij causa, etiam meo eam Marte expedire volui, ne alienis plumis me exornare velle videar: nusquam enim propositionem statui meis lucubrationibus interserere, quam diuersi discursus demonstratione meam non fecero; vel authoris nomen in publicum non protulero. Roga benigne Lector huius rei memor esse velis, dum in posterum simile occurret.

PROPOSITIO XXXVII.

Datarum duarum rectarum alteram ita secare, vt rectangulum sub insecta, & parte lineæ sectæ, ad residuæ lineæ quadratum, datam habeat rationem.

Constructio & demonstratio.



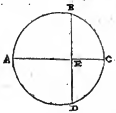
Data sit ratio A ad B, deinde datæ lineæ sint C & DF, postulat propositio, secari rectam DF in E, vt rectangulum sub C & EF, ad quadratum DE, eam rationem habeat, quam data B ad datam A. Fiat C ad G, vt B ad A, & per præcedentem secetur DF in puncto E, vt sint tres continuæ proportionales lineæ, G, DE, EF. Dico factum quod petebatur. fiat enim vt B ad A, sic H ad DE: erit ergo vt G ad C, sic DE ad H: & permutando vt G ad DE, ita C ad H: sed vt G ad DE, ita DE ad EF ex constructione: ergo vt DE ad EF, ita C ad H: rectangulum igitur super lineis C & EF, æquale est [a] rectangulo sub DE & H. porrò rectangulum sub lineis DE & H constructum, ad quadratum DE, eam habet proportionem quam lineæ ipsæ, scilicet quam habet [b] H ad DE: ergo & rectangulum C & EF, est ad quadratum DE, vt H ad DE: id est vt B ad A: igitur datarum rectarum alteram, &c. Quod fuit præstandum.

a 16. Sexti.
b 1. Sexti.

PROPOSITIO XXXVIII.

Datâ mediâ trium in continua ratione existentium, & aggregato trium linearum primam & tertiam constituentium, exhibere primam & vltimam.

Constructio & demonstratio.



Super aggregato tanquam diametro, circulus describatur ABC; in quo recta accommodetur BD, quæ æqualis sit duplæ, datæ mediæ: quod fieri posse cõstat ex datis & ex constructione: dein agatur per centrum linea AC, secans orthogonaliter in E, lineam BD. Dico factum esse quod petitur, est enim AC linea æqualis aggregato, & BE ([c] dimidia ipsius BD) datæ mediæ æqualis: quare cùm AC orthogona sit ad BE, erit AEC [d] rectangulum æquale quadrato EC: igitur datâ mediâ trium continuè proportionalium, illarumque aggregato, exhibuimus primam & tertiam. Quod erat faciendum.

c 3. Tertij.
d 35. Tertij.

Lemma.

Lemma.

SI fuerint tres B A, D A, C A in continua analogia, rectangulum super maxima A B, & excessu C D secundæ supra tertiam, non erit maius quadrato dimidię ipsius A B.

Demonstratio.



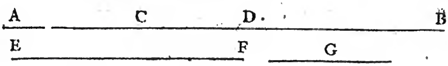
QVoniam enim B A, D A, C A sunt continuæ proportionales, erit vt B A [a] ad D A, sic B D ad D C. Quare rectangula [b] B A C D, & B D A æquantur. Sed rectangulum B D A, non est maius, quadrato dimidiæ A B [c] vt patet. ergo neque rectangulum B A C D maius erit quadrato dimidiæ A B. Quod erat demonstrandũ.

[a 21. Huius.] [b 16. Sexti.] [c 5. Secundi.]

PROPOSITIO XXXIX.

DAtâ maximâ trium continuarum, & excessu quo media superat minimam, exhibere mediam & minimam.

Constructio & demonstratio.



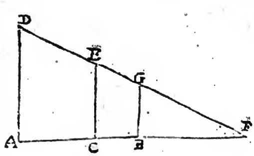
DAta sit A B linea maxima trium proportionalium, & G æqualis excessui quo media superat minimam: oporteat igitur inuenire mediam & minimam. fiat rectangulo A B G æquale quadratum E F: quoniam ergo per lemma præcedens quadratum E F, id est rectangulum A B G, non maius est quadrato dimidiæ A B. patet ita [d] secari posse A B, vt rectangulum sub partibus, æquale sit quadrato E F. Itaque diuidatur recta A B, in puncto D, vt rectangulum A D B æquale sit quadrato E F. Dico punctum D esse quod problema soluit: fiat enim rectæ G, æqualis linea D C: erit itaque rectangulum A B C D æquale rectangulo A D B, cùm vtrumque æquale sit quadrato E F; ergo vt A B ad [e] A D, ita est B D ad D C: si iam à rectangulo A B C D, auferas rectangulum B D C, remanebit rectangulum A D C; si verò à rectangulo A D B, auferas idem B D C, reliquum erit rectangulum A C D B: atqui tota A B C D, A D B sunt æqualia, itaque ablato communi, erunt & reliqua rectangula A D C, A C D B æqualia inter se; igitur vt B D ad D C, [f] id est (sicut iam ostendi) vt B A ad D A, sic D A ad C A. Sunt igitur tres in continua analogia A B, A D, A C; & C D æqualis G, est excessus, quo media A D, excedit minimam A C. Factum igitur est quod requirebatur.

[d 5. Secundi.] [e 16. Sexti.] [f 14. Sexti.]

PROPOSITIO XL.

DAtis duobus excessibus, trium magnitudinum in continua analogia existentium, exhibere tres continuas.

Constructio & demonstratio.



DAti sint excessus A C, C B, qui ponantur in directum, & erigantur A D, C E parallelæ, quæ inter se eandem rationem seruent quam A C ad C B; & ducta per puncta D & E recta D E, conueniat cum A B producta in puncto quodam F. Dico factum quod postulatur:

hanc

nam AD ad CE, eandem habet rationem, quam linea AF ad CF. Sed quam rationem habet DA ad CE, eandem ex constructione habet AC ad CB; igitur quam rationem habet tota AF ad totam CF, eandem habet AC ablata ad CB ablatam. Ergo vt AF tota ad CF totam sic quoque [a] CF reliqua ad reliquam BF. Quare rectæ AB adiuncta est linea BF, quæ faciat AF, CF, BF in continua proportione; quod petebatur.

a 19. Quinti.

Aliter.

A E B C D

CVm hæc constructio solis lineis conueniat, subiungamus aliam, quæ in omni genere quantitatis locum habeat:

Dati igitur sint excessus AB, BC: fiat AE differentia datorum excessuum, ipsisque AE, AB inueniatur tertia proportionalis continua AD: Dico AD absoluere problema. Cùm enim ex constructione AE sit ad AB, vt AB ad AD, erit diuidendo AE ad EB, vt AB ad BD: & componendo AB erit ad BE, hoc est BC, vt AD ad BD: & permutando AB ad AD, vt BC ad BD; & diuidendo AB ad BD vt BC ad CD: componendo igitur AD, BD, CD sunt continuæ. Fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO XLI.

A B C D E F

DAtam magnitudinem AE semel sectam in C, proportione maioris inæqualitatis, ita in duobus alijs punctis B & D subdiuidere, vt quatuor partes AB, BC, CD, DE sint in continua proportione; quæ dimidiata sit rationis AC ad CE, ex prima diuisione ortæ.

Constructio & demonstratio.

PEr quadragesimam huius addatur EF, vt AF, CF, EF sint proportionales: tum inter AF, CF media ponatur BF: inter CF quoque & EF, media DF. Dico factum quod petebatur. Cùm enim inter tres continuas AF, CF, EF, mediæ sint BF, DF, patet ex elementis omnes AF, BF, CF, DF, EF; esse continuè proportionales. Quare etiam AB, BC, CD, DE, sunt [b] continuæ, & quidem in ratione AF ad BF, quæ ex constructione dimidiata est rationis AF ad CF, hoc est AC [c] ad CE. Factùm igitur est quod petebatur.

b 1. Huius. c Ibid.

Aliter.

F G H

A B C D E

INter AC, CE inuentam mediam FH ita diuide, vt FG sit ad GH, vt AC ad FH, seu FH ad CE: fiantque CB, CD ipsis FG, GH æquales. Dico factum quod petitur. cùm enim sit AC ad FH, vt FG ad GH, id est BC ad CD, erit quoque AC ad BD (quæ ex constructione æqualis est FH) vt BC ad CD: & permutando AC ad BC vt BD ad CD: & diuidendo AB ad BC, vt BC ad CD. Sunt igitur AB, BC, CD tres continuæ proportionales in ratione BC ad CD. Similiter cùm FH sit ad CE, ex constructione vt FG ad GH, erit quoque BD ad CE, vt BC ad CD, ac permutando conuertendo BD ad CD, vt CE ad DE: Ideoque diuidendo BC est ad CD, vt CD ad DE. Sunt igitur tres continuæ BC, CD, DE, in ratione BC ad CD: ac proinde omnes quatuor sunt continuè proportionales in ratione BC ad CD, id est FG ad GH, id est AC ad FH, quæ

ex

ex constructione dimidiata est rationis A C ad C E; fecimus ergo quod fuerat propositum.

Corollarium.

Ex hoc problemate licebit praxim desumere, non solùm subdiuidendi duas in quatuor continuas, sed etiam in sex continuas; imò quotuis datas in duplo plures continuas, & quidem in ratione dimidiata eius, in qua ipsæ existunt.

PROPOSITIO XLII.



Sint AB, BC, CD in continua analogia; deinde secetur quæpiam linea FG in E, vt FE ad EG, eandem habeat rationem, quam AB ad BC.

Dico rectangulum BCFG, æquale esse duobus ABEG & EFCD rectangulis.

Demonstratio.

Cum enim sit vt AB ad BC, ita FE ad EG, rectangulum BCEF, [a] æquale est rectangulo ABEG. Similiter quia vt BC ad CD, ita FE est ad EG, erit etiam rectangulum BCEG æquale rectangulo CDFE. duo igitur BCEF, BCEG rectangula, id est [b] rectangulum BCFG, æqualia sunt duobus ABEG, CDFE rectangulis. Quod erat ostendendum.

[a] 16. Sexti.
[b] 1. Secundi.

PROPOSITIO XLIII.



Si fuerint quotuis continuæ proportionales AB, CB, DB, EB, &c.

Dico rectangula ABEF, CBDE, DBCD, EBAC esse inter se æqualia. Hoc est rectangula sub lineis seriei AB, CB, DB, &c. & sub residuis EF, DE, CD, AC esse inter se æqualia; modò retrogradè coniungantur.

Demonstratio.

Quoniam est vt AB ad [c] CB, sic DE ad EF, rectangulum ABEF æquatur [d] rectangulo CBDE. similiter quia vt CB ad DB, ita CD est ad DE, erit rectangulum CBDE, æquale rectangulo DBCD. rursus quoniam DB est [e] ad EB vt AC ad CD, rectangulum DBCD æquale erit ipsi EBAC, æqualia sunt igitur omnia inter se. Quod erat demonstrandum.

[c] 1. Huius.
[d] 16. Sexti.
[e] 1. Huius.

PROPOSITIO XLIV.

Iisdem positis:

Dico rectangula EBAC, DBCD, CBDE esse inter se æqualia.

Demonstratio.

Cum enim vt CB ad DB, ita CD [f] sit ad DE, igitur rectangulum CBDE æquale est [g] rectangulo DBCD. Sed rursum vt DB ad EB, sic AC ad [h] CD, quare etiam rectangulum DBCD, æquale erit rectangulo EBAC; ostensum autem fuit rectangulum CBDE, esse rectangulo DBCD æquale, quare & hæc duo EBAC & CBDE, proindeque omnia tria inter se erunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

[f] Ibid.
[g] 16. Sexti.
[h] 1. Huius.

Pari ratione si ponatur vlteriùs produci series progreſsionis, ita vt A B, C B, D B, E B, F B, &c. ponantur continuæ proportionales, demonſtrari poterit quatuor rectangula F B A C, E B C D, D B D E & C B E F inter ſeſe æqualia eſſe.

PROPOSITIO XLV.

A C D E B

SInt A B, C B, D B, E B in continua analogia, &c.

Dico quinque rectangula inter ſe æqualia eſſe, quorum primum eſt illud, quod ſub A B, B C tanquam vnâ linea, & ſub D E continetur: alterum, quod deſcribitur à C B, & D B tanquam vnâ, ac rectâ C D; tertium, quod à D B & E B tanquam vnâ, & rectâ A C conficitur quartum, quod ab E C, & C B; denique illud quod ab A D, D B deſcribitur.

Demonſtratio.

a 43. Huius. b Ibid. REctangulum enim A B D E æquale eſt a rectangulo C B C D; & rectangulum C B D E æquale eſt rectangulo b D B C D: duo igitur rectangula A B D E, & C B D E, id eſt rectangulum ſub A B C B tanquam vna, & D E, æqualia ſunt duobus C B C D & D B C D, id eſt contento ſub C B D B tanquam vnâ, & ſub rectâ C D: eodem modo oſtendam ſub D B E B & A C contentum, æquari prioribus; de reliquis quoque idem ſimili diſcurſu demonſtrabitur. Conſtat ergo veritas propoſitionis.

PROPOSITIO XLVI.

A C D E B

SInt continuæ proportionales A B, C B, D B, E B, &c.

Dico rectangula A B C E, C B A D, & duo ſimul ſumpta A C B, A C D B, denique trium aggregatum, ſcilicet quadrati C E, rectanguli A C E, & rectanguli C E B, eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.

QVoniam eſt vt A C ad C D, ita C D ad D E, erit componendo & alternando, vt
c 1. Huius. A D ad C E, ſic C D ad D E: ſed vt C D ad D E, ita eſt A B c ad C B; igitur
d 16. Sexti. vt A D ad C E, ſic eſt A B ad C B, & rectangulũ d A B C E. æquale erit rectangulo
C B A D. Inſuper quia eſt vt A B ad C B, ita A C ad C D, erit rectangulum A B C D, æquale rectangulo A C, C B. Quia verò ex æquo etiam eſt vt A C ad D E, ita A B ad D B, erit quoque rectangulum A C D B, æquale ipſi A B D E: ſed rectangulum
e 1. Secundi. A B D E, vnà cum A B C D, æqualia e ſunt rectangulo A B C E; rectangulum igitur A B C E, æquale etiam eſt duobus A C B & A C D B. Deinde quia recta A B
f 1. Secundi. ſecta eſt in C & E, erit f A B C E æquale tribus C E in C A, & C E in C E ducto, (hoc eſt quadrato C E) & eidem C E in E B ducto: æqualia ſunt igitur inter ſe. Quod fuerat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVII.

G I K L M H

A B C D E F

SInt in continua analogia minoris inæqualitatis, A B, A C, A D, A E, A F, &c. & totidem aliæ maioris inæqualitatis eiuſdem ſeriei, G H, I H, K H, L H, M H, &c.

Dico

Dico rectangula ABGH, ACIH, item ADKH, AELH, AFMH, &c. esse omnia inter se æqualia.

Demonstratio.

Ex datis vt AB ad AC, sic IH ad GH, ergo rectangulum, [a] ABGH, æquatur rectangulo ACIH. rursum ex datis vt AC ad AD, sic KH ad IH; ergo rectangulum ACIH [b] rectangulo ADKH æquale erit. Simili discursu reliquorum æqualitatem ostendemus. manifestum est igitur quod fuerat demonstrandum. [a 16. Sexti] [b Ibid.]

Corollarium.

Quoniam per primam huius positis continuè proportionalibus AB, AC, AD, AE, AF, itemque GH, IH, KH, LH, MH, earum differentiæ FE, ED, DC, &c. GI, IK, KL, &c. sunt etiam in ratione continua, manifestè patet eâdem discurrendi methodo demonstrari rectangula FELM, DEKL, CDIK, BCGI quoque inter se æqualia esse.

PROPOSITIO XLVIII.

Sint duæ series quotcumque continuarum eiusdem rationis, A, B, C, G, H; D, E, F, I, K: sit autem rectangulum AB, æquale DE rectangulo:

Dico etiam rectangula BC, EF; CG, FI; GH, IK; & sic deinceps æqualia esse.

A	B	C	G	H
D	E	F	I	K

Demonstratio.

Proportio rectanguli AB, ad rectangulum DE, componitur [c] ex rationibus A ad D, & B ad E; sed rectanguli BC, ad rectangulum EF, proportio quoque componitur ex rationibus B ad E, & C ad F, hoc est A ad D (nam cùm ex datis & ex æquo sit A ad C, vt D ad F, erit permutando A ad D, vt C ad F) ergo ex iisdem rationibus componuntur proportiones rectangulorum AB, DE: BC, EF, adeoque eædem sunt, quare cùm ratio rectangulorum AB, DE ponatur æqualitatis, rectangulorum quoque BC, EF æqualitatis proportio erit; eodem modo reliqua reliquis ostendentur æqualia. Quod erat demonstrandum. [c 23. Sexti.]

PROPOSITIO XLXIX.

Si rectangula AB, BC, CG, GH; & DE, EF, FI, IK singula singulis sint æqualia:

Dico esse A ad C, vt D ad F, & B ad G, vt E ad I, & sic deinceps.

A	B	C	G	H
D	E	F	I	K

Demonstratio.

Cùm rectangulum AB, æquale sit rectangulo DE, & rectangulum BC, rectangulo EF; ergo vt rectangulum AB ad DE, sic BC ad EF: & permutando

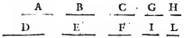
 vt

vt AB ad BC, sic DE ad EF. atqui rectangulum AB ad BC, est vt A ad C, & DE ad EF est vt D ad F; ergo A ad C, vt D ad F. Eodem discursu erit B ad G, vt E ad I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO L.

SI rectangula AB, BC, CG, GH, &c. rectangulis DE, EF, FI, IK singula singulis æqualia sint:

Dico vtramque laterum seriem A, B, C, G, H; & D, E, F, I, K; si ponantur esse continuæ proportionales, esse quoque continuas eiusdem rationis.



Demonstratio.

PEr præcedentem est A ad C, vt D ad F: quia autem tam A, B, C, quàm D, E, F, sunt continuæ proportionales ex datis, erit ram ratio A ad C, (id est D ad F,) rationis A ad B duplicata; quàm ratio D ad F (id est A ad C) duplicata sit rationis D ad E. Quare vt A ad B, sic D ad E; & B ad C, vt E ad F, &c. sunt igitur A, B, C, G, H, & D, E, F, I, K continuæ eiusdem proportionis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LI.

SI prima A ad secundam B, eamdem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D:

Dico tria rectangula ex hisce facta, esse in continuata proportione; nempe rectangula AB, BC & CD.

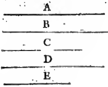
Demonstratio.



a 1. Sexti. REctangulum AB, est ad rectangulum BC, vt A ad a C, sed etiam rectangulum BC, ad CD, (ob eandem rationem) est vt B ad D. cum igitur sit ratio A ad C eadem cum ratione B ad D; eam quoque rationem habet rectangulum AB, ad BC, quam habet BC ad CD rectangulum: sunt igitur in continuata ratione, prout erat demonstrandum.

PROPOSITIO LII.

SI prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D, fiatque vt prima A ad tertiam C, ita tertia C ad quintam E:



Dico rectangula ex his lineis constituta, esse in continuata ratione; nempe rectangula AB, BC, CD, DE.

Demonstratio.

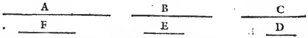
b 1. Sexti. REctangulum AB ad BC rectangulum, habet eam rationem, b quam A ad C, sed ratio A ad C, eadem

eadem est, cum ratione C ad E ex constructione, igitur ratio rectanguli A B, ad B C, eadem est cum ratione C ad E. sed quoniam vt A est ad B, ita C ad D, erit permutando A ad C, vt B ad D: ergo ratio rectanguli A B ad B C, est ratio B ad D: sed rectangulum B C ad C D, etiam est [a] vt B ad D; ergo ratio A B rectanguli ad rectangulum B C, eadem est cum ratione rectanguli B C, ad C D rectangulum. est autem ratio B ad D, hoc est A ad C, eadem quæ est C ad E; vnde etiam ratio rectanguli C D, ad D E rectangulum, eadem est cum ratione rectanguli B C, ad C D rectangulum; quocirca in continua analogia sunt rectangula A B, B C, C D, D E, cùm sint in ratione A ad C. Constat igitur veritas propositionis. [a] Ibid.

PROPOSITIO LIII.

SInt A, B, C, tres in continua ratione. Sintq; D, E, F, in eadem vel diuersa continuata ratione.

Dico rectangula C D, C E, C F; item B D, B E, B F: item A D, A E, A F esse in continua analogia.



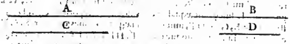
Demonstratio.

REctangulum C D est ad rectangulum C E, vt D [b] linea est ad E: & C E rectangulum est ad rectangulum C F, vt E ad F: sed D, E, F ex hypothesi sunt continuæ proportionales; ergo & rectangula C D, C E, C F sunt in continua analogia. Eodem modo probantur B D, B E, B F rectangula, item A D, A E, A F esse continuè proportionalia. Quod erat demonstrandum. [b] 1. Sexti.

PROPOSITIO LIV.

SIt A prima ad B secundam, vt C tertia ad D quartam.

Dico quadratum sub prima, rectangulum sub secunda & tertia, & quadratum quartæ, in continua esse analogia.



Demonstratio.

RAtio quadrati A, ad rectangulum C B, [c] componitur ex ratione A ad B (hoc est C ad D,) & ex ratione A ad C. Sed ratio rectanguli B C, ad D quadratum, composita est ex ijsdem rationibus; nam ratio rectanguli B C, ad D quadratum, componitur ex ratione B ad D, hoc est A ad C, & ex ratione C ad D, hoc est A ad B: ergo sunt tres continuæ quantitates, quadratum A, rectangulum B C, & quadratum D. Quod erat demonstrandum. [c] 23. Sexti.

PROPOSITIO LV.

SInt tres lineæ A B, B C, C D in continua analogia.

Dico A B quadratum primæ, rectangulum A B C, sub prima & secunda; quadratum B C sub secunda; rectangulum B C D sub secunda ac tertia; denique C D quadratum tertiæ, esse in continuata serie eiusdem rationis A B ad B C.



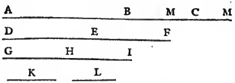
 Demon-

Demonstratio.



a 1 Sexti. b Ibid. QVadratum AB a est ad rectangulum ABC, vt AB ad BC: & rectangulum ABC est ad quadratum BC, vt AB ad BC. Rursum quadratum BC b est ad rectangulum BCD, vt BC ad CD, id est ex datis, vt AB ad BC; & rectangulum BCD est ad quadratum CD, vt BC ad CD, hoc est iterum vt AB ad BC, ergo quinque illæ figuræ sunt in continuata serie rationis AB ad BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVI.



LIneæ GI, DF, AC ita sint diuisæ in H, E, B, vt ratio DE, ad EF duplicata sit rationis GH ad HI; & ratio AB, ad BC triplicata rationis GH ad HI: sintque præterea GH, DE, AB, in continua analogia.

Dico & rectangula GHI, DEF, ABC, in continua esse analogia.

Demonstratio.

FIat vt DE ad GH, sic GH ad K, & vt EF ad HI, sic HI ad L. igitur rectangulum sub DE & K, quadrato GH, & rectangulum sub EF & L, quadrato
c 17. Sexti. HI, c æquale est; ergo rectangulum DEK, est ad rectangulum EFL, vt quadratum GH ad quadratum HI. ex hypothesi autem DE est ad EF, in duplicata ratione GH ad HI, hoc est, DE est ad EF, vt quadratum GH, ad quadratū HI: ergo rectangulum sub DE & K, est ad rectangulum sub EF & L, vt DE ad EF. Er-
d Ibid. go d K & L lineę sunt æquales: quia autem ex hypothesi GH, DE, AB, & ex constructione K, GH, DE, sunt continuæ; patet omnes quatuor K, GH, DE, AB esse continuas. Iam alias quoque lineas L, HI, EF, BC, dico esse continuas: si enim non sint, fiat tribus lineis L, HI, EF, quæ ex constructione sunt continuæ, quarta continuè proportionalis, quæuis BM, maior vel minor quàm BC. habemus ergo duas continuarum series K, GH, DE, AB: L, HI, EF, BM quæ incipiant ab ęqua-
e 17. huius. libus terminis K & L. quare ratio AB ad e BM, erit triplicata rationis GH ad HI: Atqui ex hypothesi etiam ratio AB ad BC, erat triplicata rationis GH ad HI, est ergo vt AB ad BC, ita AB ad BM, quod est absurdum. ergo L, HI, EF, BC etiam sunt continuæ. Itaque ratio composita ex rationibus GH ad DE, & HI ad EF,
f 23. Sexti. hoc est, ratio rectanguli GHI f ad rectangulum DEF, eadem est cum ratione composita ex rationibus DE ad AB, & EF ad BC, hoc est cum ratione rectanguli DEF, ad rectangulum ABC. rectangula igitur GHI, DEF, ABC sunt in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

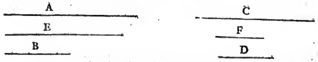
PROPOSITIO LVII.

SIt ratio A ad B, eadem cum ratione C ad D; & inter vtramque tam A, B quàm C, D interponantur quæuis lineæ: E quidem inter A, B; F verò inter C, D.

Dico

Dico rectangulum AE, ad EB rectangulum, eandem habere rationem, quam habet rectangulum CF ad FD rectangulum.

Demonstratio.



Ratio rectanguli AE ad EB rectangulum, est ea [a] quam habet A ad B; sed vt A ad B, ita ponitur C ad D, ergo rectangulum AE ad EB, est vt C ad D: sed rectangulum CF ad FD rectangulum, etiam est vt linea [b] C ad D, igitur rectangulum AE, ad EB rectangulum, eandem habet rationem, quam habet CF ad FD rectangulum. Quod demonstrare oportebat.

[a] 1. Sexti.
[b] Ibid.

PROPOSITIO LVIII.

Ponantur tres lineæ A, B, C; & aliæ tres D, E, F; vt tam primæ, quam secundæ, suam analogiam licet diuersam continuent.

Dico etiam rectangula AD, BE, CF esse in continua analogia.



Demonstratio.

Rectangulum sub A & D, ad rectangulum sub B & E habet [c] rationem compositam ex rationibus A ad B, & D ad E: proportio quoque rectanguli sub B & E ad rectangulum sub C & F composita ex rationibus B ad C, hoc est A ad B, & ex ratione E ad F, hoc est D ad E; vnde ratio rectanguli sub B & E, ad rectangulum CF, componitur ex iisdem, ex quibus ratio rectanguli sub A & D, ad rectangulum sub B & E est composita: Quare cùm proportiones ex iisdem rationibus compositæ eædem sint, erunt rectangula AD, BE, CF in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

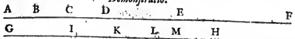
[c] 23. Sexti.

PROPOSITIO LIX.

Sint duæ diuersarum rationum series continuè proportionalium AB, AC, AD, AE, AF; GH, IH, KH, LH, MH.

Dico rectangula ABGH, ACIH, ADKH, AELH, AFMH esse in continua analogia.

Demonstratio.



Rectangulum enim sub ABGH, ad rectangulum sub ACIH rationem habet compositam ex ratione AB ad AC, & ratione GH ad IH: & rectangulum ACIH, ad rectangulum ADKM ratione habet compositam ex rationibus AC ad AD, & IH ad KH. Quare cùm ex datis sicvt AB ad AC, sic AC ad AD, & vt GH ad IH, sic IH ad KH, igitur ratio rectangulorum ACIH & ADKH, ex iisdem rationibus componitur, ex quibus rectangulorum ABGH, ACIH, sunt igitur rectangula ABGH, ACIH, ADKH in continua analogia: idemque in reliquis eodem discursu ostendetur.

Corol-

Corollarium.

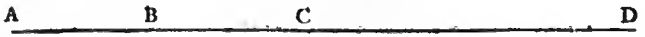
POrro cùm per primam huius, etiam continuè proportionalium, differentiæ sint in continua analogia suorum integrorum; manifestum est rectangula quoque ABGI, BCIK, CDKL, DELM, &c. esse continuè proportionalia.

PROPOSITIO LX.

SInt in continua analogia AB, AC, AD.

Dico rectangulum ABC, ad ACD rectangulum, duplicatam habere rationem eius, quam habet AB ad AC lineam.

Demonstratio.



a 1 Huius. b 23. Sexti. QVoniam DA, CA, BA ponuntur continuè proportionales, erit DC ad BC, [a] vt CA ad BA, & inuertendo BC ad CD, vt AB ad AC: itaque cùm rectangulorum ABC, [b] ACD ratio componatur ex laterum rationibus AB ad AC, & BC ad CD; quę iam ostensę sunt æquales,. constat eam esse duplicatam, rationis AB ad AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXI.

IIsdem positis:

Dico ABC rectangulum ad rectangulum ADC, triplicatam habere rationem eius quam habet AB ad AC.

Demonstratio.

EX datis ratio AB ad AD, duplicata est rationis AB ad AC: & vt patet ex præcedente & per primam huius ratio BC ad CD, æqualis est rationi AB ad AC: ergo ratio composita ex rationibus AB ad AD, & BC ad CD, triplicata est rationis AB ad AC. Quare cùm rectangulorum ABC, ADC ratio ex proportionibus laterum AB ad AD, & BC ad CD [c] componatur, patet eam esse triplicatam rationis AB ad AC. Quod erat demonstrandum.

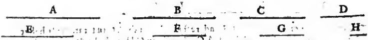
c 23. Sexti.

PROPOSITIO LXII.

POnantur duæ series quatuor continuarum A, B, C, D; & E, F, G, H.

Dico rectangulum AH, ad ED rectangulum, triplicatam rationem habere eius, quam habet BG rectangulum, ad rectangulum FC.

Demonstratio.



d 23. Sexti. REctanguli sub A & H, ad rectangulum sub E & D, ratio est composita, [d] ex ratione A ad D, & H ad E; ratio verò rectanguli BG, ad rectangulum FC, composita est ex ratione B ad C, & G ad F: ratio autem A ad D, triplicata est rationis B ad C, & ratio H ad E etiam triplicata est rationis G ad F; igitur ratio rectanguli AH ad DE, triplicata est rationis eius, quam habet BG rectangulum, ad FC. Quod erat propositum demonstrare.

PRO.

PROPOSITIO LXIII.

Datæ sint tres continuæ proportionales, A C, C D, D E: & D E bisecta sit in B.

Dico quadratum A B, æquale esse quadratis A D, C B.

Demonstratio.

A C D B E

Quia A C, C D, D E sunt in continua proportione, quadratum C D, a æquatur rectangulo A C D E: hoc est (quoniam D E bisecta ponitur in B) rectangulo A C D B bis sumpto. Quare si vtrisque commune addatur rectangulum C D B bis, erit quadratum C D, cum rectangulo C D B bis, æquale rectangulo A C D B bis, cum rectangulo C D B bis; quæ quatuor rectangula constituunt b rectangulum A D B bis. Rursum ergo communi addito quadrato D B, erit quadratum C D, cum rectangulo C D B bis, & quadrato D B, id est c quadratum C B, æquale rectangulo A D B bis, cum quadrato D B: itaque communi addito quadrato A D, erit rectangulum A D B bis, cum quadratis D B, A D, id est d quadratum A B, æquale quadratis C B, A D: Quod erat demonstrandum.

a 17. Sexti. b 1. Secūdi. c 4. Secundi. d Ibid.

PROPOSITIO LXIV.

A C E D B

Sint tres lineæ in continua analogia A B, B C, C D, & diuidatur C D bifariam in E.

Dico quadratum A E, æquari quadratis A C, E B.

Demonstratio.

Cum sint continuæ proportionales A B, B C, C D, erit vt B C e ad C D, sic A C ad D B. vnde rectangula C B D, A C D æquantur. sed rectangulum C B D, est rectangulum C D B, cum quadrato D B, hoc est (quoniam ex datis C D bisecta est in E) rectangulum E D B bis, cum quadrato D B: rectangulum verò A C D, est rectangulum A C E bis; ergo rectangulum E D B bis, cum quadrato D B, æquatur rectangulo A C E bis: & communibus additis quadratis A C, C E, siue E D, erunt rectangulum E D B bis, & quadrata B D, E D, A C, simul sumpta, æqualia rectangulo A C E bis, & quadratis A C, C E: Atqui rectangulum E D B bis, cum quadratis D B, E D, A C, æquale est quadrato f E B, & quadrato A C; rectangulum verò A C E bis, cum quadratis A C, C E, æquantur g quadrato A E; ergo quadrata E B, A C æquantur quadrato A E. Quod erat demonstrandum.

e 1. Huius. f 4. Secundi. g Ibid.

PROPOSITIO LXV.

Continuæ proportionales sint A B, A C, A E; & ex B C, sumi possit B D æqualis A C.

Dico rectangulum sub B A & sub C D, A E, tamquam vnâ lineâ constructum, æquari quadrato A D.

Demonstratio.

A E C D B

Rectangulum B A C D, h æquatur rectangulo B C D (id est i quadrato C D, & rectangulo B D C) vnà cum rectangulo A C D: sed (quoniam æquales sunt posi-

h 1. Secundi. i 3 Secundi.

A E C D B

tæ AC.BD) æqualia sunt rectangula BDC, ACD; ergo rectangulum ABCD, æquatur rectangulo ACD bis, cum quadrato, CD: & quia sunt continuæ BA, CA, EA, rectangulum BAE, æquale est quadrato CA: Itaque si rectangulo ABCD
a 1 Secundi addas rectangulum BAE: & rectangulo ACD bis, cum quadrato CD, addas quadratum CA, erunt rectangula BACD, BAE, (id est rectangulum [a] ex BA in
b 4. Secūdi. CDAE tanquam vnam lineam) æqualia quadratis CD, CA, & rectangulo ACD bis, id est [b] quadrato AD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVI.

Ponatur linea AB, diuisa in tres proportionales AB, CB, DB: duabus autem CB, DB, in directum constituantur æquales, BF, BE; Dico rectangulum CDF, rectangulo ADB æquale esse.

Demonstratio.

A C D B E F

c 3. Secundi Quoniam AB, CB, DB, ponuntur continuæ, erit rectangulum ABD (id est [c] rectangulum ADB cum quadrato DB) æquale quadrato CB; atqui etiam
d 5. Secundi. (cùm ex datis CF bisecta sit in B) rectangulum CDF cum quadrato DB; æquatur [d] quadrato CB; ergo rectangulum ADB, cum quadrato DB, æquatur rectangulo CDF, cum quadrato DB. Quocirca ablato communi quadrato DB rectangulum CDF, rectangulo ADB æquale erit. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXVII.

Sit AB ad AC, vt AD ad AE.

Dico primò rectangulum sub prima AB, & DE differentia quartæ & tertiæ, æquari rectangulo sub BC, differentia primæ & secundæ, & sub AD tertia:

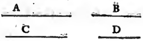
Secundò rectangulum sub prima AB, & BE differentia primæ & quartæ, æquari duobus rectangulis sub AC, BD, & sub AB, BC.

Demonstratio.

A B C D E

Cum sit vt AB ad AC, sic AD ad AE, itaque inuertendo & diuidendo vt CB ad BA, sic ED ad DA, quare rectangulum EDAB æquatur rectangulo
e 3. Secūdi. DACB. quod erat primum. Deinde cùm sit vt EA ad DA, sic CA ad BA, ergo rectangulum EAB æquatur rectangulo DAC, hoc est [e] rectangulo DCA cum quadrato CA. Quod si autem à rectangulo EAB abstuleris quadratum AB, remanet rectangulum EBA; & si idem abstuleris à rectangulo DCA cum quadrato
f 4. Secundi. CA remanent [f] rectangulum DCA, rectangulum CBA bis cum quadrato BC. Itaque cùm tota fuerint æqualia, erunt ablato communi, æqualia adhuc reliqua; rectangulum nempe EBA, & rectangula DCA semel, CBA bis, & quadratum BC simul sumpta, atqui rectangulum ACB, æquale est rectangulo ABC cum
g 1. Secundi. quadrato BC: cui si addas rectangulum ACD, orietur [g] rectangulum ACBD, quod cum rectangulo ABC æquale erit rectangulo ABC bis cum quadrato BC, & rectangulo ACD: quæ cùm simul sumpta æqualia esse ostenderim rectangulo EBA, erit quoque rectangulum AC, BD cum rectangulo ABC æquale rectangulo EBA, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.



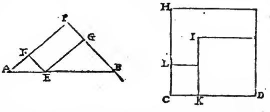
SI quatuor lineæ proportionales fuerint, maximæ & minimæ, quadrata simul sumpta, maiora sunt reliquarum quadratis simul sumptis.

Demonstratio.

CVm enim quatuor lineæ ponantur proportionales, etiam [a] earum quadrata erunt proportionalia, ita tamen vt quadratum maximæ lineæ maximum sit; quadratum vero minimę, sit minimum, vt patet ex elementis; igitur [b] constat propositum. Theorema eadem fere posita demonstratione quibusuis planis & solidis similibus applicari potest.

a 22. sexti
b 25. quinti.

PROPOSITIO LXIX.



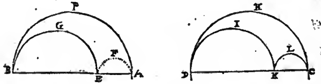
DVabus lineis AB, CD secundũ eandem rationem diuisis in E, & K, fiat super earum vna AB quæuis figura APB: & sub partibus duæ similes ei quæ fit à tota, nempe AFE, EGB. Deinde sub alia CD fiat quæcumque alia figura CHD, siue similis præcedentibus, siue dissimilis seu rectilinea seu curuilinea; sub partibus autem statuantur duæ aliæ CLK, KID, similes ei quæ fit à tota.

Dico vt APB ad CHD, sic duæ AFE, EGB ad duas CLK, KID.

Demonstratio.

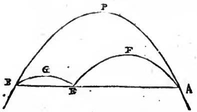
COmparemus primò rectilinea cum rectilineis; quia figuræ similes sunt AFE, APB, erit AFE, ad APB, in duplicata ratione laterum [c] homologorum AE, AB: similiter quia CLK, CHD sunt figuræ similes, erunt in duplicata ratione CK ad CD, id est ex datis, in duplicata ratione AE ad AB: ergo AFE est ad APB, vt CLK ad CHD: non aliter ostendemus EGB esse ad APB, vt KID ad CHD. igitur AFE [d] cum EGB, est ad APB, vt CLK cum KID, ad CHD. Itaque permutando AFE est cum EGB, ad CLK cum KID, vt APB, ad CHD.

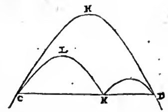
c 19. Sexti.
d 24. Quinti.



Comparemus deinde rectilinea cum curuilineis. Super CD constituatur segmentum circuli CHD: & super CK, KD, segmenta CLK, KID, similia segmẽto CHD: cùm igitur similia circulorum segmenta, duplicatam habeant proportionem subtensarum, si rectilinea lineæ AB, cum segmentis lineæ CD comparentur, eàdem prorsus demonstratione concludetur propositum, qua vsi fuimus in prima comparatione: Tertiò si curuilinea cũ curuilineis eiusdẽ speciei cõferantur, patet à fortiori propositũ:

 Eodem





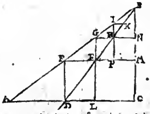
Eodem modo si curuilinea, cum diuersæ speciei curuilineis, tres nempe parabolæ similes, cum tribus hyperbolis similibus, conferantur, eadem his quoque demonstrandi ratio conueniet: cùm tam parabolæ similes, quàm hyperbolæ sint in duplicata ratione subtensarum. Constat igitur huius theorematis vniuersalis veritas.

PROPOSITIO LXX.

SIt ABC triangulum diuisum rectâ lineâ DB; ducanturq; lineę DE, EF, FG, GH, HI, IK basi AC, & lateri BC parallelę quot libuerit.

Dico omnes AD, EF, GH, IK, item DE, FG, HI, &c. esse in eadem continuata analogia.

Demonstratio.



PRoducantur enim lineæ GF in L, EF in M, GH in N, & IH in P. Igitur cùm parallelæ sint AC, EM, erit AD ad DC, vt EF ad FM: & componendo AC ad DC, vt EM ad FM, id est vt DC ad LC: sunt igitur in continua ratione AC, DC, LC: quare & AD a ad DL, id est EF vt AC est ad DC. Similiter ostendam esse continuas EM, FM, PM: vnde rursus est vt EM b ad FM (id est vt AC ad DC, id est AD ad EF) sic EF ad PP, id est GH. continuè proportionales sunt igitur AD, EF, GH: eodem modo ostendam IK, & alias quotcumque in eadem serie esse continuas. Deinde cùm AD ipsi EF, & DE ipsi FG sit parallela, patet similia esse triangula ADE, EFG: ergo vt AD ad EF, ita DE ad FG: similiter ostendam esse vt EF ad GH, ita FG ad HI. quare erunt etiam DE, FG, IH, &c. continuæ, & quidem in ea ratione in qua sunt AD, EF, GH. Quod erat demonstrandum.

a 1. Huius.
b Ibid.

PROPOSITIO LXXI.

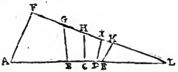
DVæ lineæ AL, FL angulum facientes, sectæ sint in continuè proportionales, quarumcumque rationum AL, BL, CL, DL, EL, &c. item FL, GL, HL, &c. dein opposita sectionum puncta lineis AF, BG, CH, DI, &c. coniungantur.

Dico triangula AFL, BGL, CHL, & cætera in infinitum esse in continua analogia.

Demon-

Demonstratio.

CVm AL, BL, CL, &c. ponantur continuæ proportionales, est vt AL ad BL, sic BL ad CL, & CL ad DL, &c. similiter cùm ponantur continuæ FL, GL, &c. erit vt FL ad GL, ita GL ad HL, atque ita semper: igitur ratio composita ex rationibus AL ad BL, & FL ad GL, eadem erit cum ratione composita ex rationibus BL ad CL, & GL ad HL: & composita ex rationibus BL ad CL, & GL ad HL,



eadem erit, cum composita ex rationibus CL ad DL, & HL ad IL: Atqui trianguli AFL, ad triangulum BGL proportio composita est ex rationibus AL ad BL, & FL ad GL; & ratio trianguli BGL, ad triangulum CHL, composita est ex rationibus BL ad CL, & GL ad HL, vt ex Commandino demonstrat Clauius, ad propositionem 23. sexti; eadem igitur est ratio trianguli AFL, ad triangulum BGL, quæ huius, ad triangulum CHL. Similiter ostendentur reliqua triangula esse in analogia continua. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

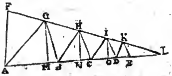
HInc consequitur etiam Trapezia AG, BH, CI, &c. esse in continua analogia; sunt enim trapezia, triangulorum continuè proportionalium differentiæ, vnde ex prima huius patet corollarij veritas.

PROPOSITIO LXXII.

IIsdem positis ducantur in singulis trapezijs diametri, AG, BH, CI, &c. Dico triangula inde nata, AGB, BHC, CID, &c. itemque triangula FAG, GBH, &c. esse continuè proportionalia.

Demonstratio.

EX punctis enim G, H, I, &c. ad AL, demittantur normales GM, HN, IO, &c. ratio trianguli AGB, ad triangulum BHC, componitur ex [a] rationibus AB ad BC, & altitudinis GM, ad altitudinem HN: sed quia AL, BL, CL, &c. ponuntur continuæ proportionales etiam AB, BC, CD, [b] &c. erunt continuæ in ratione suorum integrorum AL, BL, CL, &c. & quia GM, HN, &c.



[a] Clau. ad 23 sexti.

[b] 1. Huius.

ad AL normales, ideoq; inter se parallela sunt, erit GM ad HN, vt GL ad HL, hoc est ex datis, vt HL ad IL; igitur ratio trianguli AGB, ad triangulum BHC, componitur ex rationibus BC ad CD, & HL ad IL: simili planè discursu ostendemus, rationem trianguli BHC, ad triangulum CID, ex iisdem rationibus esse compositam: igitur triangula AGB, GHC, CID sunt in continua analogia; similiter de alijs idem demonstrabitur. Patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO LXXIII.

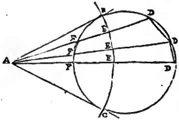
COntingant circulum BCD duæ lineæ AB, AC, ex eodem puncto eductæ; & centro A interuallo B, C, describatur arcus BEC. dein-

 de

de ex puncto A, ductis quotcumque lineis, secantibus AFED iungantur DD, EE, FF.

Dico triangula inde nata DAD, EAE, FAF esse in cōtinua analogia.

Demonstratio.



a 36. Tertij.

b 72. huius.

CVm AB contingat circulum, erit a rectangulum DAF, æquale quadrato AB, hoc est quadrato AE. Vnde DA, EA, FA sunt continuæ proportionales. Similiter reliquæ omnes lineæ DA, EA, FA, erunt in continua analogia. triangula igitur DAD, EAE, FAF b etiam in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXIV.

DVos circulos inæquales CBD, IKL, contingant æquales lineæ AB, GH: & ex punctis A, G educantur secantes ACD, AFE, GIK, GML continentes angulos æquales EAD, LGK: iunganturq; FC, ED, MI, LK.

Dico reciprocam esse triangulorum EAD, KGL; MIG, FAC proportionem.

Demonstratio.



c 36. Tertij.

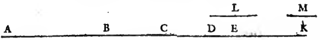
d 14. Sexti.

QVoniam tangentes AB, GH æquales sunt, patet c rectangula DAC, KGI, æqualia esse: igitur & rationes AD ad KG, & IG d ad CA æquales sunt. Similiter cùm rectangula EAF, LGM, æqualium tangentium quadratis æquentur, inter se erunt æqualia; quare & rationes EA ad LG, MG ad FA eædem sunt; si igitur rationibus æqualibus AD ad KG, & IG ad CA, æquales addantur rationes, EA ad LG, & MG ad FA, erit ratio composita ex rationibus AD ad KG, & EA ad LG æqualis composita ex rationibus IG ad CA, & MG ad FA; hoc est ratio trianguli EAD, ad LGK triangulum æqualis rationi trianguli MGI, ad FAC triangulum; cùm ob angulorum AG æqualitatem, rationem ex lateribus habeant compositam. Vnde veritas patet propositionis.

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM
PARS SECVNDA

Terminum cuiuscunq; progreßionis in infinitum continuatæ designat.

PROPOSITIO LXXV.



SI fuerit magnitudo A B, ad magnitudinem B K, vt magnitudo B C ad magnitudinem C K.

Dico proportionem A B ad B C, sine termino continuari actu posse intra magnitudinem A K, ita vt numquam ad K perueniatur.

Demonstratio.

FIat enim vt A B ad B C, sic B C ad L. quia igitur A B est ad B K, vt B C ad C K, erit alternando vt A B ad B C, id est vt B C ad L, sic B K ad C K: & rursum alternando, vt B C ad B K, sic L ad C K: quare cùm B C ex datis, minor sit, quàm B K, erit etiam L, minor quàm C K: poterit ergo ipsi L, ex C K sumi æqualis C D: erant autem A B, B C, L, tres continuæ proportionales: ergo & A B, B C, C D tres sunt continuæ. Fiat iam his tribus magnitudinibus continuè proportionalibus A B, B C, C D, quarta proportionalis continua M: quoniam igitur paulò antè ostendi esse B K ad B C vt C K est ad L, siue C D, erit diuidendo & inuertendo, B C ad C K, vt C D ad D K: eodem planè discursu ostendam, M esse minorem ipsâ D K, quo antè L ostendi esse minorem ipsâ C K: poterit ergo ipsi M, ex D K abscindi D E æqualis. Sunt igitur quatuor magnitudines A B, B C, C D, D E continuæ proportionales. Atque ita demonstrabimus proportionem A B ad B C, intra lineam A K sine termino posse actu continuari, ita vt nunquam ad K perueniatur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVI.



SI fuerit magnitudo A B, ad magnitudinem B K, vt magnitudo B C, ad magnitudinem C K; & proportio A B ad B C, continuetur in magnitudine A K, per plures terminos C D, D E, E F, &c.

Dico etiam C D, fore ad D K, & D E ad E K, & sic deinceps, vt A B est ad B K & B C ad C K, &c.

Demonstratio.

QVandoquidem A B est ad B K, vt B C ad C K, erit alternando A B ad B C, hoc est ex datis B C ad C D, vt B K ad C K: & rursum alternando ac inuertendo K B ad B C, vti K C ad C D: & diuidendo ac inuertendo, vt B C ad C K, sic C D, ad D K: non aliter ostendemus vt C D ad D K, sic esse D E ad E K; atque ita deinceps in infinitum. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVII.

L

A B C D E K

DAta ſit proportio quæuis minoris inæqualitatis A B ad A C. Dico ſi hæc continuetur, exhibendam magnitudinem quauis datâ maiorem.

Demonſtratio.

DEtur enim magnitudo quæuis L: manifeſtum eſt ſi B C, exceſſus ſecundæ magnitudinis A C, ſupra primam A B, aliquoties ſumatur, maiorem fore magnitudine L: debeat ergo ſumi B C quater, vt excedat L: continuetur ratio A B ad A C per quinque terminos A B, A C, A D, A E, A K: atque ita habebimus quatuor differentias B C, C D, D E, E K. quoniam autem eſt vt [a] D A ad C A, ſic D C ad C B, & cùm D A maior ſit C A, erit quoque D C maior quàm B C: ſimiliter erit E D maior quàm C D, & K E quàm E D. ergo K B ex quatuor differentiis compoſita maior erit quàm B C quater ſumpta. Quare cùm B C quater ſumpta maior ponatur quàm L: erit K B multò maior quàm L, ideoque A K adhuc multò quàm L maior erit: conſtat igitur quod fuerat demonſtrandum.

a 1. Huius.

PROPOSITIO LXXVIII.

A B C D E K

L M N O P R

A Magnitudine A K auferatur quæuis pars A B, & à reſiduo B K auferatur B C, ea lege vt ſicut eſt A B ad B K, ita ſit B C ad C K. Dico ſi hæc ablatio ſemper fiat, relinqui ex A K quantitatem data minorem. *eſt vniuerſis prima decimi.*

Demonſtratio.

DEtur enim quantitas L M aut alia quantumuis parua: dein vt K B ad K A, ſic L M fiat ad L N: atque hæc proportio per tot terminos continuetur, donec L R maior ſit quàm A K: hoc autem aliquando futurum eſt per præcedentem. Deinde quoties in M, N, O, P diuiſa eſt L R, toties in ratione A B ad B K ſubdiuidatur A K in B, C, D, E. Quoniam ergo ex conſtructione L M, L N, L O, &c. ſunt continuæ, erit vt L M ad L N, id eſt vt B K ad K A, ſic L P ad L R. quare inuertendo vt A K ad B K, ſic R L ad P L, & permutando vt A K ad R L, ſic B K ad P L. Atqui ex conſtructione A K minor eſt quàm R L, ergo & B K quàm P L minor erit. deinde quoniam ex conſtructione eſt A B ad B K, vt B C ad C K, & C D ad D K, & D E ad E K, patet componendo omnes A K, B K, C K, D K, E K eſſe continuas: itaque B K eſt ad C K, vt A K ad B K, id eſt ex conſtructione vt N L ad M L: ſed P L eſt ad O L, vt N L ad M L, quia omnes R L, P L, O L, &c. ſunt ex conſtructione continuæ; ergo B K eſt ad C K, vt P L ad O L; & permutando vt B K eſt ad P L, ſic C K eſt ad O L. atqui iam oſtendimus B K minorem eſſe quàm P L, ergo & C K quàm O L minor erit. ſimiliter demonſtrabimus D K minorem eſſe quàm N L, ac tandem E K eſſe minorem quàm M L, quæ erat data quantitas minor; ergo relinquitur quantitas: quod erat demonſtrandum.

P R O-

Scholion.

N*Ota: dum in propositione dicitur*, si hæc ablatio semper fiat, dico relinqui ex AK quantitatem datâ minorem: *sensum propositionis non esse, relinqui ex AK quantitatem data minorem, post ablationem terminorum in infinitum continuatam; siue post totam seriem absolutam, relinqui adhuc quantitatem data minorem; sed auferendo terminos ex AK, in ratione ante dicta, aliquando tot auferendos, vt residua pars totius AK, minor sit quantitate datâ: quod in gratiam quorundam dictum sit.*

PROPOSITIO LXXIX.

A B C D E F I K

DAta sit magnitudo quæcumque AK: si fuerit

- AB ad BK, vt BC ad CK.
- AB ad AK, vt BC ad BK.
- vel AK, BK, CK continuè proportionales.
- AB ad BC, vt BK ad CK.
- AB ad BC, vt AK ad BK.

Dico magnitudinem AK æqualem esse toti progressioni magnitudinum continuè proportionalium, rationis AB ad BC in infinitum continuatæ; siue quod idem est, rationis AB ad BC in infinitum continuatæ terminum esse K.

Demonstratio.

CVm AB sit ad BK, vt BC ad CK, poterit ratio [a] AB ad BC, intra magnitudinem AK semper continuari, ita vt numquam perueniatur ad K, id est AK maior erit quaeunque serie finita terminorum; ergo AK, non est minor serie totâ rationis AB ad BC. Deinde quia AB est ad BK, vt BC ad CK, si ratio AB ad BC semper continuetur, erit vt AB ad [b] BK, siue vt BC ad CK, sic CD ad DK & DE ad EK, atque ita deinceps in infinitum: Itaque si continuetur semper ratio AB ad BC, relinquetur [c] tandem ex AK magnitudo quauis datâ minor. Quare AK nequit esse maior, serie rationis AB ad BC: nam si maior esset deberet aliquo excessu esse maior. ponatur is IK; igitur AI seriei rationis AB ad CD æqualis erit: ergo ratio AB ad BC quantumuis continuata non transiliet vnquam I. ergo relinquetur ex AK magnitudo semper maior quàm IK. ergo non minor quauis datâ, contra iam demonstrata. non erit igitur AK maior serie rationis AB ad BC: Quare cùm neque minorem esse anteà sit ostensum, æqualis sit necesse est. Quod erat demonstrandum.

[a] 75. huius. [b] 76. huius. [c] 78. huius.

Reliquarum hypothesium demonstrationes ad primam reducuntur. nam si fuerit AB ad AK vt BC ad BK, erit diuidendo AB ad BK, vt BC ad CK. ergo per primam demonstrationem, rationis AB ad BC semper continuatæ terminus est in K.

Deinde si fuerint AK, BK, CK continuæ, erit diuidendo AB ad BK, vt BC ad CK. Rursum igitur per primam demonstrationem patet propositum.

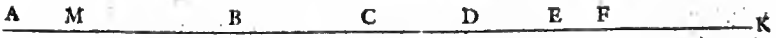
Denique si fuerit AB ad BC, vt BK ad CK, vel AK ad BK, erit permutando vel AB ad BK, vt BC ad CK, vel AB ad AK vt BC ad CK. Vnde iterum per primam demonstrationem conficitur propositum.

PROPOSITIO LXXX.

A M B C D E F K

DAtâ serie continuè proportionalium AB, BC, CD, &c. cuiuscumque proportionis, & quocumque in genere quantitatis; inuenire magnitudinem, quæ omnibus terminis totius seriei datæ in infinitum continuatæ, sit æqualis.

Constructio prima.



Sit AM, differentia primorum duorum terminorum: fiatque vt AM ad BC secundum terminum, sic BC ad tertium quempiam CK. Dico CK magnitudinem cum primo AB. & secundo termino BC, æqualem esse seriei vniuersæ AB, BC, CD, &c.

Constructio secunda.

Fiat vt AM duorum primorum terminorum differentia, ad AB primum terminum, ita secundus terminus BC, ad tertiam aliquam magnitudinem BK. Dico magnitudinem BK, cum primo termino, exhibere quantitatem æqualem toti seriei.

Constructio tertia.

Differentiæ duorum primorum terminorum AM, & primo termino AB, tertia proportionalis fiat AK. Dico AK totam seriem exhibere.

Demonstratio

Primæ constructionis; AM est ad BC, vt BC ad CK; igitur componendo AM cum BC, hoc est AB, erit ad BC, vt BK ad CK: & permutando, AB ad BK, vt BC ad CK. Quare [a] AK magnitudo, hoc est CK, cum AB & BC primis terminis, toti seriei æqualis est.

a 79 huius

Secundæ constructionis; AM est ad AB, vt BC ad BK ex constructione: igitur diuidendo, vt AM est ad MB, id est vt AM ad BC, sic BC ad CK. itaque per demonstrationem primæ constructionis, AK (hoc est BK vnà cum primo termino AB) æquatur toti seriei.

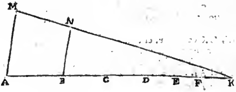
Tertiæ constructionis, Cùm sit ex constructione AM ad AB, vt AB ad AK, erit inuertendo, diuidendo, rursumque inuertendo AM ad MB, vt AB ad BK: & componendo AB ad MB, hoc est BC, vt AK ad BK. Quare AK [b] toti seriei æqualis est. Factum igitur est quod petebatur.

b 79. huius.

Primâ igitur constructione exhibetur tota series præter primum & secundum terminum, 2. constructione habetur series tota præter primum terminum. 3. constructione simul tota producitur series. Huius autem problematis, ac constructionis eiusdem vniuersalitatem, amplius deductam habes in propositione 123. huius, & corollario quarto ibidem.

PROPOSITIO LXXXI.

Quia verò vltimò ratio quarumcumque quantitatum ad lineas reduci potest, hinc etiam sequenti methodo, lineam toti seriei proportionalium linearũ, reperiemus æqualẽ.



Constructio & demonstratio.

Ex punctis A & B, erige ad quemuis angulum, parallelas AM, BN, quæ ipsis AB. BC sint proportionales; & per puncta M & N ducatur recta MN, concurrens cum ABC in K. Dico AK, toti seriei AB, BC, CD, &c. æqualem esse.

Quod autem MN, occurrere debeat ABC productæ, patet ex eo, quod BC ex hypo-

hypotheſi, minor ſit quàm AB; ac proinde etiam BN: cùm AM, BN proportionales ſint ipſis AB, BC; ſit igitur concurſus in K; erit vt AB ad BC, ſic MA ad NB; ſed vt MA ad NB, ſic AK ad BK, ergo AB eſt ad BC, vt AK ad BK. Vnde [a] AK toti ſeriei æqualis eſt. Factum igitur eſt quod petebatur. [a] ibid.

PROPOSITIO LXXXII.

A N B C D E F G M K M

SIt magnitudo AK, ſeries tota rationis AB ad BC continuatæ in infinitum.

Dico eſſe:
- AB ad BK, vt BC ad CK.
- AB ad AK, vt BC ad BK.
- AK, BK, CK, &c. continuè proportionales.
- AB ad BC, vt BK ad CK.
- AB ad BC, vt AK ad BK.

Demonſtratio.

EX AB abſcindatur NB, æqualis BC: ſi ergo non eſt AB ad BK, vt BC ad CK, neque permutando AB erit ad BC, id eſt BN, vt BK ad CK; ergo neque diuidendo AN, erit ad NB, vt BC ad CK. Fiat igitur vt AN ad NB, ſic BC ad aliam magnitudinem CM, maiorem vel minorem quàm CK. Itaque componendo; AB erit ad NB, hoc eſt BC, vt BM ad CM: & permutando AB ad BM, vt BC ad CM. Quare totius ſeriei [b] rationis AB ad BC, terminus erit M; [b] 79 huius ſiue AM æqualis erit ſeriei rationis AB ad BC, quod eſt abſurdum, cùm AK maior vel minor quàm AM, ſit ex hypotheſi æqualis ſeriei datæ. non erit igitur alia ratio AB ad BK à ratione BC ad BK, ergo eadem, quod erat demonſtrandum.

Reliquas autem aſſertionis partes ex prima deducemus. Cùm enim iam demonſtratum ſit ex hypotheſi theorematis, ſequi AB eſſe ad BK vt BC ad CK, componendo erit AK ad BK, vt BK ad CK. quod erat ſecundum.

Et quoniam AK eſt ad BK, vt BK ad CK, igitur per conuerſionem rationis, AK eſt ad AB, vt BK ad BC; & inuertendo AB ad AK, vt BC ad BK. quod erat tertium. rurſum quoniam AB eſt ad BK, vt BC ad CK, erit permutando AB ad BC, vt BK ad CK. quod erat quartum. denique quoniam oſtenſum eſt AB eſſe ad AK, vt BC ad BK, etiam permutando AB eſt ad BC, vt AK ad BK: quæ omnia erant demonſtranda.

Corollarium.

EX quinta aſſertionis parte hoc theorema deducitur: data ſit ſeries magnitudinum continuè proportionalium AB, BC, CD, &c. ſine termino continuata: Dico eſſe vt vna antecedentium, nempe AB, ad vnam conſequentium BC. ſic omnes, hoc eſt infinitas antecedentes, ſiue AK, ad omnes ſiue infinitas conſequentes, ſiue BK.

PROPOSITIO LXXXIII.

A M B C D E F K

SIt AK magnitudo producta ex ratione AB ad BC; in infinitum continuata; primi autem & ſecundi termini differentia ſit AM;

Dico primò; differentiam AM, BC ſecundũ terminum, & CK totam

 ſeriem,

feriem, (præter duos primos terminos) in continua esse analogia.

Dico secundò, A M differentiam, ad primum terminum A B, esse vt B C secundus terminus, ad B K totam feriem, præter primum terminum.

Dico tertiò, differentiam A M, primum terminum A B, & totam feriem A K, in continua esse analogia.

Demonstratio.

A M B C D E F K

QVoniam AK magnitudo producta est ex ratione AB ad BC in infinitum continuata, erit per præcedentem AB ad BK, vt BC ad CK: igitur permutando vt BK ad CK, sic AB ad BC, hoc est MB, & diuidendo AM ad MB, hoc est BC, vt BC ad CK. quod erat primum.

Rursum cùm sit vt AM ad BC, hoc est MB, sic BC ad CK, erit componendo inuertendo, vt AB ad MB, sic BK ad CK; & conuertendo inuertendo vt AM ad AB, ita BC ad BK. quod erat secundum.

Iterum cùm sit vt AM ad AB, sic BC ad BK, erit permutando, vt AM ad BC, hoc est MB, sic AB ad BK; & inuertendo componendo, & iterum inuertendo vt AM ad AB, sic AB ad AK. quod erat tertio loco demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

A B C D E K

M N O P R

DAtæ sint series binæ A K, M R (quas similes licebit appellare) magnitudinum continuè proportionalium, in eadem proportione.

Dico feriem totam A K, esse ad feriem M R vt A B primus terminus feriei A K, ad M N primum terminum feriei M R.

Demonstratio.

PEr octuagesimam secundam huius A K est ad BK, vt A B ad BC, hoc est, (cùm ex hypothesi AB ad BC, MN ad NO, similes sint rationes) vt MN ad NO: sed per eandem etiam est M R ad N R, vt MN ad N O, igitur AK est ad BK vt MR ad NR. vnde per conuersionem rationis A K est ad A B, vt M R ad MN: & permutando series A K, est ad feriem M R, vt primus terminus A B primæ feriei, ad primum terminum MN secundæ feriei; quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXV.

QVamquam ex iis, quæ hactenus vniuersaliter demonstrauimus propositione octogesimâ, & octogesimâ primâ, nota sit proportio totius feriei, ad primam magnitudinem; placuit tamen exercitij causâ, notissimis quibusdam proportionibus applicare, maximè cùm de illis sæpè mentio futura sit.

PRimùm igitur data sit, quocumque in genere quantitatis, proportio dupla, A B ad B C.

Dico totam feriem proportionis huius, sine termino continuatæ, constituere magnitudinem, quę dupla sit primæ magnitudinis.

Demon-

Demonstratio.



Fiat enim ipsi B C, æqualis B I, & fiat vt A I ad A B, sic A B ad A K: erit K terminus [a] rationis A B ad B C, semper continuatæ. & quoniam B A, dupla est B C, estque B I æqualis B C, erit quoque B A dupla I A; Quare cùm sit ex constructione vt B A ad I A, sic A K ad A B, erit etiam A K, (id est tota series rationis A B ad B C) dupla B A, primæ magnitudinis. Quod erat demonstrandum. [a 80. huius.]

PROPOSITIO LXXXVI.

Detur deinde proportio tripla AB ad BC.

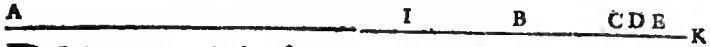
Dico totam seriem, fore sesquialteram primæ magnitudinis.

Demonstratio.



Fiat enim secundæ magnitudini B C, æqualis B I; erit ergo B I, tertia pars A B; & A I excessus, seu differentia primæ & secundæ; vnde si fiat vt A I ad A B, sic A B ad A K; erit A K [b] æqualis toti seriei; & quia I B, tertia pars est B A, erit B A sesquialtera ipsius A I; quare cùm sit vt B A ad A I, sic A K ad A B, erit quoque A K, sesquialtera primæ magnitudinis A B. Quod erat demonstrandum. [b Ibid.]

PROPOSITIO LXXXVII.



Denique proportio data sit quadrupla A B ad B C.

Dico totam seriem esse sesquitertiam primæ magnitudinis: siue eam habere rationem ad primam magnitudinem, quam quatuor ad tria.

Demonstratio.

Fiat enim B C æqualis B I; erit ergo B I quarta pars AB, & consequenter B A sesquitertia ipsius I A. Fiat igitur vt A I ad A B, sic A B ad A K, erit A K [c] tota series. Quare cùm K A sit ad B A, vt B A ad I A, erit K A sesquitertia primæ magnitudinis B A. Quod erat demonstrandum. [c Ibid.]

Sed de his modò satis: poterit enim quilibet ex propositione ex octuagesima huius benè intellecta, data proportionis rationalis, seu numeri ad numerum, totam seriem, & consequenter rationem seriei, ad primum terminum exhibere.

Scholion.

Quod si constructionem secundam octuagesimæ propositionis adhibere placuerit, habebitur vnica operatione proportio primæ magnitudinis ad reliquam seriem: si verò primâ constructione vtamur, exhibebitur proportio primæ & secundæ magnitudinis simul sumptarum, ad seriem reliquam.

Præsens materia memorem me facit eius, quod in argumento huius libri præfatus sum, cùm mentio incideret Zenonici discursus, quo se credebat omnem motus rationem è medio tollere posse: nucleus autem argumenti tanta apud authorem authoritatis exstitit, vt eundem Achillis inuictissimi Ducis nomenclaturâ dignaretur: persuasum habens, eum nucleum vsque adeò duro cortice futurum, qui par foret omnibus Philosophicorum Elenchorum malleis sustinendis.

Repetam discursum Zenonis, iisdem verbis, quibus in præfatione huius libri sum vsus. consistebat ille in duobus, quæ mouerentur; primo Achillis, velocissimè currentis, altero testudinis tardissimè reptantis.

A B D E C

Ponatur inquiebat ille, Achilles cursor pernicissimus, ex A *puncto testudinem reptantem per semitam* B C, *lentissimo motu, velle assequi; quo tempore Achilles tendit ex* A *in* B, *mota est testudo ad aliquod spatium, perueniens in* D: *igitur necdum Achilles assecutus est testudinem; iterum quo tempore Achilles ex* B *currit, vt assequatur testudinem existentem in* D, *mota est testudo ad* E *punctum; igitur Achilles existens in* D *nondum assecutus est testudinem; atque hoc in infinitum eueniet: quoniam continuam diuisibile est in infinitum, vnde numquam Achilles assequetur testudinem. Incumbit igitur nobis hunc nucleum effringere, ex doctrina huius libri; quod assecutos nos esse cognosces, cum ipsissimum punctum assignauerimus, quo Achilles testudinem apprehendet.*

Vt nodum hunc Gordium, ex principiis huius libri dissoluamus, supponemus, non minus Achillem, quàm testudinem in suo cursu vniformiter procedere; ita vt celeritas, primâ parte motus assumptâ, perseueret in eodem statu, vsque ad vltimam temporis momentum quo sua spatia decurrunt: supponemus insuper, (quoniam omnis motus species est quantitatis) duos hosce motus, cùm vniformes ponantur, in suis partibus, sortiri inter se aliquam proportionem, quod necesse est eueniat inter omnes quantitates, quæ in eadem specie versantur: vt sunt duo motus recti & vniformes.

Ponatur igitur proportio duorum horum mobilium, secundùm celeritatem, consistere in ratione dupla; ita vt Achilles duplo celeriùs spatium decurrat, quàm testudo: igitur quo tempore testudo ad quartam partem stadij promota fuerit, medium stadium confecerit Achilles. Educta itaque linea A C, D C, *in ratione dupla ex* C *puncto, diuidantur in* B, F, H, *&c. &* E, G, I. *secundùm rationem duplam; vt* A C *dupla, sit* B C, *&* D C *dupla* E C. *item* B C *dupla* F C, *&c.* E C *dupla* G C, *&c.*

A B F H C

D E G I

Consistat itaque Achilles in A *sitû,* A C *semitam repræsentans stadio longitudine æqualem; testudo verò constituta in dimidio stadij, in puncto* B, *vel* D, *positâ* D C *æquali ipsi* B C. *Quoniam Achilles ex* A *moueri incipit, quo tempore ex* D *inchoat cursum testudo; igitur peruenerit Achilles ex* A *in* B, *quo tempore ex* D, *testudo pertinget in* E: *& quo tempore Achilles ex* B *pertinget in* F, *eodem peruenerit testudo ex* E *in* G. *& sic consequenter: quia vero terminus progressionis rationis* A B *ad* B F *terminatur in* C, *prout propositione octuagesimâ quintâ demonstratam est; similiter cùm progressio, secundùm rationem* B F, *ad* F H, *vel* D E *ad* E G, *finem sortiatur in puncto* C, *secundùm eandem propositionem: igitur concursus duorum horum mobiliam, Achillis scilicet & testudinis, continget in puncto* C: *Quod si loco proportionis duplæ, assumatur proportio tripla; tunc assignabitur concursus per propositionem octuagesimam sextam huius. Si verò quadrupla, inseruiet propositio octuagesima septima, & sic de reliquis.*

Captiosus Zenonis discursus molestias creat non consideranti discrimen, quod in eo exsurgit, inter duplicem progressionem, quæ argumentationis filum dubium facit; alia enim est progressio per partes æquales; alia per partes proportionales; hic vtriusque cursus supponitur fieri per partes vniformes, siue per passus æquales, cùm passus primus à secundo, vel tertio non discrepet, licet duos passus Achillis, verbi gratia, eodem contingant tempore quo vnus passus testudinis; secundùm verò hos passus fit vtriusque cursus: Zeno autem in decursu argumenti sui, distinguit motus cursorum per partes proportionales, secundùm quas mobilia nullo modo mouentur, ac proinde in idem eius discursus recidit, ac si dicat quis, eo tempore quo diui-

A B C D E

dam lineam A E, *in partes quatuor æquales, alius eam subdiuidet secundùm aliquam seriem per partes proportionales, profectò citiùs assignabuntur termini quatuor partium æqualium, quàm infiniti termini partium proportionalium: Achilles enim & testudo decurrentes* A E *spatium, per partes æquales, suorum passuum æqualium terminum tandem acquirunt; Zeno verò dum hæc contingunt, à cursoribus diuidi vult spatium* A E, *in partes proportionales, secundùm quas mobilia non succedunt.*

Ad

Ad argumentum porrò respondendum est, dum dicitur: Priusquàm Achilles ex A perueniat ad B punctum, mota est testudo ex B in F:

A B F H C

sensum huius propositionis coincidere cum hoc quo dicetur, prius debet Achilles assignare punctum B, *quàm notes punctum* F. *quod repugnat cursui secundùm rationem motus; nam omnis assignatio in hac materia continet rationem subsistentia, vt Mathematici sentiunt, saltem secundùm intellectum, ac proinde alicuius quietis, qua motui repugnat. Verùm hæc in gratiam Philosophorum dicta sufficiant.*

PROPOSITIO LXXXVIII.

A KFE D C B

DAtâ A B, cuius tertia pars sit C B; fiat vt tota A B, ad C B tertiam sui partem, ita C B ad C D, & C D ad D E, & D E ad E F, atque ita semper.

Dico K terminum huius progressionis, bifariam diuidere propositam magnitudinem A B.

Demonstratio.

ERit enim ex hypothesi A B cum B K, æqualis toti seriei proportionis triplæ: atqui tota series rationis triplæ, a sesquialtera est magnitudinis primæ, ergo A B cum B K, sesquialtera est primæ magnitudinis A B: ergo B K, est eiusdem dimidia. quod erat demonstrandum. a 86. huius.

PROPOSITIO LXXXIX.

A KFE D C B

DEtur quantitas A B, cuius quarta pars sit B C; si fiat vt tota A B ad quartam sui partem B C, ita B C ad C D, & C D ad D E, & D E ad E F; atque ita semper continuando, punctum K huius progressionis terminus emergat:

Dico B K esse tertiam partem propositæ quantitatis A B.

Demonstratio.

NAm ex hypothesi A B cum B K, est tota series proportionis quadruplæ. Atqui tota series rationis quadruplæ, est b ad primam magnitudinem, vt quatuor ad tria, ergo B K cum A B, est ad A B, vt quatuor ad tria. & diuidendo K B ad A B, vt vnum ad tria, hoc est K B tertia pars est ipsius A B. Quod erat demonstrandum. b 87. huius.

PROPOSITIO XC.

G

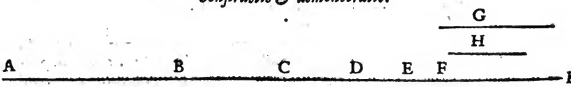
H

A B C D E F K

DAtam magnitudinem A K, ita in duobus punctis B, C, diuidere, vt A B ad B C, habeat rationem datam, G ad H. Et proportionis A B ad B C continuatæ progressio terminetur in K.

Con-

Constructio & demonstratio.



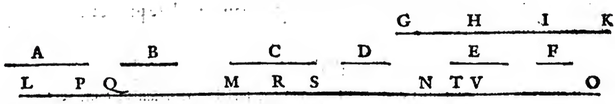
Diuide AK in B, ita vt sit AK ad BK, vt G ad H; & vt AK ad BK, sic AB fac ad BC. Dico factum esse quod petebatur. cùm enim sit vt AK ad BK, sic AB ad BC, erit & reliquum BK [a] ad reliquum CK, vt AK ad BK: vnde rationis AB ad BC [b] terminus est K: est autem AB ad BC ratio eadem cum ratione AK ad BK, id est G ad H. constat igitur propositum.

a 19. Quinti.
b 79. huius.

Corollarium.

EX hac propositione manifestum est, omnem magnitudinem, omnes rationum series continere.

PROPOSITIO XCI.



DAtis quotcumque rationibus A ad B, C ad D, E ad F, datam magnitudinem LO, oporteat diuidere in tot partes, quot datæ sunt rationes, nempe in LM, MN, NO, ita vt partes illæ eandem habeant rationem, quam primi datarum rationum termini, A, C, E; & præterea singulæ partes LM, MN, NO singulis datis rationibus, sine termino continuatis, sint æquales.

Constructio & demonstratio.

FIat GHIK, omnibus A, C, E, æqualis: & vt diuisa est GK, sic diuide LO in M & N: deinde per 90. huius LM ita diuide in P & Q, vt sit LP, ad PQ, sicut A ad B: & rationis LP ad PQ, terminus sit M. similiter MN, NO diuide in punctis R, S, T, V secundùm rationes C ad D, E ad F, ita vt rationum MR ad RS, NT ad TV, termini sint N & O. Dico factum quod petebatur. Demonstratio ex ipsa constructione est manifesta.

PROPOSITIO XCII.



DAtis quotcumque rationibus AB ad BC, DE ad EF, GH ad HI, &c. magnitudinem inuenire, quæ omnes harum rationum, series progressionum adæquet.

Constructio & demonstratio.

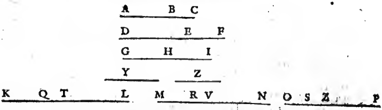
PEr octogesimam huius inueniantur magnitudines, quæ singularum rationum series adæquent; atque omnibus illis magnitudinibus, vna fiat æqualis. hæc, vt patet, adæquabit omnes series datarum rationum.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.

Datas quotcumque series diuersarum rationum ita constituere, vt sint in continua analogia datæ proportionis.

Constructio & demonstratio.



Rationes diuersæ sint AB ad BC, DE ad EF, GH ad HI. & alia data ratio Y ad Z. Fiant tres magnitudines KL, MN, OP continuè proportionales, in ratione Y ad Z. & KL ita [a] diuidatur in QT, &c. vt seriem constituat rationis AB ad BC; & MN ita diuidatur in RV, &c. vt adæquet seriem rationis DE ad EF: ac demum diuidatur similiter OP in S & Z, vt rationis GH ad HI constituat seriem, factumque erit quod petebatur. [a] 90. huius.

PROPOSITIO XCIV.



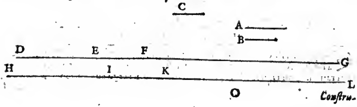
Datam magnitudinem AE, semel sectam in B, ita rursum secare in C & D, vt tam progressio rationis AB ad BC, quàm progressio rationis AD ad DB, terminetur in E.

Constructio & demonstratio.

Reperiatur primò ipsis AE, BE, tertia proportionalis CE. Dico progresionem AB, BC terminari in E. patet ex septuagesima nona huius. Deinde inter AE, BE, inueniatur media DE. patet rursum progresionem AD, DB terminari in E, per eandem propositionem: fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO XCV.

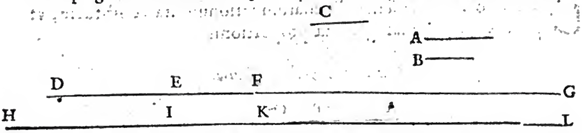
Datâ magnitudine DG, & proportione maioris inæqualitatis A ad B; itemque aliâ magnitudine C: examinare quomodo series progressionis datæ rationis A ad B, cuius primus terminus sit C, se habeat ad datam DG magnitudinem.



Constru-

Constructio & demonstratio.

Fiat vt A ad B, sic D G ad E G. Primò igitur si data magnitudo C, quę primus terminus progresſionis eſſe debet, æqualis ſit D E, erit ſeries rationis A ad B habens pri-

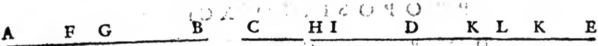


mum terminum C, æqualis datæ magnitudini D G nam fiat D E (id eſt C ad E F, vt A ad B. quoniam igitur D G eſt ad E G vt A ad B, erit B quoque D E ad E F
a 79. huius. vt D G ad E G. ergo progreſsio a rationis D E ad E F, (id eſt progreſsio rationis A ad B, habens primum terminum C) conſtituet magnitudinem D G.

Secundò ſi magnitudo C, quæ debet eſſe primus terminus, maior ſit quàm D E, erit progreſsio A B, habens primum terminum C, maior quàm D G. Fiat enim ipſi C æqualis H I, vtque A eſt ad B, ſic H I ſit ad I K, & progreſsionis H I ad I K b reperiatur terminus L. Igitur erit c vt H I ad D E ſic H L tota ſeries pro-
b 80. huius. c 84. huius. greſsionis, H I, I K, ad D G totam ſeriem progreſsionis D E, E F. atqui H I maior eſt, quàm D E, ergo & H L, maior eſt quàm D G.

Si denique C, minor ſit quàm D E. erit quoque progreſsio rationis A ad B, habens primum terminum C, minor quàm D G; quod eodem modo oſtendemus, quo primum. Fecimus igitur quod petebatur.

PROPOSITIO XCVI.



Data ſit progreſsio rationis A F ad F G, terminata in B; & alia magnitudo C E: Oporteat in magnitudine C E, ita vtrimque ad C & E conſtituere progreſsionem rationis A F ad F G (progreſsiones, nempe C H, H I, &c. & E K, K L, &c.) vt eundem habeant terminum D, qui ita diuidat C E, vt A B, C D, D E, ſint in continua analogia.

Constructio & demonstratio.

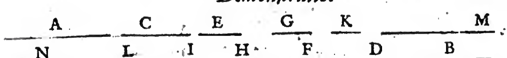
Rectam C E ita diuide per trigeſimam ſextam huius vt A B, C D, D E ſint continuę proportionales. Deinde per nonageſimam huius ita diuide C D, in H & I, vt ratio C H ad H I, eadem ſit cum ratione A F ad F G, ac ſimul progreſsio C H, H I, terminetur in D. Idem facito in E D. Factumque erit quod petebatur.

PROPOSITIO XCVII.

Si duarum ſerierum A M, B N termini A, B, C, D, E, F, G, &c. alternatim in continua ſint analogia.

Dico illas inter ſe eam proportionem habere, quam primi termini.

Demonstratio.



Qvoniam A, B, C ſunt tres continuæ proportionales; ergo A eſt ad C, in duplicata ratione A ad B; iterum cum C, D, E ſint tres continuæ, C erit ad E, in duplicata ratione C ad D; hoc eſt, vt patet ex datis A ad B: ergo cùm rationes A ad C, & C ad

A C E G K M

N L I H F D B

C ad E eiusdem duplicatæ sint, erunt A,C,E tres continuè proportionales in ratione duplicata A ad B. Quare series AM est series rationis duplicatæ; rationis A ad B: deinde quia B, C, D sunt continuæ proportionales, erit ratio B ad D, duplicata rationis B ad C. similiter ostendemus, rationem D ad F, duplicatam esse rationis B ad C. continuæ proportionales sunt igitur B, D, F. vnde series B N, est series duplicatæ rationis B ad C, id est ex datis, A ad B: similes a 14. huius. igitur series sunt AN & BN. quare sunt [a]inter se, vt primi termini A & B. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCVIII.

A B C D E F G

H I P K

L M O N

Continuetur ratio AB ad BC, habeatque terminum G. deinde fiat seriei rationis AB ad CD, æqualis magnitudo HK: seriei autem rationis AB ad DE, æqualis LN.

Dico HK magnitudinem maiorem esse quàm sit LN.

Demonstratio.

Quia HK est series AB, CD, &c. & LN est series AB, DE, &c. sumantur ex HK, partes HI, IP æquales ipsis AB, CD: ex LN verò partes LM, MO æquales ipsis AB, DE. Quoniam igitur seriei HI, IP terminus est K, erit HK [b]ad IK, vt HI ad IP: & quia seriei LM, MO, &c. terminus est N, erit LN [c]ad MN, vt LM ad MO. sed HI ad IP minorem habet rationem, quàm LM, id est HI ad MO. Ergo HK ad IK, minorem habet, quàm LN ad LM, & per conuersionem rationis KH ad HI, maiorem habet quàm LN ad LM. ergo permutando HK ad LN, maiorem habet, quàm HI ad LM. Quare cùm ex const. HI, LM sint æquales, necesse est HK maiorem esse quàm LN. Quod erat demonstrandum. b 12. huius. c ibid.

PROPOSITIO XCIX

Series rationis AB ad BC, terminetur in M; assumatur autem ex serie AM, terminus quicumque DE.

Dico rationis AB ad DE seriem, vnà cum serie rationis BC ad EF, ac serie rationis CD ad FG, æquari seriei rationis AB ad BC.

A B C D E F G H I K L M

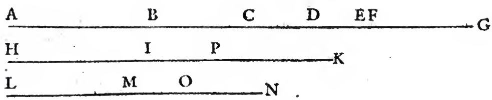
Demonstratio.

Quandoquidem omnes AB, BC, CD, DE, &c. in continua sint analogia, patet ex elementis AB, DE, GH & sic in infinitum esse continuè proportionales. Similiter BC, EF, HI, &c itemque CD, FG, IK esse continuè proportionales: ergo series trium rationum AB, DE, BC, EF, CD, FG, continuantur perpetuò; intra seriem AB, BC, CD, &c. ita vt in his tribus seriebus simul sumptis, nec plures, nec pauciores termini reperiantur, quàm sint in serie AB, BC, CD, &c. manifestum igitur est has tres series, seriei AB, BC, &c. æquales esse. Quod erat demonstrandũ.

PROPOSITIO C.

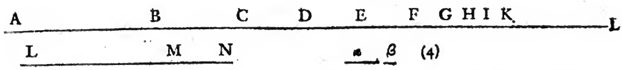
Series rationis AB ad BC terminetur in G; seriei autem rationis AB ad CD, æqualis sit HK; item seriei rationis BC ad EF, æqualis sit LN. Dico seriem AG, duabus HK, LN, maiorem esse.

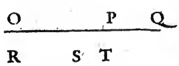
Demonstratio.



a 98. huius. Series BC, EF, &c. [a] minor est serie BC, DE, &c. ergo series BC, EF, &c. cum serie AB, CD, &c. minor erit, quam series BC, DE, &c. vnà cum serie AB, CD, &c. atqui per præcedentem series BC, DE, &c. cum serie AB, CD, &c. constituit seriem AB, BC, CD, DE, &c. hoc est magnitudinem AG. ergo series BC, EF, &c. cum serie AB, CD, &c. minorem constituit, quàm AG: ergo HK, LN series æquales seriebus AB, CD, &c. BC, EF, &c. minores sunt, quàm series AG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CI.





Series continuè proportionalium AB, BC, CD, &c. terminetur in L. Detur autem proportio α ad β, multiplicata rationis AB ad BC, iuxta datum aliquem numerum (quatuor exempli causa) & quot sunt vnitates in dato numero, tot vna minùs fac magnitudines LM, OP, RS, æquales datæ seriei terminis AB, BC, CD.

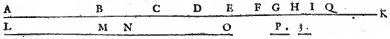
Dico series, rationis α ad β, quarum primi termini sint L, O, R, simul sumptas, constituere eandem magnitudinem, quam series rationis AB ad BC.

Demonstratio.

Fiat vt α ad β, sic LM ad MN, & OP ad PQ, & RS ad ST; erunt ergo omnes hæ rationes quadruplicatæ rationis AB ad BC: & quoniam LM, AB, æquales sunt, eandem habebunt rationem ad MN; ergo & ratio AB ad MN, quadruplicata est rationis AB ad BC; est autem & ratio AB ad DE, quadruplicata rationis AB ad BC. ergo vt AB ad DE, ita AB ad MN. æquantur igitur DE & MN: series igitur rationis LM ad MN, est series rationis AB ad DE. Similiter ostendam seriem rationis OP ad PQ, esse seriem rationis BC ad EF, & seriem rationis

b 99. huius. RS ad ST, seriem esse rationis CD ad FG. atqui hæ tres [b] series simul sumptæ, adæquant seriem rationis AB ad BC; ergo etiam & illæ eandem adæquant. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CII.



SEries rationis A B ad B C continuatæ, terminetur in K. Data autem sit L M æqualis A B, & quiuis numerus (putà 3.) deinde fiat ratio L M, ad M N multiplicata rationis A B ad B C, iuxta datum numerum; sitq́; rationis L M ad M N terminus O.

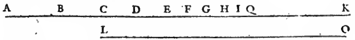
Dico seriem A K, ad seriem L O, eandem habere proportionem, quam totidem termini seriei A B, B C, C D quot sunt vnitates in dato numero, habent ad primum A B.

Demonstratio.

CVm, exempli causa, numerus datus ponatur ternarius, erit ratio L M ad M N, triplicata rationis A B ad B C; ostendendum nobis est, A K esse ad L O, vt tres primi termini D A ad primũ A B. ex serie A K sume sex terminos A G: Igitur proportio A D [a] ad D G, triplicata est proportionis A B ad B C; æqualis igitur est rationi L M ad M N, hoc est [b] rationi L O ad M O. cùm enim O sit terminus seriei L M, M N, erit L O ad M O, vt L M ad M N; Deinde quia K terminus est seriei A B, B C, erunt [c] tres A K, B K, C K continuæ proportionales: adeoq́ue omnes etiam sequentes erunt continuæ: Quare & A K, D K, G K, inter quas par continuè proportionalium numerus interijcitur, ex elementis patet esse continuè proportionales. Vnde A K, [d] est ad D K, vt A D ad D G, id est (quemadmodum iam ostendi) vt L O ad M O. Itaque per conuersionem rationis A K est ad A D, vt L O ad L M, & permutando A K ad L O, vt A D ad L M, id est ex datis A B. Quod erat demonstrandum.

a 32. huius.
b 82. huius.
c Ibid.
d 1. huius.

PROPOSITIO CIII.



EX serie continuè proportionalium A K, sumatur quiuis terminus vt H I.

Dico seriem rationis A B ad B C, habere proportionem ad seriem rationis A B ad H I, quam habet H A (omnes nempe termini ipsum H I præcedentes) ad A B primum terminum.

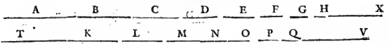
Hæc propositio, vt consideranti facilè patebit, eadem est cum præcedenti, sed aliter & commodiùs fortasse proposita. Quare eadem erit vtriusque demonstratio.

Corollarium.

EX hoc theoremate licebit praxim desumere, assignato quouis termino H I, in serie A K, rationis A B ad B C, reperiendi magnitudinem toti seriei rationis A B ad H I æqualem. Nam si fiat vt H A ad A B, sic K A ad aliam L O, erit L O æqualis toti seriei rationis A B ad H I.

Fateor tamen opus non esse ad hanc praxim recurrere, cùm vniuersalem methodum, eamq́ue facillimam reperiendi magnitudinem, toti seriei cuiuscumque rationis æqualem, propositio 80. huius suppeditet.

PROPOSITIO CIV.



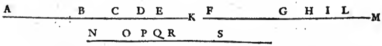
DAtæ ſint continuè proportionalium ſeries binæ, A X, K V rationum diuerſarum, ita tamen vt A, K, L, B etiam ſint continuæ.

Dico ſeriem A,K,L,M,N, &c. terminatam in V, eam habere proportionem ad ſeriem A,B, C, D, &c. terminatam in X, quam A, K, L ſimul ſumpti ad A primum terminum.

Demonſtratio.

ADdatur ipſi K terminus T in directum, æqualis ipſi A: ratio igitur (quod ex hypotheſi colliges) T ad M, triplicata eſt rationis T ad K. Quia autem A, K, L, B ponuntur continuæ proportionales, erit L ad B, vt K ad L: ſed etiam L eſt ad M, vt
a 9. Quinti. K ad L; ergo L ad B, & M, eandem habet rationem: adeoque a B & M æquales ſunt. Sunt verò etiam æquales A T, ergo ratio A ad B, eadem eſt cum ratione T ad M. quare ratio A ad B, triplicata eſt rationis T ad K. cùm ergo vtriuſque ſeriei initium, idem ſit terminus A, erit ſeries T, K, L, &c. id eſt ſeries A, K, L, M, &c.
b 102. Huius. b ad ſeriem A, B, C, D, &c. vt tres primi termini L, K, T, hoc eſt L, K, A, ſimul ſumpti ad T, hoc eſt ad A, primum terminum: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CV.



DAtæ ſint binæ ſeries continuè proportionalium magnitudinum in diuerſis rationibus, terminatæ in K & M; & ab æqualibus terminis A B, F G incipientes. Fiat autem ſecundo termino B C, vnius ſeriei æqualis N O; & G H ſecundo termino alterius ſeriei, æqualis O P; Deinde ratio N O ad O P (vel ratio OP ad N O, ſi O P maior ſit quàm N O) in infinitum continuetur.

Dico N O eſſe ad P Q, vt C D ad H I; & N O eſſe ad Q R vt D E ad I L, atque ita in infinitum.

Demonſtratio.

c 27. huius. CVm ſeries A K, F M incipiant ab æqualibus terminis, erit ratio c C D ad H I, rationis B C ad G H, hoc eſt, ex conſtructione, rationis N O ad O P, duplicata; Atqui etiam ratio N O ad P Q, duplicata eſt, ex datis, rationis N O ad OP, eædem igitur ſunt rationes C D ad H I, & N O ad P Q; ſimiliter ratio D E ad I L, triplicata eſt rationis B C ad G H, hoc eſt rationis N O ad O P: Quare cùm & ratio N O ad Q R, eiuſdem rationis N O ad O P, ſit triplicata, eædem erunt rationes D E ad I L, & N O ad Q R. Atque ita in infinitum, ſimili demonſtratione procedemus. Patet igitur Theorematis veritas.

PRO-

PROPOSITIO CVI.

DAtæ ſint duæ rationes ſimiles, AB ad CD, & BC ad DE, quæ terminis ſic alternatim poſitis, continuentur.

Dico vtriuſque rationis in infinitum continuatæ eundem terminum futurum.

A B C D E F G K

Demonſtratio.

QVoniam ex hypotheſi AB eſt ad CD, vt BC ad DE; erit permutando componendo, rurſumque permutando AC ad CE, vt BC ad DE: ſimiliter quia CD eſt ad EF, vt DE ad FG, erit permutando componendo, rurſumque permutando, CE ad EG, vt DE ad FG; hoc eſt ex hypotheſi vt BC ad DE, hoc eſt ex iam demonſtratis, vt AC ad CE: ſunt igitur AC, CE, EG continuæ proportionales. Quod ſi rationes AB ad CD, & BC ad DE, in infinitum continuentur, oſtendam pariter, rationem AC ad CE, in infinitum continuari, per terminos continuè proportionales AC, CE, EG, &c. Inueniatur igitur a terminus ſeriei AC, CE, EG, &c. ſitque K. Itaque non eſt punctum aſsignabile, inter puncta A & K, vltra quod non cadat aliquis terminus ſeriei AC, CE, EG. Quare cùm rationum AB ad CD, & BC ad DE continuatarum, termini omnes ita contineantur in ſerie AC, CE, &c. vt ſinguli termini ſeriei AC, CE, &c. contineant vnum terminum rationis AB ad CD, & vnum terminum rationis BC ad DE; manifeſtum quoque eſt nullum punctum aſsignari poſſe inter A & K, vltra quod non cadat aliquis terminus, tam rationis AB ad CD, quàm rationis BC ad DE; neutra igitur ſeries terminabitur inter A & K: ſed neque vlli dictarum rationum termini tranſilient K, cùm perpetuò contineantur in ſerie AC, CE, EG, &c. (quæ ex conſtructione non tranſilit vnquam K) ergo binæ ſeries rationum AB ad CD, & BC ad DE, eundem habent terminum K. Quod erat demonſtrandum.

a 8. huius.

PROPOSITIO CVII.

A C E G I F D B

MAgnitudo AB biſecta ſit in C, BC autem in D; & CD in E; & DE in F; & EF in G; & FG in I; atque hoc ſemper fiat:

Dico alternæ huius progreſsionis terminum fore in puncto, quo magnitudo AB, diuiditur in partes, habentes rationem quam vnum ad duo, ſiue terminum progreſsionis abſcindere BG, tertiam partem magnitudinis AB.

Demonſtratio.

QVoniam DC dupla eſt CE, & BC dupla DC, erit BC, hoc eſt AC, quadrupla ipſius CE: ſimiliter cùm FE dupla ſit GE, & DE dupla FE, erit & DE, hoc eſt CE, quadrupla EG; ſunt igitur AC, CE, EG tres continuæ in proportione quadrupla. Deinde cùm ED ex hypotheſi dupla ſit DF, & CD dupla ED; erit iterum CD, hoc eſt BD, quadrupla DF; ſimiliter quia GF dupla eſt FI, & EF dupla GF, erit EF, hoc eſt DF quadrupla FI: ſunt igitur BD, DF, FI continuæ in ratione quadrupla. Itaque ſi alterna illa biſectio ſine ſtatu continuetur, conſtituetur vtrimque progreſsio in infinitum, proportionis quadruplæ: & quoniam AC quadrupla eſt CE, erit & BC eiuſdem CE quadrupla; eſt verò & CE, quadrupla EG, atque ita in infinitum; progreſsio igitur AC, CE, EG, &c. eadem eſt cum progreſsione

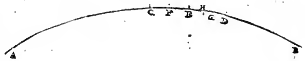
A C E G I F D B

gresſione B C, C E, E G, &c. & eundem terminum habet: Atqui progreſsionis quadruplæ B C, C E, &c. terminus H, ſecat [a] C B in ratione vnius ad duo, ergo etiam terminus progreſsionis A C, C E ſecat C B, in ratione vnius ad duo. Quare C H dimidia eſt ipſius H B, & C B ſeſquialtera H B: ideoque A B tripla ipſius H B; ac denique A H dupla H B; ergo terminus progreſsionis A C, C E, &c. ſecat A B, in ratione vnius ad duo. vlterius cùm progreſsiones A C, C E, &c. B D, D F, F I, &c. eiuſdem ſint rationis, nempe quadruplæ, erit tota ſeries progreſsionis A C, C E, E G, &c ad totam ſeriem progreſsionis B D, D F, &c. [b] vt A C ad B D: Quare cùm A C dupla ſit D B, erit quoque ſeries progreſsionis A C, C E, &c. id eſt A H. dupla ſeriei B D, D F, &c. Atqui A H iam oſtendimus etiam duplam eſſe H B; ergo A H, ad ſeriem progreſsionis B D, D F, eandem habet rationem quam ad H B: vnde H B æqualis eſt ſeriei B D, D F: vnde progreſsionis B D, D F, ſeries terminatur etiam in puncto H. Quare per eadem procedens puncta, cùm alterna illa biſectio conſtituat vtramque progreſsionem, illius quoque terminus erit punctum H. quo diuiditur A B in ratione vnius ad duo: quod erat demonſtrandum.

a 89. huius.

b 84. huius.

Corollarium.



EX hoc Theoremate reperietur arcus triſectio, ſi independenter à triſectione, alternæ illius progreſsionis terminus inueniatur. Cùm enim Theorema vniuerſale ſit. & in quauis magnitudine demonſtratio allata valeat, ſi in arcu dato A B, ſimilis alterna fiat biſectio, terminus quoque progreſsionis alternæ H, abſcindet tertiam arcus partem B H: proindeque reperto aliâ viâ dicto termino, arcus etiam dati triſectio reperietur.

PROPOSITIO CVIII.

A 1 B 3 E 5 H 7 K 8 G 6 F 4 D 2 C

P

DAta ſit magnitudo A C vtcunque ſecta in B: Deinde fiat vt A C ad B C, ſic B C ad B D, & B D ad E D, & E D ad E F, & E F ad H F; atque ſic alterna diuiſio ſemper fiat;

Dico vtrimque conſtitutum iri duas progreſſiones ſimiles, magnitudinum A B, B E, E H, &c. & C D, D F, F G, &c. continuè proportionalium in ratione duplicatâ proportionis A C ad B C.

Demonſtratio

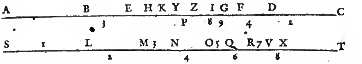
QVoniam ex datis A C, B C, B D, E D, E F, &c. ſunt continuæ proportionales, erunt eorũ differentiæ [c] A B, C D, B E, D F, E H, F G, &c. etiam in continua analogia, & quidem eo ordine vt prima, tertia, quinta, ſeptima, & ſic deinceps (intermiſſo ſemper numero medio) conſtituant ſeriem A; ſecundo verò, quarta, ſexta, octaua, & ſic deinceps (ſemper omiſſo numero medio) ſeriem C, conſicient igitur vt A B ad B E, prima ad tertiam, ſic C D eſt ad D F, ſecunda ad quartam; & ſic deinceps; adeoque rationes A B ad B E, & B E ad E H, &c. ſimiles erunt rationibus

c 1. huius.

C D ad

CD ad DF, & DF ad FG, &c. est autem AB ad BE, vt a AC ad BD, hoc est a ibid.
in ratione duplicata AC ad BC; & CD est ad DF, vt BC est ad ED secunda ad quartam, hoc est in ratione duplicata BC ad BD, hoc est AB ad BC, ergo duæ illæ progresśiones, similes erunt, & in ratione duplicata AB ad BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CIX.



Iisdem positis progresśio vtraque AB, BE, EH, &c. CD, DF, FG, &c. ex alternâ illâ diuisione nata, terminum habebit eundem in magnitudine AC.

Demonstratio.

Sumatur ST æqualis AC; & capiantur ex ea magnitudines LT, MT, NT, OT, &c. quæ æquales sint continuè proportionalibus BC, BD, ED, EF, &c. erunt igitur SL, LM, MN, NO, &c. ipsis quoque AB, CD, BE, FD, &c. æquales; cùm enim tota AC, ST, & ablata BC, LT, æqualia sint, necesse est etiam reliqua AB, SL esse æqualia: & rursum quia tota BC, LT, & ablata BD, MT æqualia sunt, patet quoque reliqua CD, LM æqualia esse. Similiter ostendam & BE ipsi MN, DF ipsi NO, atque ita in infinitum, reliqua reliquis æqualia esse. ergo vtraque progresśio A & C, progresśioni SL, LM, æquales sunt simul sumptæ. & quoniam ST, LT, MT, &c. æquantur continuè proportionalibus AC, BC, BD, &c. etiam ipsæ erunt continuæ b ideoque SL, LM, MN, &c. sunt continuæ b 1. huius.
proportionales. atque ita sine termino continuatur ratio, SL ad LM; ergo progresśio c SL ad LM, terminatur in T, siue constituit magnitudinem ST: quare c 79 huius.
cùm vtraque progresśio A & C simul sumptæ, æquentur progresśioni SL, LM: etiam constituent magnitudinem ST, hoc est AC ex constructione: eundem igitur terminum habeant in magnitudine AC necesse est. nam si diuersos habeant, sint illi Y & Z. vel inter vtrumque terminum Y, Z superetit media quædam magnitudo, quę ad neutram seriem pertineat, vel aliqua erit magnitudo, vtrique seriei communis, eritque Z terminus seriei A, & Y terminus seriei C: neutrum autem fieri potest; nam primo dato, constitueret vtraque series magnitudinē minorem quàm AC; & posito altero, maiorem quàm AC. Quod vtrumque repugnat modò demonstratis; non igitur diuersos habebunt terminos dictę progresśiones, sed eundem: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CX.

Iisdem positis, geminæ progresśionis AB, BE, & CD, DF ex alterna sectione natæ, communis terminus P, magnitudinem AC, diuidet in ratione AC ad BC.

Demonstratio.



Per præcedentem ponatur P esse communis vtriusque terminus, quoniam igitur similes sunt progresśiones A & C, erit tota series progresśionis A, hoc est AP, d 108. huius.
P ad

A B K H K I G F D C

P

a 84. huius. ad totam seriem progressionis C hoc est CP, a vt AB ad CD. quia autem ex hypo-
b 1. huius. thesi AC, BC, BD sunt continuæ proportionales, erit AB ad CD, b vt AC ad BC; est igitur AP ad CP, vt AC ad BC. terminus ergo P vtriusque progressionis, diuidit AC, in ratione AC ad BC: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXI.

A B E P F D C

Iisdem positis, terminus alternæ sectionis, siue progressionis AC, BC, BD, ED, EF, &c. diuidet magnitudinem AC, in ratione AC ad BC.

Demonstratio.

Vtriusque progressionis AB, BE, & CD, DF, termini simul sumpti sunt iidem cum terminis progressionis AC, BC; BD, ED, &c alternatim sumptis. ergo progressio alterna AC, BC, BD, &c. eundem habet terminum quem progressiones AB, BE & CD, DF. sed harum terminus per præcedentem, diuidit AC, in ratione AC ad CB; ergo & alternæ progressionis AC, BC, BD, &c. terminus in eadem ratione diuidet magnitudinem AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXII.

Data sit continuè proportionalium series, constituens magnitudinem AK: sit autem LN, æqualis AK, fiatque primæ AB, æqualis LM; secundæ verò BC, æqualis fiat NO; tertiæ autem CD, sit æqualis MP, & quartæ DE, æqualis OR: atque hoc alternatim semper fiat, ita vt omnes AB, CD, EF, GH, &c. sint ex parte L; omnes verò BC, DE, FG, HI, &c. sint ex parte N.

Dico terminum huius alternę progressionis, AB, NO, MP, OR, PQ, RS, &c; diuidere LN, in ratione AB ad BC.

Demonstratio.

A B C D E F G HI K

L M P Q T Y Z V S R O N

X

Quoniam AB, BC, CD, DE, sunt continuæ proportionales, etiam AB, CD, EF, &c sunt continuæ, & quidem in ratione duplicata AB ad BC; vt patet ex elementis. Similiter in eadem ratione duplicata AB ad BC, erunt continuæ proportionales omnes BC, DE, FG, &c atqui omnes AB, CD, &c. sunt ex parte L, & omnes, BC, DE, &c ex parte N. Igitur in magnitudine LN per alternam illam progressionem, constituuntur duæ series appositæ similes, eiusdem nempe ratio-
c 84. huius. nis duplicatæ AB ad BC. Quare series tota LM, c MP, &c est ad seriem totam NO, OR, &c vt LM ad NO, hoc est AB ad BC. Deinde quia per series AB,
d 99. huius. d CD, EF, &c & series BC, DE, &c. simul sumptæ, æquantur seriei AB, BC, CD, DE, &c series quoque L, & N, simul sumptæ æquabuntur seriei AB, BC, CD, DE, &c Quare cùm hæc ex hypothesi constituat magnitudinem AK, id est ex hypothesi LN, etiam series L & N, magnitudinem LN constituent. ergo eundem

dem in magnitudine L N, habeant terminum necesse est: si enim diuersos habeant vt Y, Z; vel inter vtrumque terminum superest media quædam magnitudo, quæ ad neutram seriem pertineat, vel aliquid erit vtrique commune, ita vt terminus seriei L, sit Z, terminus verò seriei N, sit Y, neutrum autem fieri potest: nam primo dato constitueret vtraque series magnitudinem minorem quàm L N, altero autem posito maiorem; quod vtrumque iam demonstratis repugnat. eundem igitur terminum X, habebunt series L & N: cùm igitur ostensum prius sit, seriem L esse ad seriem N, vt A B ad B C, vtriusque seriei terminus communis X diuidet magnitudinem L N, in ratione A B ad B C. Atqui alterna illa magnitudinum L M, N O, M P, O R, &c. progressio, constituit series L & N, ergo ipsius quoque terminus erit X, diuidens L N in ratione AB ad BC: quod erat demonstrandum.

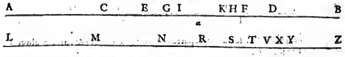
PROPOSITIO CXIII.

Centesima vndecima aliter demonstratur.

DAta sit magnitudo A B vtcumque diuisa in C, fiat autem vt A B ad B C, sic B C ad C D, & C D ad D E, & D E ad E F, & E F ad F G, atque hoc semper fiat.

Dico alternæ huius progresionis terminum *a*, diuidere A B, in ratione A B ad B C.

Demonstratio.



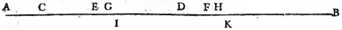
SVmatur enim L Z æqualis A B, & singulis in quas diuiditur alternatim A B, continuis proportionalibus A B, B C, C D, D E, &c. æquales fiant M Z, N Z, R Z, &c. erunt igitur etiam hæ [a] ideoque & L M, M N, N R, &c. continuæ proportionales; & progressionis huius L M, M N, &c. [b] terminus erit Z; & quoniam A B, L Z & B C, M Z, æquantur, etiam A C, L M æquales erunt. rursus quia B C, M Z, & C D, N Z, æquales sunt, etiam B D, M N æquales erunt. Similiter ostendam C E, ipsi N R, & D F ipsi R S, & G E ipsi S T, & F H ipsi T V (& sic in infinitum) æquales esse: habemus igitur progresionem alternam magnitudinum A C, B D, C E, D F, &c. qualis in præcedente propositione proponebatur; cuius terminus X diuidit A B in ratione L M ad M N. Igitur cùm ex progressione alterna hic propositâ A B, B C, C D, D E, E F, &c. illa altera oriatur; ita vt tam progressio A B, B C, C D, D E, &c. quàm progressio A C, B D, C E, D F, &c. in punctis iisdem C, D, E, F, G, H, &c. diuidant magnitudinem A B, huius quoque terminus erit *a*, diuidens A B in ratione L M ad M N, [c] hoc est in ratione L Z ad M Z, hoc est ex constructione in ratione A B ad C B. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. huius.
[b] 79. huius.
[c] 61. huius.

Corollarium.

SI verò fiat vt A C ad C B, sic B D ad D C, & C E ad E D, & D F ad F E, atque ita semper: huius quoque alternæ progressionis terminus, diuidet A B in ratione A B ad B C: cùm enim sit vt A C ad C B, sic B D ad D C & C E ad E D, &c. componendo erit A B ad B C, vt B C ad C D, & C D ad D E, &c. atqui terminus progressionis A B, B C, D C, C D, &c. diuidit A B in ratione A B ad B C. ergo & progressionis A C, C B, B D, D C, &c. terminus, diuidet A B in ratione A B ad B C; cùm enim vtraque hæc progresio in punctis semper iisdem secet A B, eundem vtraque terminum habere debet.

Lemma primum.



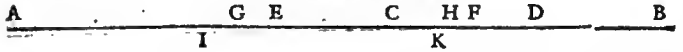
DAta sit magnitudo A B secta in tres partes æquales, in I & K: & rursum aliter secta in C, inter A & I.

Dico bisectionem partis C B, cadere inter I & K in D; & bisectionem partis D A, cadere inter I & C in E; rursum bisectionem partis E B, contingere inter D & K, in F; ipsius autem F A bisectionem, inter E & I in G: atque ita in infinitum.

Demonstratio.

QVoniam C B maior est, quàm I B dupla A I; erit ipsius C B dimidia, maior quàm A I. ergo bisectio ipsius C B, cadit vltra I, versus B. Iterum C B plus est, quàm dupla K B, adeoque ipsius C B dimidia, maior quàm B K; quare bisectio C B, cadit vltra K, versus A: adeoque cadit inter I & K, in D. Deinde cùm C B plus sit quàm duæ tertiæ, ipsius A B, erit C D eius dimidia, plus quàm vna tertia ipsius A B; sit autem A C ex datis minor, quàm vna tertia; ergo C D maior est A C. & bisectio ipsius D A, cadet vltra C versus B. similiter cùm A I etiam maior sit quàm D I, cadet bisectio ipsius D A vltra I versus A, adeoque inter C & I, in E; non aliter ostendemus reliqua, quæ in assertione proposuimus. Constat igitur veritas lemmatis.

Lemma secundum.



DAta rursum sit A B secta in tres partes æquales, in I & K; & rursum aliter secta inter I & K, in C.

Dico bisectionem partis C B cadere inter K & B in D; & bisectionem partis D A, cadere inter C, & F, in E; bisectionem autem partis E B, cadere inter K & D in F; partis verò F A, bisectionem contingere inter E & I in G; atque ita in infinitū.

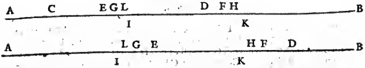
Demonstratio eadem propè quæ lemmatis præcedentis.

PROPOSITIO CXIV.

EX magnitudine A B secta in tres partes æquales in I & K, sumatur A C minor vel maior tertiâ parte totius A B, & bifariam diuidatur C B in D, & D A bifariam in E, & E B in F, & F A in G. Rursum G B bifariam in H, & H A in L. atque hoc semper fiat.

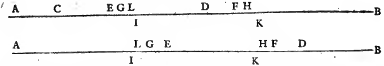
Dico huius progressioni alternæ terminos diuidere magnitudinem A B in tres partes æquales.

Demonstratio.



CVm C B dupla sit D B, & E B dupla F B, erit C B ad D B, vt E B ad F B, ergo C E ad D F, ª vt E B ad F B. Quare cùm E B dupla sit F B, etiam C E, ipsius D F dupla erit. Deinde cùm D A dupla sit E A, itemque F A dupla ipsius G A, erit

a 19. Quinti.



GA, erit D A ad E A, vt F A ad G A; ac proinde D F erit a ad G E, vt D A ad a Ibid.
E A. Quare cùm D A ipsius E A dupla sit, etiam D F dupla erit E G. vnde C E quadrupla est ipsius E G. Similiter ostendemus E G duplam esse F H, ipsam autem F H duplam esse G L, proindeque E G ipsius G L quadruplam esse: atque ita continuando fine statu, per alternam illam bisectionem constitui progressionem magnitudinum CE, EG, GL, &c. proportionis quadruplæ. eodem autem discursu quo priùs vsi fuimus, demonstrabimus D F esse quadruplam FH, & F H quadruplam sequentis termini, ac proinde etiam hic progressionē rationis quadruplæ statui. Vlterius quoniam tam ratio C B. ad D B, quàm I B ad K B, dupla est, erit CB ad DB, vt I B ad K B, & b C I ad D K, vt I B ad K B. Itaque cùm I B dupla sit K B, etiam b Ibid.
C I ipsius D K dupla erit; similiter D K ipsius E I duplam esse demonstrabimus. Igitur C I quadrupla est E I: ideoque C I est ad E I, vt C E ad E G. vnde progressionis C E c E G, &c. terminus est I; eâdem methodo discurrendi, ostendetur c 79. huius.
D K esse ad F K, vt D F est ad F H. Quare & progressionis D F, F H, &c. terminus est K. dum igitur vtraque progressio C E, E G, &c. D F, F H, &c. constituatur ab alterna illa bisectione, in propositione proposita, ipsius quoque termini erunt in I & K; vbi trifariam diuiditur magnitudo A B. Quod erat demonstrandum.

Assumpsimus A C minorem aut maiorem tertiâ parte magnitudinis data A B; quia si æqualis vni tertia foret, bisectiones alterna in eadem semper puncta I & K inciderent; vti manifestum est, assertionem propositionis consideranti.

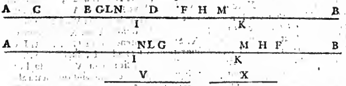
Lemma.

PARS PRIMA.

Data sit magnitudo A B secta in I & K secundùm rationem V ad X: ita vt A K sit ad K B, vt B I ad I A: diuisa sit deinde A B adhuc aliter inter A & I in C.

Dico si C B diuidatur in ratione V ad X, sectionem fieri vltra K in D; item si D A diuidatur in ratione V ad X sectionem cadere vltra I in E: rursum si E B diuidatur in eadem ratione, sectionem contingere inter K & D in F; & si F A, sectionem fore inter I & E in G. atque ita in infinitum.

Demonstratio.

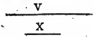


Cùm A K sit ad K B, vt B I ad I A, erit componendo A B ad K B, vt A B ad I A: ergo K B, I A, additoque communi I K etiam A K, I B æquantur: vnde cùm A K sit ad K A, vt V ad X, vtique I B ad K B, in eadem ratione erit: quare C B (ex datis maior quàm I B) maiorem habet rationem ad K B, quàm V ad X: ergo sectio ipsius C B, in ratione V ad X, cadit vltra K in D: similiter cùm A K sit ad K B, id est I A, sicut V est ad X, erit D A ad eandem I A, in minori ratione, quàm V ad X: vnde sectio ipsius D A in ratione V ad X, cadet vltra I in E: Quod autem sectio ipsius E B cadat vltra K, eodem quo priùs modo ostendetur: item quod vltra D, versus B sic ostendo: factâ C B ad D B, in ratione V ad X erit E B ad D B, in minori ratione quàm V ad X.

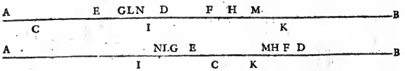
ergo sectio ipsius E B, in ratione V ad X, cadit vltra D, versus B: ergo cùm etiam vltra K versus A cadat, inter D & K, contingat necesse est, nempe in F: similiter sectionem ipsius F A inter I & E, futuram in G demonstrabimus, atque ita in infinitum; discursus enim idem omnibus diuisionibus sequentibus quadrat.

PARS SECVNDA.

Iisdem positis; si C cadat inter I & K (nã si inter B & K caderet, foret casus primæ partis) simili planè discursu demonstrabimus eadem omnia contingere quę priùs, hoc solùm mutato, quod signa diuisionum E, G, L, K, &c. D F, H M, &c. ad alterum latus ordine constituantur.



PROPOSITIO CXV.



Data sit proportio V ad X, & magnitudo A B ita secta in I & K, vt A K sit ad K B, & B I ad I A, sicut V est ad X. Aliter deinde diuidatur A B in C; quocumque tandem loco cadat C, modo non incidat in I aut K:

Fiat autem C B ad D B, vt V ad X; & D A ad E A, vt V ad X: item E B ad F B, & F A ad G A, & G B ad K B, & H A ad L A, fuerint inter se vt V, est ad X: Atque hoc semper continuetur.

Dico alternæ huius progressionis terminos, fore in I, & K, vbi A B, diuiditur in ratione V ad X.

Demonstratio.

Quoniam est ex constructione C B ad D B, vt E B ad F B (sunt enim vtraque ad inuicem in ratione V ad X) etiam C E reliquum, D F reliquum, erit vt C B ad
a 19. Quinti. D B, id est sicut V ad X: & quia D A est ad E A, vt F A ad G A (nempè in ratione V ad X) rursum erit D F ad E G, vt F A ad G A, hoc est vt V ad X: sunt igitur C E, D F, E G, tres continuæ proportionales in ratione V ad X. ergo ratio C E ad E G duplicata est rationis V ad X. Similiter ostendemus E G, F H, G L esse continuas in ratione V ad X, ideoque rationem E G ad G L, duplicatam esse rationis V ad X. Cùm ergo etiam ratio C E ad E G, sit rationis V ad X duplicata, erunt C E, E G, G L, in continua analogia; atque ita continuando sine statu alternam illam diuisionem, demonstrabimus constitui progressionem magnitudinum C E, E G, G L, L N, &c. continuè proportionalium in ratione duplicata V ad X, ab alterà verò parte, eodem planè discursu ostendemus D F, F H, H M, &c. esse continuas in ratione duplicata V ad X; ac proinde sic quoque constitui progressionem proportionis duplicatæ V ad X. vlterius quia A K est ad K B, vt B I ad I A, componendo A B erit ad K B, vt A B ad A I: ideoque K B, A I æquantur: additaq; I K communi, æquales erunt I B, A K: ergo vt A K ad K B, id est ex cõstructione vt V ad X, sic I B ad K B: Quare cùm & C B ad D B, sit vt V ad X, etiam C B erit ad D B, vt I B
b 19. Quinti. ad K B. allatis ergo I B, K B, C I erit [b] ad D K, vt C B ad D B reliquum ad reliquum, hoc est ex cõstructione vt V ad X. similiter demõstrabimus D K esse ad E I, vt V ad X, erunt

erunt igitur C I, D K, E I continuę proportionales in ratione V ad X: ideóque ratio C I ad E I, duplicata erit rationis V ad X; quare cùm & ratio C E ad E G, eiusdem ostensa sit esse duplicata, erit C I ad E I, vt C E ad E G, & permutando vt C E ad C I, sic E G ad E I, vnde terminus [a] progressionis C E, E G, &c. est I. simili discursu ostendetur, etiam D K esse ad F K, vt D F est ad F H; quare huius quoque progressionis terminus erit K. Itaque cùm vtraque progressio C E, E G, &c. D F, F H, &c. ab alterna illa diuisione constituatur, ipsius quoque termini erunt I & K; vbi magnitudo A B, diuiditur in ratione V ad X. Quod erat demonstrandum. [a 79. huius.]

Scholion.

HIc quoque voluimus punctum C non incidere in I aut K; eò quod si in alterutrum incideret, diuisiones quoque alterna, in eadem semper puncta I & K, deberent incidere; vt patet consideranti statum Theorematis.

Caterùm qui hanc propositionē cum priori contulerit, facilè intelliget hanc vniuersalem esse, illam verò particularem casum complecti. placuit enim id subinde tum hic, tum alibi factitare, tum quia in particularibus casibus eiusdem Theorematis veritas, clarius non raro atque illustrius emicat, tum quia à particularium casuum cognitione, faciliùs ad percipienda vniuersalium Theorematum demonstrationes proceditur.

PROPOSITIO CXVI.

A E G I B

C F H K O D

SInt duæ quantitates A B, C D; sitque A B diuisa in E & G, ita vt A E, sit non minor dimidio A B, & E G non minor dimidio E B; eodem modo diuisa sit C D in F & H, sintque A E, E G; C F, F H proportionales: & hoc semper fieri possit.

Dico totam A B esse ad totam C D, vt est A E ad C F.

Demonstratio.

SI enim non est proportio A B ad C D æqualis proportioni A E ad C F, erit vel maior vel minor: sit primò minor. cùm ergo ponatur A B ad C D, minorem habere rationem, quàm A E ad C F, habebit A B ad aliquam [b] minorem quàm C D [b 8. Quinti.] nempè ad C K, eandem proportionem, quam A E ad C F: & quoniam ex quantitatibus A B, C D, earumque residuis semper non minùs dimidio aufertur, si continuetur hæc ablatio per aliquos terminos, verbi gratia per tres C F, F H, H O, relinquetur tandem O D [c] minor quàm K D; ideoque C O erit maior quàm C K: si [c 1. Decimi.] iam ex A B totidem partes ad mentem propositionis A E, E G, G I, tollantur, erit ex hypothesi A E ad E G, vt C F ad F H, & E G ad G I, vt F H ad H O: ideoque permutando vt A E ad C F, sic E G ad F H, & vt E G ad F H, sic G I ad H O. ergo [d] vt A E vna antecedentium, ad C F vnam consequentium, sic omnes ante- [d 12. Quinti.] cedentes, id est linea A I ad omnes consequentes, id est ad lineam C O: sed vt A E ad C F, sic est ex constructione A B ad C K; ergo A I, est ad C O, vt A B ad C K; quod est absurdum; vt patet ex elementis. non est igitur proportio A B ad C D minor proportione A E ad C F.

A E G K I B C F H O D

Sit iam, si fieri potest, proportio A B ad C D maior proportione A E ad C F: itaque aliqua [e] minor quàm A K, habebit ad C D eandem rationem quam A E ad [e 8. Quinti.] C F. & quoniam aufertur semper non minùs dimidio, post aliquot partes, exempli gratiâ post tres A E, E G, G I, ablatas, relinquetur tandem I B minor quàm A K; ideoque A I erit maior quàm A K. Si iam totidem auferantur ex quantitate C D, nempè partes C F, F H, H O, erit ex hypothesi, & permutando A E, ad C F, vt E G,

ad

A E G K I B C F H O D

a 12. quinti. ad F H, item vt G I ad H O. ergo [a] vt A E vna antecedentium, ad C F vnam consequentium, ita omnes antecedentes, id est linea A I, ad omnes consequentes, nempè lineam C O. Atqui ex constructione vt A E ad C F, sic erit A K ad C D; ergo A I est ad C O vt A K ad C D, quod esse absurdum patet ex elementis. non est igitur ratio A B ad C D, maior ratione A E ad C F. patet ergo propositionis veritas.

Corollarium.

A E G I B

C F H K D

A Duabus quantitatibus A B, C D, auferri possint A E, C F, æqualia, & non minora dimidio ipsarum A B, C D; & à residuis E B, F D rursum auferri possint E G, F H, æqualia & non minora dimidio residuorum: si hoc semper fieri possit, æquales erunt quantitates A B, C D. Patet ex demonstratione propositionis.

Quamquam fatear hoc Theorema aliud non continere, quàm particularem casum propositionis prioris: tamen quia in libris sequentibus non semel vsui veniet, visus mihi sum operæ pretium facturus, si facilitatis causâ explicitè hîc apponerem.

Similiter hoc quoque Theorema eiusdem propositionis vniuersalis casus erit: si fuerint duæ quantitates, à quibus auferri semper possint non minora dimidio, sic vt ablata singula vnius, dupla perpetuò sint singulorum ex altera ablatorum, erit vna quantitas alterius dupla.

Quòd si ablata vnius, semper tripla fuerint ablatorum alterius, erit vna quantitas, alterius quadrupla. Atque ita in infinitum per proportiones quadruplam, quintuplam, &c. licebit procedere.

PROPOSITIO CXVII.

Q R

A G H I B C K L M D E N O P F

D Atæ sint tres magnitudines, aut plures A B, C D, E F & à singulis auferri possit non minùs dimidio, ita vt ablata A G, C K, E N sint in continua analogia Q ad R. Deinde à residuis auferri possit iterùm non minùs dimidio, ita vt ablata G H, K L, N O sint continuè proportionalia in ratione eadem Q ad R: & hoc semper fieri possit.

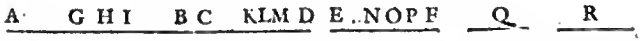
Dico propositas magnitudines A B, C D, E F esse in continua analogia.

Demonstratio.

Q Voniam A G est ad C K, ex hypothesi vt Q ad R; & G H ad K L, & H I ad L M, vt Q ad R, erunt partes ablatæ A G, C K, G H, K L; H I, L M, atque ita in finitum inuicem proportionales: Quare cùm ex hypothesi etiam singulæ sint non
b 116. huius. [b] minores dimidijs suorum integrorum, erit A B ad C D, vt A G ad C K, hoc est ex datis vt Q ad R. Similiter ostendam C D esse ad E F, vt C K ad E N, hoc est ex datis vt Q ad R. erunt igitur A B, C D, E F, continuæ proportionales magnitudines. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXVIII.



PRopositæ sint tres, aut plures magnitudines A B, C D, E F, & ratio Q ad R quæcumque, minoris inæqualitatis: Auferantur à singulis A G, C K, E N, ita vt ablata A G, C K, E N, sint ad sua tota, in ratione Q ad R & in eadem ratione Q ad R inter se continuè proportionalia;

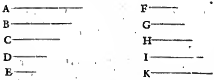
Dico si hoc semper fieri possit, propositas magnitudines A B, C D, E F esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVia ex hypothesi A G est ad AB, vt GH ad GB, erit etiam [a] reliquum GB ad reliquum HB, vt tota AB ad totam GB; sunt igitur AB, GB, HB &. eodem discursu etiam IB reliquæque in infinitum continuæ proportionales: vnde etiam [b] ablata A G, G H, H I, &c. sunt in continua analogiâ, & [c] terminus huius progressionis AG, GH, &c. est B. similiter ostendam ablata C K, K L, L M, &c. esse in continua analogia, cuius terminus sit D. & quoniam ex hypothesi A G est ad A B, vt Q ad R; & CK ad CD, vt Q ad R, erit A G ad A B vt CK ad CD; & inuertendo ac per conuersionem rationis AB ad GB, vt CD ad KD. Atqui A G, GH, HI, &c. sunt [d] continuæ proportionales in ratione A B, ad G B; hoc est vt iam ostendi C D ad K D; & per eandem C K, K L, &c. sunt etiam continuæ in ratione C D ad K D: Igitur A G, G H, &c. C K, K L, &c. similium rationum series sunt. Quare A B est ad [e] C D, vt A G ad C K. simili prorsus discursu ostendam C D esse ad E F vt C K ad EN. sunt autem ex datis A G, C K, E N, tres continuæ proportionales; ergo & A B, C D, E F in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

[a] 19. Quinti. [b] 1. Huius. [c] 79. huius. [d] 6. huius. [e] 14. huius.

PROPOSITIO CXIX.



SI data quælibet proportio maioris inæqualitatis A ad B, continuetur perpetuò; deuenietur tandem ad magnitudinem datâ minorem.

Demonstratio.

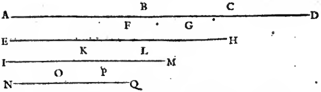
POnatur enim magnitudo quæuis F; & fiat F ad aliam G. vt B ad A; continueturque ratio F ad G, donec per septuagesimam septimam huius habeatur K magnitudo, maior A magnitudine; & per totidem terminos continuetur ratio A ad B. Dico E minorem esse quàm F. est enim vt A ad B, sic G ad F; & vt B ad C, sic H ad G, &c. ergo ex æquo in proportione perturbata, vt A ad E, sic K ad F, sed A minor est quàm K, ergo & E [f] quàm F. Quod erat demonstrandum.

[f] 14. Quinti.

Scholion.

HVc etiam pertineret propositio septuagesima septima, nisi illam, quòd ad terminum progressionis inueniendum esset necessaria, coacti essemus citeriori loco collocare.

PROPOSITIO CXX.



Sit magnitudo aliqua AD, secta in tres partes AB, BC, CD: ablatâ mediâ BC vel alterutrâ extremarum, residuis AB, CD fiat æqualis EH, quæ diuidatur in tres partes EF, FG, GH in eadem ratione qua secta est AD: si hoc continuetur;

Dico relinqui tandem magnitudinem datâ minorem.

Demonstratio.

a 11. Quinti. Qvoniam AB est ad BC, vt EF ad FG, & BC ad CD, vt FG ad GH: igitur permutando AB ad EF, vt BC ad FG, & CD ad GH: ergo a vt AB ad EF, sic AD, ad EH: & permutando AB ad AD, vt EF ad EH. similiter

b 24 Quinti. demonstrabimus DC esse ad DA, vt HG ad HE: ergo AB b cum CD, ad AD, vt EF cum GH ad EH: & inuertendo AD ad AB cum CD, id est ex hypothesi EH, vt EH ad EF cum GH, id est ex hypothesi IM. sunt igitur AD, EH, IM in continua ratione minoris inæqualitatis. non aliter demonstrabimus NQ, cæteraque residua in infinitum cum prioribus eandem proportionem minoris inæqualitatis continuare. Quare c relinquetur tandem magnitudo datâ minor. Quod erat demonstrandum.

c 119. Huius.

PROPOSITIO CXXI.



Data sit AB magnitudo vtcumque secta in C, ac inter AB, CB media proportionalis ponatur DB; rursum inter DB, CB media sit EB, & hoc continuetur.

Dico ex AC relinqui tandem magnitudinem datâ minorem.

Demonstratio.

Per primam huius; AD est ad DC vt AB ad DB: atqui AB maior est quàm DB, ergo etiam AD est maior quàm DC: ergo AD maior est quàm dimidia AC: Similiter quoniam DB, EB CB sunt continuæ, erit DE ad EC, vt DB ad EB: quare DE maior est quàm EC, ideoque & maior quàm dimidia DC. Eodemmodo probabitur EF esse plus dimidio EC. atque ita in infinitum semper plus dimidio ab AC, eiusq; residuis auferetur. Quare d relinquetur tandem magnitudo datâ minor. Quod erat demonstrandum.

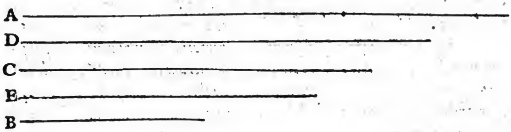
d 1. Decimi.

PRO-

PROPOSITIO CXXII.

INter duas magnitudines inæquales A B, inueniatur media proportionalis C, & inter has tres A,C,B, inueniantur duæ mediæ D & E: rursum inter illas quinque, quatuor statuantur mediæ, & hoc semper fiat.

Dico hac praxi tandem exhibendas lineas quæ simul sumptæ maiores sint datâ quauis magnitudine.



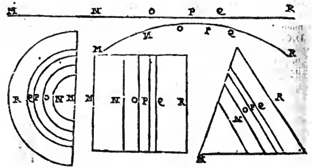
Demonstratio.

QVoniam C media est inter A & B, habebit A ad B maiorem rationem, quàm ad C; ergo C maior est quàm B: ergo tres magnitudines A, C, B maiores erunt quàm tripla ipsius B. Similiter ostendam D & E maiores esse singulas, quàm B: ac proinde A, D, C, E, B simul sumptas maiores esse, quàm quintupla ipsius B: atque ita demonstrabimus si plures semper mediæ reperiantur, summam magnitudinum, excessuram B magnitudinem determinatam, secundùm quemuis numerum assignabilem. ex quo liquet magnitudines illas simul sumptas, futuras quauis datâ quantitate maiores.

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM PARS TERTIA

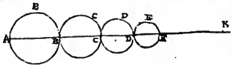
Progreßiones terminatas planis applicat, præſertim ſimilibus.

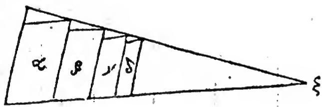
QVæ de progreſſionibus Geometricis ſecundâ parte hactenus demonſtrauimus, abſque vllo diſcrimine lineis, ſuperficiebus, corporibuſque conueniunt: hac enim de cauſâ nomen magnitudinis, non lineæ perpetuò aſſumpſimus, vt propoſitionum vniuerſalitas indicaretur. quia tamen ſuperficierum corporumque ſimilium ſimiliterque poſitorum progreſſiones, ſi extra inuicem in directum conſtituantur, ſingulares habent proprietates non paucas, viſum eſt operæ pretium futurum illas hac tertiâ ac quartâ parte explicare.

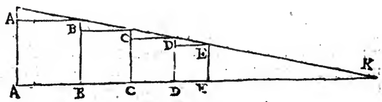


Nota, duplici modo planorum ac corporum progreſſiones inſtitui poſſe. primò quidem vt termini progreſſionis ſimul ſumpti, vnam magnitudinem continuam, ac homogeneam componant: vt in figuris appoſitis exhibetur. ſecundus enim terminus NO *cum primo* MN, *vnam magnitudinem* MO *componit; & tertius* OP, *cum ſecundo ac primo, conſtituit vnam magnitudinem* MP; *omnes denique termini ſimul ſumpti vnam componunt magnitudinem* MR, *continuam ac homogeneam.*

Secundus modus eſt quando termini progreſſionis ſimiles inter ſe ſunt, ſimiliterque poſiti, neque iuxta poſitionem qua dantur, conſtituunt ſimul ſumpti vnam magnitudinem: huiuſmodi progreſſiones (quas quidem in ſequentibus proſequemur) exhibent figuræ appoſitæ A,B, C,D, E,K: *in quibus termini omnes ſimiles ſunt ſimiliterque poſiti, ac in directum conſtituti; ita vt neque ſecundus terminus* BC, *cum primo* AB, *neque tertius* CD, *cum primo & ſecundo, neque cæteri ſubſequentes cum præcedentibus componant vnam*





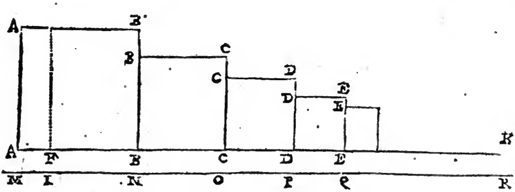


vnam magnitudinem. & figuris sic positis terminum quidem ad quem bases illarum figurarum excurrent scilicet K, *per præcedentia reperiemus; in heterogeneæ verò illius seriei (ita enim lubet appellare) quam figuræ similes similiterq; & extra se positæ componunt, cognitionem non veniemus, nisi figuras has similes similiterque extra se positas, ad illas reuocando, quarum prima cum secunda, & secunda cum tertia, & sic deinceps vnam aliquam magnitudinem constituit. Vt si exempli gratia sint figuræ* A B, B C, C D *& similes similiterque & extra se inuicem positæ; harum termini in infinitum continuatarũ sumpti magnitudinem non vnam aliquam, sed aggregatum quoddam figurarum constituent: si igitur magnitudo huic seriei figurarum æqualis quæratur, oportebit figuras similes* A B, B C, C D, D E, *&c. ad figuras* M N, N O, O P, *&c. reuocare. quæ figuræ* M N, N O, O P *magnitudinem vnam constituunt; & si proportio* M N *ad* N O, *&* N O *ad* O P *continuata terminetur in* R: *erit* M R *toti seriei progreßionis figurarum* A B, B C *&c. æqualis; quæ omnia sequenti propositione demonstrata fient clariora.*

PROPOSITIO CXXIII.

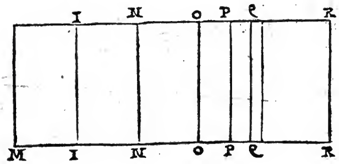
DAta igitur sit secundi generis progressio A B, B C, C D, D E, &c. conflata ex similibus terminis similiterq; & in directum positis, siue planis, siue solidis, & quidem planis vel solidis cuiuscumque generis.

Dico omnes progreßionum proprietates superiori parte demonstratas huiusmodi etiam progreßionibus conuenire, ac proinde propositiones, in quibus illæ proprietates demonstrantur, prorsus vniuersales esse: in hac igitur demonstratione, progressio posterior siue heterogenea, reducitur ad priorem siue homogeneam.



 Demon-

Demonstratio.



SIt enim primæ magnitudini AB, æqualis quæcumque alia MN; & vt AB ad BC, ita sit MN ad aliam NO, quæ cum MN, vnam magnitudinem continuam & homogeneam componat: continueturque ratio MN ad NO, in infinitum per plures semper terminos OP, PQ, &c. qui perpetuò cum præcedentibus terminis vnam magnitudinem componant. Quoniam igitur æquales sunt AB, MN, erit AB ad NO, vt MN ad NO; sed MN est ad NO, vt AB ad BC; ergo AB est ad NO, vt AB ad BC: æquales ergo sunt BC, NO; ergo BC est ad OP, vt NO ad OP; sed NO est ad OP, vt MN ad NO, id est vt AB ad BC, id est vt BC ad CD: ergo BC est ad NO, vt BC est ad CD: æquales ergo sunt CD, OP. similiter ostendam singulos vtriusque progressionis terminos inter se æquari in infinitũ. Quare & series tota AB, &c. æqualis est toti seriei MN, &c vtpote constans æqualibus siue ijsdem terminis: atqui quæcumque toto secundo libro demonstrata sunt de progressionum proprietatibus, conueniunt progressioni MN, NO, &c: ergo etiam conueniunt progressioni AB, BC, &c. Quod erat demonstrandum. Verùm vt res clariùs pateat, idipsum per aliquot consectaria seu corollaria explicabimus.

Corollarium primum.

EX his igitur (ijsdem positis) infero primò: progressionem vniuersam magnitudinum AB, BC, &c. producere eandem determinatam magnitudinem seu quantitatem quam series MN, NO.

Demonstratio.

SEries enim AB, BC, &c. æqualis est seriei MN, NO, &c. ergo eandem producit quantitatem: atqui series MN constituit [a] finitam & determinatam quantitatem (exempli causa MR) ergo & series AB producit quantitatem finitam MR.

a 79. huius.

Corollarium secundum.

IIsdem positis infero secundò, series AK (id est omnes antecedentes) est ad seriem BK (id est omnes consequentes) vt AB antecedens ad BC vnam consequentem.

Et series BK est ad seriem CK vt AB ad BC.

Et tres series AK, BK, CK, sunt in continua analogia. & similiter alia inferemus quæ prop. octuagesimâ secundâ habentur.

Demonstratio.

SIt MR æquale toti seriei MN, NO, &c. erit ergo & tota series, AB, BC, &c etiam, vt ostensum anteà, æqualis ipsi MR: cùm igitur & AB æqualis sit MN, erit quoque series BC, CD, &c. æqualis ipsi NR. Igitur series AK est ad seriem BK vt MR ad NR: Atqui MR [b] est ad NR vt MN ad NO. ergo series AK est ad seriem

b 82. huius.

riem BK vt MN ad NR, id est vt AB ad BC. quod erat primum. Similiter reliqua quoque demonstrabimus.

Corollarium tertium.

IIsdem positis infero tertiò; AF differentia primi & secundi termini, AB primus terminus, tota series AK, sunt in continua analogia.

Et AF differentia, est ad AB primum terminum, vt BC secundus terminus ad totam seriem dempto primo termino nempe ad seriem BK: & AF differentia, BC secundus terminus, tota series demptis duobus primis terminis, (series nempè CK,) sunt in continua analogia.

Demonstratio.

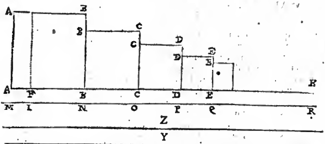
SIt MI differentia primi & secundi termini, in progressione MR. quoniam igitur AB, MN, BC, NO, æquantur, excessus quoque AF, MI, æquales erunt: & quia iam AF ipsi MI, & AB ipsi MN, æqualis est, ipsis AF, AB eadem magnitudo erit tertia proportionalis, quæ ipsis MS, MN, vt patet ex elementis: atqui ipsis [a] MI, MN, tertia proportionalis MR: est tota series rationis MN ad NO; ergo ipsis etiam AF, AB eadem tota series MR, tertia proportionalis erit: atqui series AB, BC, per corollarium primum, eandem producit magnitudinem MR, quàm series MN, NO, ergo etiam productum seriei AB, BC, &c. siue tota series AK, erit tertia proportionalis ipsis AF, AB; sunt itaque AF differentia, AB primus terminus, tota series AK in continua analogia. Quod erat primum. Similiter reliquas corollarij partes demonstrabimus. a 83. huius.

Corollarium quartum.

IIsdem positis infero quartò, hic etiam valere vniuersalem illam ac triplicem constructionem quâ propositione datæ seriei magnitudinem æqualem inuenimus.

Fiat enim vt AF differentia primorum terminorum ad AB, sic AB ad aliam magnitudinem Z. Dico, Z æqualem esse toti similium magnitudinum seriei AK,

Demonstratio.

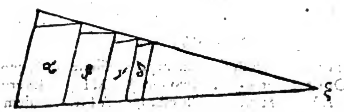


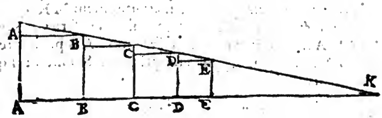
SI non est Z æqualis toti seriei, ergo alia magnitudo maior vel minor quàm Z ipsi æqualis erit; (aliqua enim magnitudo per Corollarium primum toti seriei AK æqualis est.) sit illa Y. ergo per corollarium præcedens AF, AB, Y, sunt continuæ. atqui etiam ex constructione AF, AB, Z sunt continuæ, ergo AB est ad Z, vt AF est ad AB: & AB est ad Y, vt AF est ad AB. eandem igitur AB ad Z & Y rationem habet: æquales igitur sunt Z & Y contra hypothesim: ponebatur enim Y maior aut minor quàm Z. non erit ergo alia minor maiorúe quàm Z, æqualis seriei AK. ergo Z æqualis erit. similiter duas alias propositionis octuagesimę huius constructiones demonstrabimus.

Corol-

Corollarium quintum.

IIsdem positis infero quintò: si fuerit progressio A B, &c. similium magnitudinum itemque alia progressio similium inter se magnitudinum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. siue similes illæ sint terminis alterius siue dissimiles; sit autem progressio vtraque eiusdem proportionis: infero inquam totas series A K, $\alpha\xi$ eam habere rationem inter se, quam primi termini A B & α.





Demonstratio.

PEr corollarium secundum series A K, est ad seriem B K, vt A B ad B C: sed ex hypothesi A B est ad B C, vt α ad β; ergo series A K est ad seriem B K, vt α ad β, hoc est per idem corollarium vt series $\alpha\xi$ ad seriem $\beta\xi$. Igitur per conuersionem rationis series A K est ad A B, vt series $\alpha\xi$, ad α: & permutando series A K est ad seriem $\alpha\xi$ vt A B ad α. Quod erat demonstrandum.

Corollarium sextum.

ET quamquam hactenus solùm assumpserimus progressionem planorum, corporúmve similium similiterque positorum, non est tamen quod existimet lector, quę hactenus demonstrata sunt non subsistere, si planorum aut corporum non similium statuatur progressio, eadem quippe vtrobique, vt cuilibet rem expendenti manifestum est, & veritas est & veritatis demonstratio. idcirco autem figuras similes assumere placuit, quòd & vsus earum frequentior, & magis sint ad demonstrandum accommodatæ.

Ex his hunc in modum demonstratis manifestum est progressionum proprietates, secunda parte explicatas progressionibus magnitudinum in directum positarum, quas deinceps prosequemur, non minùs quàm alijs conuenire: ac proinde propositiones superioris partis in quibus illę tractantur, prorsus vniuersales esse. Quare has deinceps vti reuera tales in sequentium theorematum demonstrationibus citabimus.

PROPOSITIO CXXIV.

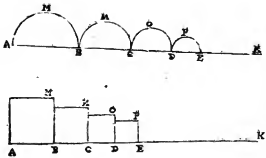
DAtæ sint proportionales continuæ A B, B C, C D, &c. & super ijs constructa plana similia.

Dico plana esse in continua analogia: & si plana dentur continuè proportionalia:

Dico etiam bases fore continuè proportionales.

Demon-

Demonstratio.



PLanum AM est ad planum BN, in duplicata ratione AB ad BC; & planum BN est ad planũ CO, in duplicata ratione BC ad CD, id est ex datis AB ad BC: similiter planum CO est ad planũ DP, in duplicata ratione CD ad DE; id est rursũ AB ad BC: similiter ostendam omnia reliqua inter se esse in duplicata ratione AB ad BC: manifestum est igitur omnia esse in continua analogia: Quod erat primum. secunda pars simili planè discursu ostendetur; patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO CXXV.

EAdem positâ figurâ data sint duo plana similia, basibus homologis in directum positis, AM maius, BN, minus. Petitur inuenire terminus longitudinis, ad quem proportio dictorum planorum sine statu continuata excurret.

Constructio & demonstratio.

PEr octuagesimã huius inueniatur progressionis basium AB, BC terminus, sitq; K. Dico etiam K terminum esse longitudinis ad quem series planorum excurret: plana enim similia quæ fient super terminis progressionis basium, per præcedentem erunt continuè proportionalia, ac proinde linearum planorumq; in infinitum progressio, pari passu procedent: quare vtriusque terminus erit K. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

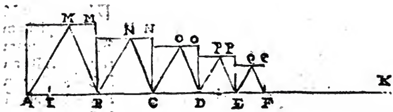
IDem igitur punctum, terminus est progressionis basium, & terminus longitudinis, quem habet series figurarum similium: siue, quod idem est, linea quæ æqualis est seriei basium, est longitudo seriei figuratum similium, super basibus descripratum.

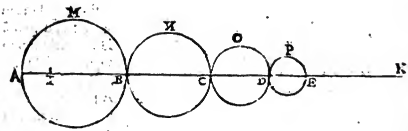
PROPOSITIO CXXVI.

DAta sit planorum similium continuè proportionalium series, homologis basibus AB, BC, CD, &c. in directum positis, habens terminum longitudinis punctum K;

Dico, totam planorum seriem MK esse ad primum terminum AM, vt est tota series basium imparium AB, CD, EF, &c. ad primam AB.

Demonstratio.





PEr octuagesimam secundam huius, tota planorum series MK est ad seriem NK, vt planum AM ad planũ BN: atqui cùm plana sint similia, duplicatam habent rationẽ basium AB, BC; ergo series MK ad seriem NK duplicatam habet rationem AB ad BC: quia autem per corollarium proposit. præcedentis, progreßionis basium AB, BC, &c. terminus est K, erunt igitur AK, BK aCK tres cõtinuæ proportionales; vnde ratio AK ad CK, duplicata est rationis AK ad BK, idest rationis AB ad BC: ergo series MK est ad seriem NK, vt AK ad CK: quare per conuersionem rationis series MK, est ad planum AM, vt AK ad CA: deinde quia series AB, BC, CD, DE, &c. idest linea AK, est ad seriem AB, CD, &c. vt CA ad BA, erit alternando AK ad CA, vt series AB, CD, &c. ad AB: sed series planorum MK, est ad planum AM, vt AK ad CA, ergo series MK est ad planum AM, vt series AB, CD, &c. ad AB. Quod erat demonstrandum.

a 81. huius.
b 1. huius.
c 103. huius.

Manifestum.

EX demonstrationis discursu patet totam planorum seriem esse ad primum planum, vt KA ad CA. Quod quia posteà vsui veniet, sigillatim notare placuit.

PROPOSITIO CXXVII.

IIsdem positis sit AI differentia primæ AB, & tertiæ CD.

Dico totam similium planorum seriem esse ad primum planum AM, vt AB prima basis, ad AI primæ & tertiæ differentiam.

Demonstratio.

d 79. huius.

Fiat lineis AI, AB tertia ST continuè proportionalis. Igitur ST æqualis est toti seriei basium imparium AB, CD, EF, &c. ergo per præcedentem tota series planorum MK est ad planum AM vt ST ad AB: Atqui ex constructione AB est ad AI, vt ST ad AB; ergo tota series est ad planum AM, vt AB ad AI. Quod erat demonstrandum.

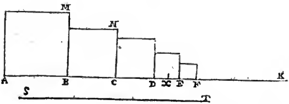
PROPOSITIO CXXVIII.

EAdem manente figurâ, data sit quadratorum series basibus in directum positis, terminum habens longitudinis, punctum K: fiat autem per octuagesimã huius ST, æqualis seriei basium imparium AB, CD, &c.

Dico rectangulum super ST in altitudine AB æquari toti seriei quadratorum MK.

Demon-

Demonstratio.



PEr propositionem centesimam vigesimam sextam huius, tota series quadratorum MK, est ad primum quadratum AM, vt ST ad AB; atqui rectangulum super ST in altitudine AB, est ad quadratum AM, vt [a] ST ad AB; ergo series quadratorum MK est ad quadratum AM, vt rectangulum STAB ad quadratum AM: æqualia sunt igitur rectangulum, & tota series. Quod erat demonstrandum. a 1. sext.

Corollarium.

HInc sequitur quadratum ST, totam seriem MK, & quadratum AM in continuâ esse analogia: nam quadratum ST ad rectangulum super ST & AB, est vt ST linea ad AB lineam: sed rectangulum idem, hoc est tota series MK, est ad AM quadratum in eadem ratione; ergo, &c.

PROPOSITIO CXXIX.

IIsdem positis vt AB ad BC, sic fiat AX ad XK. Dico rectangulum XAB, toti quadratorum seriei æquale esse.

Demonstratio.

QVia AX est ad XK, vt AB ad BC, erit inuertendo ac componendo, KA ad XA, vt CA ad BA: Atqui etiam KA [b] est ad seriem linearum AB, CD, vt CA ad BA; ergo KA eandem habet rationem ad XA, & ad seriem AB; CD, æquales sunt igitur series AB, CD & linea XA. vnde per præcedentem rectangulum XAB, toti quadratorum seriei est æquale. Quod erat demonstrandum. b 103. huius.

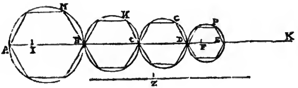
Corollarium.

EX duabus propositionibus colligere modum licet, quo quadratorum datæ seriei reperiri possit quadratum vnum æquale. nimirum si inter AB & ST, vel inter AB, &c. AX, media fiat proportionalis; erit hæc latus quadrati æqualis, toti seriei: vt patet ex duobus iam demonstratis theorematibus: Verùm luculentius & vniuersalius hoc Theorema sequenti propositione construemus.

PROPOSITIO CXXX.

DAta sit series planorum quotumcumque basibus in directum AB, BC, CD, &c. positis, ac terminum habens longitudinis punctum K. petitur planis seriei vniuersæ planum æquale ac simile exhiberi.

Constructio ac demonstratio prima.



Fiat vt AC ad AK, sic primum seriei planum AM, ad aliud simile cuius diameter vel basis sit Z. Dico hoc toti seriei æquale esse.

Per manifestum propositionis 126. huius, tota planorum series MK, est ad planum AM, vt AK ad AC, id est ex constructione vt planum Z, ad AM planum: ergo planum Z est ad planum AM, vt tota series MK, ad idem planum AM. æquantur igitur inter se planum Z, & tota series MK. Cùm itaque etiam simile sit ex constructione planum Z, planis seriei datæ MK, perfecimus quod in problemate petebatur.

Constructio & demonstratio secunda.

SVmatur AI primæ AB. ac tertiæ CD, basium differentia: fiatque vt AI ad AB, sic primum seriei planum AM, ad aliud sibi simile Z:

Dico Z planum satisfacere problemati. Nam tota series MK est ad planum AM

a 127.huius. vt a AB ad AI: Atqui ex constructione etiam planum Z est ad idem planum AM, vt AB ad AI; ergo planum Z, & tota series æqualia sunt. Inuenimus igitur datæ planorum similium seriei, planum æquale ac simile. Quod erat demonstrandum.

Constructio ac demonstratio tertia.

Fiat vt AB ad seriem basium imparium AB, CD, &c. sic primum planum ad aliud simile Z.

Dico hoc seriei planorum datæ æquari. vel (quod idem est) Fiat vt AB ad BC, sic AF ad FK, vtque AB est ad AF, sic planum primum fiat ad aliud simile.

Dico etiam hoc conficere problema: demonstratio eadem est quæ primæ ac secundæ constructionis, ea tantùm differentia, quod propositio 126. huius, sit adhibenda. Dixi autem secundum huius tertiæ constructionis modum coincidere cum primo, eiusdem constructionis tertiæ, quod ex præcedenti manifestum fit, FA æqualem esse seriei basium imparium.

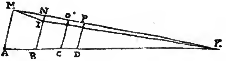
Scholion.

ADuerte constructionem illam triplicem propositionis octuagesimæ huius, cùm vniuersalis sit, huic etiam seriei conuenire: verùm quia in progressionibus huius generis, faciliores subinde ac magis expeditæ constructiones suppetunt, visum est operæ pretium illas tum hoc loco, tum alijs etiam deinceps in medium proferre.

Lemma.

Lemma.

ESto lineatum AB, BC, CD progressio terminata in K, & ex punctis A, B, C, &c. erigantur parallelæ AM, BN, CO, &c. quæ proportionales sint ipsis AB, BC, CD, &c. ducaturq; ex puncto M ad terminum progressionis K, linea MK. Dico hanc per omnium parallelarum extremitates, N, O, P, &c. transire.



Demonstratio.

COnsideremus primò lineam BN; si ergo MK non transit per N, secabit lineam BN supra aut infra N, in I. erit ergo MIK vna recta. Et quoniam progressionis AB, BC, &c. terminus est K per 82. huius, erit vt AK ad BK sic AB ad BC, hoc est, ex datis AM ad BN: atqui etiam vt AK est ad BK, sic AM ad BI; ergo AM est ad BN, vt AM ad BI maiorem aut minorem quàm BN, quod est impossibile. Non ergo secabit MK ipsam BN supra aut infra N, ergo in N: similiter ostendemus rectam NK (hoc est rectam MNK, ostendimus enim modò puncto MNK esse in vna recta) transire per O. & sic de ceteris in infinitum: Patet igitur veritas lemmatis.

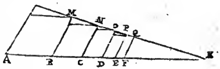
PROPOSITIO CXXXI.

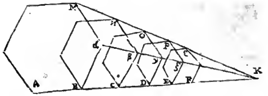
ESto planorum rectilineorum similium similiterque positorum series MK, basibus indirectum collocatis, terminum habens longitudinis punctum K. Ex vertice autem M, ad K ducatur recta MK.

Dico hanc per omnes omnium angulorum totius seriei vertices N, O, P, Q; &c. transire: siue totam planorum seriem angulo AKM inscriptam esse.

Demonstratio.

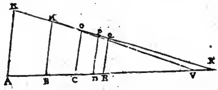
DAta sit primùm series figurarum trium quatuorùe laterum. Cùm igitur ex hypothesi planorum series terminetur in K, basium quoque progressionis terminus erit K per 124. huius: & quoniam plana AM, BN, &c. similia sunt, similiterq; posita, ex elementis patet latera BM, CN, DO, &c. inter se parallela esse, ipsisque AB, BC, &c. proportionalia. ergo per lemma præcedens MK transit per omnes vertices N, O, P, Q, &c. Quod erat demonstrandum.





Sint iam plurium laterum figuræ quarum series terminetur in K. Quoniam igitur plana AM, BN, &c. similia sunt similiterque posita, erunt Bα, Cβ, Dγ, Eξ, parallelæ inter se, ipsisque AB, BC proportionales. quare per lemma præcedens puncta α, β, γ, &c. cum puncto K sunt in vnâ eademque linea αK. quę cùm similiter diuisa sit, ac linea BK, manifestum est progressionem linearum αβ, βγ, &c. terminari quoque in K. Sunt autem ex punctis α, β, γ, &c. erecta parallela latera αM βN, γO, &c. quæ lateribus BC, CD, DE, hoc est ipsis αβ, βγ, γξ, sunt proportionalia (quæ omnia patent ex eo quod AM, BN, CO, &c. similia plana sint similiterque posita) ergo per lemma, linea MK transit per omnia puncta M, N, O, P, Q, &c. Quod erat demonstrandum.

Lemma.



Esto linearum AB, BC, CD, &c. progresio terminata in K: & ex punctis A, B, C, &c. erigantur AM, BN, CO, DP, &c. inter se parallelæ; & proportionales ipsis AB, BC, CD, &c. assumptisque duabus lineis AM, CO, per M & O ducatur recta MO.

Dico hanc productam incidere in K ac per omnium reliquarum extremitates transire.

Demonstratio.

Si enim ita non sit; igitur MO producta, cis vel vltra K in B concurret cum linea AK; & quoniam progressionis AB, BC, CD terminus est K, erunt AK, BK, [a]CK, DK, EK proportionales continuæ. quare etiam AK, CK, EK ex æquo sunt continuæ. vnde [b]vt AK ad CK, sic AC ad CE. Atqui [c]AC est ad CE, in duplicata rationis AB ad BC, id est ex hypothesi rationis AM ad BN: ergo AK est ad CK, in duplicata rationis AM ad BN: sed & ratio AM ad CO (vt ex dictis colligitur) duplicata est rationis AM ad BN, ergo AM est ad CO, hoc est MO V ad OV, vt AK ad CK; quod est impossibile: non igitur occurret MO ipsi AK cis vel vltra K. Quod erat primum. hoc autem sic demonstrato, patet secunda pars ex lemmate propositionis præcedentis. Quæ erant demonstranda.

a 81. huius.
b 1. huius.
c 106. huius.

PROPOSITIO CXXXII.

Esto planorum rectilineorum similium similiterque positorum series MK, vti priùs; & terminus sit K, per quorumlibet autem duorum planorum AM, CO vertices ducatur recta MO.

Dico hanc productam cadere in terminum K ac per omnium reliquorum

quorum vertices N, P, Q, &c. transire; siuè totam planorum seriem angulo AKM inscriptam esse.

Demonstratio.

Discursus demonstrationis planè idem erit qui propositionis præcedentis. Nam quemadmodum illic per lemma illi propositioni appositum demonstrauimus propositum, ita hic per lemmatis proximi applicationem propositionis veritatem concludemus.

Lemma.



Sint AK, BK, CK, DK, &c. in continua analogia, & differentiæ illarum nempè AB, BC, CD, DE, &c. bisectæ sint in α, β, γ, &c. Dico etiam αK, βK, γK, &c. esse continuas.

Demonstratio.

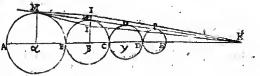
Quia AK, BK, CK, &c. sunt continuæ per primam huius, AB est ad BC, hoc est Aα est ad Bβ, vt AK ad BK. cùm ergo ablatum Aα sit ad ablatum Bβ vt totum AK ad totum BK, erit & reliquum αK ad reliquum βK, vt totum AK ad totum BK. similiter ostendemus βK esse ad γK vt BK est ad CK, hoc est ex hypothesi vt AK ad BK, hoc est ex demonstratis vt αK ad βK. Sunt igitur αK, βK, γK continuæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXIII.

Esto circulorum progressio diametris in directum positis, terminum habens longitudinis punctum K: & ex K ducta linea KM tangat quemuis datæ seriei circulum, verbi gratia circulum AMB.

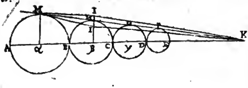
Dico lineam KM totam circulorum seriem contingere.

Demonstratio.



Ex centro α ad contactum ducatur αM linea, cui ex centro β parallela sit βX secans circulum BNC in N. Recta igitur MK occurrit ipsi βX vel in puncto N, vel supra aut infra N in I. non autem supra aut infra posse occurrere, sic demonstro. occurrat enim, si fieri potest, supra vel infra N in I. quoniam igitur dantur circuli in continua analogia, etiam per 124. huius AB, BC, CD, &c. sunt continuæ: ergo AB est ad BC, vt BC ad CD; hoc est vt Bβ ad Cγ: sed & AB est ad BC, vt αβ ad βC: ergo vt AB est ad BC, sic αβ est ad βγ. Prætereà quoniam K terminus est progressionis basium AB, BC, &c. per corollarium 125. huius, erunt per 82. huius continuæ proportionales AK, BK, CK, DK, quare per lemma etiam αK, βK, γK erunt continuæ. ergo per primam huius vt αK ad βK, sic est αβ ad βγ. hoc est sicut antè ostendimus AB ad BC, hoc est αM ad βN. Atqui etiam est vt αK ad βK, sic αM ad βI: sunt enim

ex



ex constructione lineæ αM, βI parallelæ; ergo αM est ad βI, vt αM ad BN maiorem aut minorem quàm BI. quod est absurdum. Nõ igitur recta MK occurret rectæ βI supra vel infra N: ergo in N. Quoniam autem ex centro ad contactum ducta est αM angulus KMα a rectus est; quare cùm ex constructione βN parallela sit αM, angulus quoque KNβ rectus erit: ergo b linea KM tangit circulum BNC. simili ratiocinatione demonstrabimus KM reliquos etiam omnes circulos contingere. Quod erat demonstrandum.

a 17 quinti.
b 16. tertij.

Corollarium.

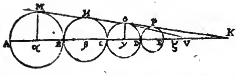
QVod in hoc Theor. de circulis demonstrauimus, etiam de similibus Ellipsibus, Parabolis, Hyperbolis demonstrari potest.

PROPOSITIO CXXXIV.

IIsdem positis duos quoscumque circulos serici datæ circulos, verbi gratia AMB, COD tangat recta MO.

Dico hanc productam cadere in terminum longitudinis K, & reliquos circulos omnes contingere.

Demonstratio.



CEntra circulorum sint α, β, γ, ξ, &c. tum ex α ac γ ad contactus ducantur αM, γO. si igitur negetur assertio, tangens MO producta occurret lineæ AK cis vel vltra K in V. & quoniam per corollarium propositionis 125. huius terminus progressionis basium est in K, erunt c AK, BK, CK, DK, EK, &c. ac proinde per lemma propositionis præcedentis etiam αK, βK, γK, in continua analogia. Quare patet ex æquo etiam αK, γK, ξK esse continuas; ergo αK est d ad γK, vt αγ ad γξ. Atqui αγ est ad γξ, vt AC ad CE (quod simili modo ostendemus quo in præcedenti ostendimus AB esse ad BC vt αB ad Bγ) & AC est ad CE in e duplicata ratione AB ad BC, id est vt AB ad CD; & AB est ad CD vt αM ad γO, ergo αK est ad γK, vt αM ad γO. Deinde cùm αM, γO ex centris ad contactus ductæ sunt, erunt perpendiculares ad MV, ideoque parallelæ inter se. Quare MV erit ad OV, vt αM ad γO, hoc est per iam demonstrata vt αK ad γK, quod est absurdum. non igitur MO occurret ipsi AK cis vel vltra K, sed in K. Quod erat primum. Quo demonstrato, patet per præcedentem secunda pars, quæ erant demonstranda.

c 125. huius.
d 1. huius.
e 106. huius.

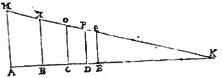
Quòd si loco circuli COD assumatur circulus BNC, ita vt linea duos vicinos circulos contingat, demonstratio longè erit facilior, quam proinde omisimus.

Corol-

Corollarium.

HOc quoque Theorema non tantùm circulis, sed etiam alijs similibus sectionibus applicari potest.

PROPOSITIO CXXXV.



LInearum AB, BC, CD, &c. progressio terminetur in K: erectaq; ad quemuis angulum rectâ AM, ducatur MK: Deinde ex singulis punctis in progressione AK repertis, ad AM, parallelæ erigantur BN, CO, DP, atque ita semper.

Dico ex triangulo AMK relinquendum tandem triangulum aliquod quauis data superficie minus.

Demonstratio.

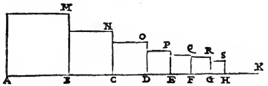
QVoniam similia sunt triangula AMK, BNK, COK, &c. erit duplicata eorum proportio, proportionis laterum AK, BK, CK, &c. quia autem progressionis AB. BC terminus est K, erunt a AK, BK, CK, &c. continuæ proportionales. vnde similia triangula AMK, BNK, &c. etiam sunt in ratione continuâ & diuidendo trapezium AMNB ad triangulū BNK, vt trapezium BNOC ad triangulum COK, & trapezium CP ad triangulum DPK: atque ita semper. Igitur b relinquetur tandem triangulum dato minus. Quod erat demonstrandum. a 81. huius. b 78. huius.

PROPOSITIO CXXXVI.

ESto planorum series lateribus homologis indirectum constitutis, terminus autem longitudinis sit K.

Dico ex ablatione continuata planorum AM, BN, CO, &c. relinqui residuum seriei, quouis dato plano minus.

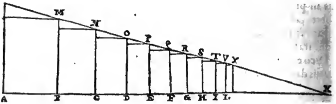
Demonstratio.



PEr octuagesimam secundam huius, AM est ad reliquam seriem planorum NK, vt planum BN est ad reliquam seriem OK: & per eandem planum BN est ad reliquam seriem OK, vt planum CO, est ad seriem reliquam PK: Atque ita in infinitum. ergo ex perpetua planorum AM, BN, &c. ablatione residuum seriei propositę c erit tandem quouis dato plano minus. Quod erat demonstrandum. c 78. huius.

PROPOSITIO CXXXVII.

Detur ſeries planorum ſimilium, homologis baſibus in directum collocatis, terminum habens longitudinis punctum K: ſumpto autem quouis plano CO, numerentur alia plana in infinitum EQ, GS, IV, &c. totidem ſemper intermiſſis quot inter planum CO & primum ſeriei planum AM intercedunt. Petuntur omnia plana AM, CO, EQ, GS, &c. ex propoſita ſerie auferri.



Conſtructio & demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi plana AM, BN, CO, DP, EQ, FR, GS, ſunt in continua ratione, etiam ex æquo plana AM, CO, EQ, IV, in continua ſunt analogia. igitur per propoſitionem 126. huius, ſeriei planorum continuè proportionalium AM, CO, EQ, &c. inueniatur planum æquale. hoc ſi auferſ ex plano, quod per eandem propoſitionem 126. factum fuerit æquale ſeriei datæ MK, habebitur propoſitum.

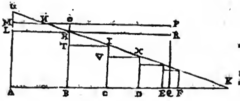
PROPOSITIO CXXXVIII.

Detur progreſſio quadratorum habens baſes in directum, & terminum longitudinis K: & ex K per H ducatur recta KH, quæ per propoſitionem 131. huius contingat omnia ſeriei quadrata & concurrat cum AL in G.

Dico triangulum AGK, toti trapeziorum GB, HC, ID, &c. ſiue vtrique quadratorum AH, BI, &c. ac triangulorum LGH, THI, &c. progreſſioni, æquale eſſe.

Demon-

Demonstratio.



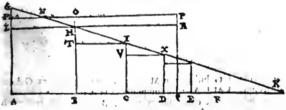
Per corollarium propositionis 125. huius series basium AB, BC, CD terminatur in K, vnde AK, [a]BK, CK, &c. sunt continuæ proportionales, & triangula [b]AGK, BHK, CIK, &c. in cõtinua sunt analogia. Quare toti seriei proportionis quam habet trapezium GB ad trapezium HC, sine statu continuatę, triangulum AGK [c]æquale est. Atqui trapezia ID, XE, &c. continuant rationem trapezij GB, ad trapezium HC; (cùm enim triangula AGK, BHK, CIK, &c. sint continuè proportionalia, eorum quoque differentiæ nempè dicta trapezia erunt continua) ergo triangulum AGK, trapeziorum seriei vniuersæ est æquale: Quod erat demonstrandum.

[a] 82. huius.
[b] 124. huius.
[c] 79. huius.

PROPOSITIO CXXXIX.

Esto quadratorum series HK, bases habens in directum, & terminum longitudinis K: & ex K per H ducta recta KH tangat per propositionem 131. huius omnia seriei quadrata, ac concurrat cum AL in G; inuentâ deinde per propos. 80. huius lineâ AQ, quæ æqualis sit seriei basium impariũ AB, CD, EF, diuisaq; bifariam LG in M, fiat rectangulũ QAMP. Dico hoc triangulo AGK, æquale esse.

Demonstratio.



Producatur LH in R, & BH in O; linea MNO parallela est ex datis ad AQ, quę æquidistat LH: ergo MNO parallela est ad LH. & quia GM æqualis est ML, etiam GN æqualis erit NH: sunt autem & OH, ML, id est MG æquales, & anguli OHN, MGN, æquales: ergo æquantur triangula MGN, NOH: additoque communi LMNH, triangulum LGH, rectangulo LO æquale est: quare quadratum AH est ad triangulum LGH, vt idem quadratum, ad rectangulum LO, hoc [d]est vt linea AL ad lineam LM. Prætereà triangula LGH, THI, VIX, similia sunt, & homologa latera LH, TI, VX; adeoque in duplicata [e]ratione laterum LH, TI, VX, &c. igitur cùm quadrata AH, BI, &c. sint in eorundem laterum duplicata ratione; patet triangula dicta, quadratis proportionalia esse. vnde permutando vt quadratum AH ad triangulum LGH, sic quadratum BI ad triangulum THI, & quadratum CX, ad triangulum VIX: atque ita in infinitum. Ergo vt quadratum AH ad triangulum LGH, hoc est ex antè demonstratis vt AL ad

[d] 1. Sexti.
[e] 19. Sexti.

a 22. quint. LM, [a] sic omnia quadrata, ad omnia triangula. Atqui vt AL ad LM sic etiam est rectangulum AR ad rectangulum LP. Igitur vt omnia quadrata, ad omnia triangula, sic rectangulum AR ad rectangulum LP. Atqui rectangulum AR, æquale est toti [b] quadratorum seriei, (est enim AQ æqualis seriei basium imparium AB,
b 79. huius. CD, &c. & AL, AB) ergo cùm series quadratorum ostensa sit æqualis esse rectan-
c 14. quinti. gulo AR; etiam tota triangulorum series rectangulo LP [c] æqualis erit. quare totum rectangulum AP, vtrique seriei quadratorum ac triangulorum, hoc est seriei trapeziorum GB, HC, ID, &c. æquabitur: sed trapeziorum series, [d] constituit
d 138. huius. triangulum AGK. ergo rectangulum AP triangulo AGK æquale est. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

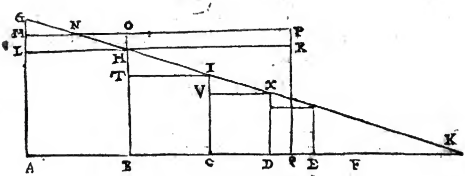
EX discursu demonstrationis colligitur, rectangulum MLRP, progressioni triangulorum GLH, HTI, &c. esse æquale: rectangulum verò GLR, duplum esse eiusdem triangulorum progressionis.

PROPOSITIO CXL.

ESto, vt priùs, quadratorum series HK, inscripta triangulo AGK; sitque AQ æqualis seriei basium imparium AB, CD, &c.

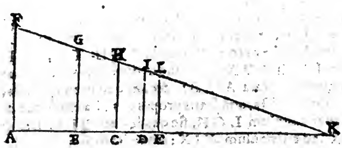
Dico rectangulum sub AQ, & lineis GA, AB, tamquam vna contentum, rectangulo GAK æquale esse.

Demonstratio.



DIuidatur enim LG bifariam in M: igitur linea composita ex GA, AB, bis continet lineas LM, LA. quare composita ex GA, AB dupla est lineæ AM. ergo rectangulum sub AQ & composita ex GA, AB, duplum est [e] rectanguli sub AQ
e 1. Sexti. & AM. Atqui rectangulum sub AQ & AM, æquatur [f] triangulo AGK: er-
f 139. huius. go rectangulum sub AQ & GA, AB tanquam vna linea, duplum est trianguli AGK. Quare cùm & rectangulum GAK, eiusdem trianguli GAK sit duplum, æquabuntur inter se, rectangulum sub AQ & composita ex GA, AB, & rectangulum GAK. Quod erat demonstrandum.

Lemma.



LAtus AK trianguli AFK, sit diuisum per lineas lateri AF parallelas, in continuè proportionales AK, BK, CK, &c.

Dico trapezia FB, GC, HD, &c. esse similia.

Demon-

Demonstratio.

OB lineatum AF, BG, CH æquidistantiam, angulus FAB, angulo GBC, & GFA, angulo HGB, & BGF, angulo CHG, & ABG, angulo BCH, æqualis est. Deinde quia AK, BK, CK, &c. sunt continuæ proportionales, erit AB ad BC, [a] & BC ad CD, vt AK ad BK. Cùm igitur etiam FA sit ad GB, vt AK ad BK, erit FA ad GB, vt AB ad BC, & permutando FA ad AB, vt GB ad BC: similiter cùm AB sit ad BC [b] vt AK ad BK, hoc est ex hypothesi, vt BK ad CK, hoc est vt BG ad HC; erit permutando AB ad BG, vt BC ad CH: non aliter etiam ostendemus BG esse ad GF, vt CH ad HG, & GF ad FA, vt HG ad GB. quare cum trapeziorum FB, GC & anguli omnes sint æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia, Trapezia [c] FB, GC & omnia reliqua, erunt similia. Quod erat demonstrandum.

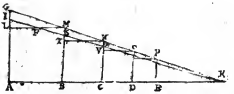
[a] 11. huius. [b] ibid. [c] Def. 1. sexti.

PROPOSITIO CXLI.

DAta sit quadratorum series, habens bases indirectum, & terminum longitudinis K, inscripta triangulo AGK; ac primi quadrati latere LM bisecto in F, per F ducatur recta FK, occurrens ipsi AG in I.

Dico triangulum AIK seriei quadratorum; triangulum verò IGK, seriei triangulorum LGM, TMN, &c. æquale esse.

Demonstratio.



CVm LM bisecta sit in F, & SM, IL ex hypothesi sint parallelæ, patet triangula IFL, SFM æqualia esse, ac proinde addito communi ALFSB, trapezium AISB quadrato AM æquale. Deinde cũ per corollarium propositionis 125. huius, progressionis basium AB, BC terminus sit K, erunt [d] AK, BK, &c. continuæ: quare cùm etiam AI, BS, CX, &c. sint parallelę, erunt per lemma, trapezia IB, SC, XD, &c. similia inter se. vnde & [e] trapezia IB, SC, XD, &c. sunt in duplicata ratione laterum homologorum AB, BC, CD, &c. atqui & quadrata AM, BN, CO, &c. sunt in dictorum laterum duplicata ratione, ergo trapezia sunt quadratis proportionalia, & vt primum [f] trapezium IB, ad primum quadratum, ita tota trapeziorum series, ad quadratorum seriem. Atqui primum trapezium, ostendimus primo quadrato æquale esse, ergo trapeziorum etiam & quadratorum series æquales sunt. Deinde series trapeziorum [g] GB, MC, ND, constituit triangulum AGK, ergo & series trapeziorum IB, SC. triangulo AIK æqualis erit; Quare triangulum AIK, quadratorum seriei æquabitur: Quod erat primum; ex quo etiam patet secundum. quæ erant demonstranda.

[d] 12. huius. [e] 20. sexti. [f] 12. sexti. [g] 13. huius.

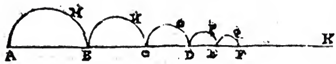
PROPOSITIO CXLII.

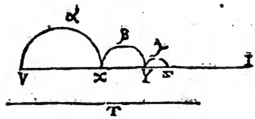
DAta sit planorum similium series habens bases homologas in directum, & terminum longitudinis punctum K; sitque seriei rationis AB primæ, ad tertiam CD, æqualis linea VI: linea verò T seriei rationis AB primæ, ad EF quintam sit æqualis;

S 3 Dico

Dico seriem totam planorum AM, BN, CO, DP, &c. esse ad seriem planorum imparium AM, CO, EQ, &c. vt linea VI est ad lineam T.

Demonstratio.





a 116. huius.

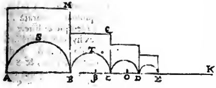
SEries basium imparium AB, CD, EF, &c. constituatur separatim, vt VX ipsi AB, & XY ipsi CD, & YZ ipsi EF sit æqualis: itemque plana super his facta planis AM, CO, EQ, æqualia sint, & similia. patet igitur series rationis AB ad EF, & rationis VX ad YZ, easdem esse. quare cùm T æqualis sit seriei AB, EF, etiam seriei VX, YZ, æqualis erit. Deinde series a planorum AM, BN, CO, est ad planum AM, vt linea VI ad AB: & series planorum Vα, Xβ, &c. est ad planum VX, id est ad planum AM, vt T ad Vα, id est AB: Atqui vt VI ad AB, sic rectangulum sub VI & AB, ad quadratum AB: & vt T ad AB, sic rectangulum sub T & AB, ad quadratum AB: ergo series planorum AM, BN, &c. est ad planum AM vt rectangulum sub VI & AB, ad quadratum AB: & series planorum Vα, Xβ, &c. est ad planum Vα, hoc est AM, vt rectangulum TAB ad quadratum AB. Igitur permutando series AM, BN, est ad rectangulum sub VI, AB, vt planum AM, ad quadratum AB: itemque permutando series Vα, Xβ est ad rectangulum TAB, vt idem planum AM ad idem quadratum AB. ergo series AM, BN, est ad rectangulum sub VIAB vt series Vα, Xβ ad rectangulum TAB: & permutando series AM, BN, est ad seriem Vα, Xβ, id est ex constructione ad seriem AM, CO, EQ, vt rectangulum sub VIAB ad rectangulum TAB, hoc est vt linea VI ad lineam T: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXLIII.

DAtæ sint quadratorum series binæ, quæ habeant bases indirectum, & longitudinum terminos puncta K & R. sit autem AK diuisa in O, in ratione AB ad BC; & FR diuisa sit in P, secundùm rationem FG ad GH.

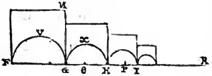
Dico seriem quadratorum NK, ad seriem quadratorum NR, rationem habere compositam ex rationibus AB ad FG, & AO ad FP.

Demonstratio.



SEries quadratorum MK, æquatur rectangulo OAB. & series quadratorum NR, rectangulo PFG æqualis est. Atqui ratio rectangulorum OAB, PFG ex laterum AB, FG, & AO, FP, rationibus componitur, ergo etiam serierum MK, NR, ex iisdem rationibus proportio componitur. Quod erat demonstrandum. Sed hoc Theorema vniuersale reddamus. a 139. huius.

PROPOSITIO CXLIV.



EAdem manente figura, datæ sint series binæ planorum similium, quarum longitudines sunt AK, FR: sit autem AK diuisa in O, in ratione AB ad BC, & FR in P, in ratione FG ad GH.

Dico seriem planorum similium MK, ad seriem planorum similium NR, habere rationem compositam ex rationibus AB ad FG, & AO ad FP.

Demonstratio.

SVper iisdem basibus fiant binæ quadratorum series, & lineis CD, HI, æquales fiant αB, ξG: deinde vt Aα, ad AB, & Fξ, ad FG fiat quadratum AB, ad Aβ quadratũ, & quadratum FG ad quadratum Fθ. itaque quadratum super Aβ æquabitur b seriei quadratorum MK: planum verò super Aβ simile planis AS, BT, FV, GX, &c. æquabitur seriei planorum SK: similiter ab altera parte quadratum super Fθ seriei quadratorum NR, & planum simile super eadem Fθ, planorum seriei VR æqualia erunt. Itaque series planorum SK est ad seriem planorum VR, vt planum super Aβ, ad planum Fθ: Item series quadratorum MK est ad seriem quadratorum NR, vt quadratum super Aβ, ad quadratum super Fθ. Atqui planum Aβ est ad planum Fθ, vt quadratum Aβ ad quadratum Fθ; (cùm enim tam quadrata, quàm plana ex constructione sint similia, vtraque sunt in duplicata ratione Aβ ad Fθ:) ergo series planorum SK est ad seriem planorum VR, vt series quadratorum MK ad seriem quadratorum NR. Atqui per præcedent. series quadratorum MK ad seriem quadratorum NR, rationem habet compositam, ex rationibus AB ad FG, & AO ad FP, ergo & planorum series SK ad seriem planorum VR, rationem habet ex iisdem rationibus compositam: quod erat demonstrandum. b 130. huius.

PROPOSITIO CXLV.

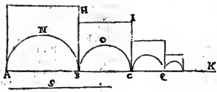
DAtæ sint quadratorum series HK, LG, in quibusuis rationibus, ab æqualibus quadratis incipientes: sitque linea S seriei rationis primæ AB ad tertiam CQ, itemque linea T, seriei rationis DE primæ ad tertiam FR æqualis.

Dico series quadratorum eam proportionem habere quam lineæ, S, T.

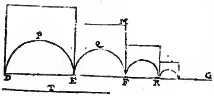
Demon-

Demonstratio.

a 128. huius.



b 1. sexti.



Series HK, [a] æquatur rectangulo S A B, item series L G æquatur rectãgulo T D E, hoc est, (quoniam quadrata A H, D L, ideoque & lineæ A B, D E, ex hypothesi æquantur) rectangulo T A B. eadem igitur est serierum, & S A B, T A B rectangulorum ratio. Atqui rectangulorum S A B, T A B, eadem est ratio [b] quæ rectarum S, T, ergo & serierum eadem quæ S, T, linearum est proportio. Quod erat demonstrandum. Hoc quoque Theorema faciamus vniuersale.

PROPOSITIO CXLVI.

EAdem manente figurâ; dentur planorum similium binæ series quarumuis proportionum N K, P G, quæ ab æqualibus incipiant planis, sintque lineæ S, T, æquales seriebus A B, C Q, &c. A B, F R, &c.

Dico eandem esse serierum & rectarum S, T, proportionem.

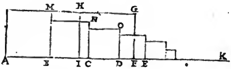
Demonstratio.

AD huius Theorematis demonstrationem, eandem lector constructionem ac ratiocinationem si adhibeat, quâ propositione precedenti fuimus vsi, non aliter propositionis præsentis veritatem ex præcedenti deducet, quàm propositionis 144. ex 143. huius deduximus.

PROPOSITIO CXLVII.

ESto rectangulum altera parte longius A G, à quo A M quadratum ablatum sit. Petitur exhiberi series quadratorum, quę æqualis sit rectangulo A G, & incipiat à quadrato A M.

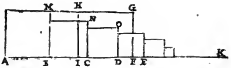
Constructio & demonstratio.



c 125. huius.

VT A F ad B F, sic A B fiat ad B I : & ex Iducta I H, parallela ad B M rectangulo I B M H, æquale fac quadratum B N, basi B C in directum posita cum A B: tum progressionis quadratorum A M, B N, [c] continuatæ inueniatur K terminus longitudinis. Dico seriem quadratorum M K, problemati

blemati satisfacere. Nam cùm ex constructione AB sit ad BI, vt AF ad BF; erit AF æqualis [a] seriei rationis AB ad BI. Deinde ex constructione rectangulum BH æquatur quadrato BN, ergo quadratum AM ad rectangulum BH, & quadratum BN, eandem habet rationem: vnde cùm qua-



[a] 79. huius.

dratum AM, sit ad quadratum BN vt AB ad CD, erit quoque quadratum AM ad rectangulum BH, vt AB ad CD. atqui vt quadratum AM ad rectangulum BH, sic AB ad BI: ergo AB est ad CD, vt AB ad BI: æquantur igitur CD, BI, ergo AF etiam æqualis est seriei rationis AB ad CD: quare rectangulum FAB, id est rectangulum AG [b] æquale est seriei quadratorum AM, BN, CO, &c. hoc est seriei MK. factum igitur est quod postulabatur.

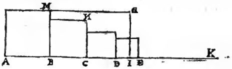
[b] 118. huius.

Demonstratio alia.

TOta series quadratorum MK est per 82. huius ad reliquam seriem NK, vt quadratum AM ad quadratum BN, hoc est ex const. ad rectangulum BH. Atqui ex constructione, rectangulum AG est ad rectangulum BG, vt rectangulum AM ad rectangulum BH, ergo series MK est ad seriem NK, vt AG ad BG. Igitur diuidendo quadratum AM, est ad reliquam seriem NK, vt quadratum idem AM ad reliquum rectangulum BG: ergo series NK, & rectangulum BG æquantur. Quare communi addito quadrato AM, tota series MK, & rectangulum AG sunt æqualia.

Corollarium.

ESto linea AI secta in B, Petitur addi IK, vt AI sit ad IK, vt AK ad BK.



Constructio & demonstratio.

SVper AI fiat in altitudine AB rectangulum AG, cui æqualis [c] inueniatur series quadratorum basibus in directum positis MNK: incipiens à quadrato AB, siue AM, & terminum habens longitudinis K: Dico factum quod petebatur. Cùm enim rectangulum AG ex constructione sit æquale seriei MK, AI erit ad IK, vt AB ad BC, vti ex 129. huius facilè demonstrari potest: & quia terminus longitudinis seriei quadratorum est K, progressionis etiam basium terminus [d] erit K; ergo AK est [e] ad BK, vt AB ad BC, hoc est per demonstrata vt AI ad IK. Factum igitur est quod petebatur.

[c] 147. huius.

[d] 125. huius.

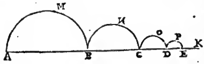
[e] 82. huius.

PROPOSITIO CXLVIII.

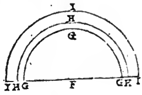
ESto figura plana quæcumque FI, à qua similis auferatur FG, petitur exhiberi series planorum similium, quæ incipiat à plano ablato FG, & dato plano FI sit æqualis.

Constructio & demonstratio.

a 115. huius



b 82. huius.



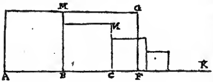
VT planum FI ad segmentum GI, sic planum FG, fiat ad segmentum aliquod GH, deinde plano FG fac simile & æquale AM, & segmento GH æquale sit planum BN, simile autem planis AM, FG, FI. Denique progressionis planorum AM, BN, continuatæ a inueniatur terminus lõgitudinis K. Dico seriem planorum similium MK postulato satisfacere. est enim tota series planorum MK, ad reliquam seriem NK, vt b planum AM ad planum BN, hoc est ex constructione, vt planum FG ad segmentum GH: sed rursum ex constructione planum FI est ad segmentum GI, vt planum FG ad segmentum GH, ergo series MK, est ad reliquã NK, vt planum FI ad segmentum GI. Quare per conuersionem rationis series MK, est ad planum AM, vt planum FI ad planum FG: sed ex constructione plana AM, FG æqualia sunt: ergo etiam series planorum similium MK, & planum FI æqualia sunt. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CXLIX.

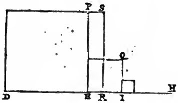
DAta sit progressio quadratorum MK, & quadratum aliud DP, quod minus esse debet serie MK. petitur exhiberi alia series quadratorum, incipiens à quadrato DP, æqualis seriei MK.

Constructio & demonstratio.

c 139. huius



d 147. huius.



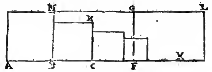
FIat rectangulum AG in altitudine AB, c æquale seriei datæ MK. deinde, (quoniam quadratum DP ponitur minus serie MK, id est ex constructione rectangulo AG,) auge quadratum DP, rectangulo ES, vt rectangulum totum DS, æquale sit rectangulo AG: tum rectangulo DS d inueniatur æqualis series quadratorũ PQH, incipiens à quadrato DP. Dico seriem PQH soluere Problema. Nam ex constr. series quadratorum PQH incipit à quadrato dato DP, & æqualis est rectangulo DS, hoc est ex constructione rectangulo AG, hoc est rursum ex constructione seriei datæ MK. Factum igitur est quod petebatur.

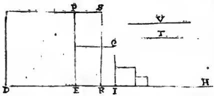
PRO.

PROPOSITIO CL.

Data sit iterum quadratorum series MK, & aliud quadratum DP, item ratio quævis siue maioris siue minoris inæqualitatis V ad T. petitur exhiberi series quadratorum incipiens à quadrato DP, & habens ad seriem MK, rationem datam V ad T.

Constructio & demonstratio.





Fiat a rectangulum AG æquale seriei MK, & in eadem altitudine rectangulum AL, quod ad rectangulum AG, datam habeat rationem. si iam quadratum DP maius sit aut æquale rectangulo AL, impossibile est problema. Minus ergo sit oportet quadratum DP rectangulo AL. Itaque augeatur rectangulo ES, ita vt totum DS b rectangulo AL æquale sit. Tum rectangulo DS inueniatur æqualis series, quadratorũ PQH incipiens à quadrato DP. Dico hanc soluere problema.

a 119. huius.

b 147. huius.

Ex constructione enim series PQH incipit à quadrato DP, & æqualis est rectangulo DS, id est ex constructione rectangulo AL. quare cum rectangulum AL ex constructione sit ad rectangulum AG, vt V ad T, etiam series PQH erit ad rectangulum AG, id est rursum ex constructione ad seriem datam MK, vt V ad T. Fecimus ergo quod petebatur. Nunc verò vtramque propositionem præcedentem vniuersalem faciamus.

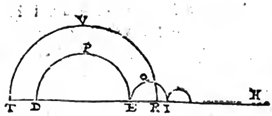
PROPOSITIO CLI.

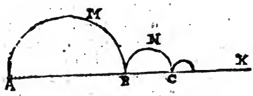
Data sit planorum similium progressio vt priùs disposita MK, & aliud planum DP simile planis seriei MK: Petitur exhiberi similium planorum series, incipiens à dato plano DP, æqualis verò seriei datæ MK.

Constructio & demonstratio.

a 130. huius.

b 148. huius.





PLanis a seriei MK æquale ac simile fiat planum T V R, si iam planum datum D P, æquale aut maius sit plano T V R, fieri problema non poterit: minus ergo sit necesse est. Itaque inueniatur series b planorum similium P Q H, quæ æqualis sit plano T V R, & incipiat à plano dato D P. Dico hanc soluere problema.

Nam ex constructione, series P Q H incipit à dato plano D P, & æqualis est plano T V R, id est ex constructione seriei datæ M K: Factum igitur est quod postulabatur.

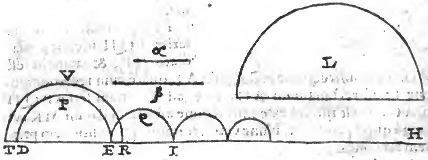
PROPOSITIO CLII.

DAta sit iterum planorum similium series MK, & aliud planum D P, simile datæ seriei planis, itemque ratio quæuis, siue maioris, siue minoris inæqualitatis α ad β. Petitur exhiberi series planorum similium, quæ incipiat à plano D P, & ad seriem M K, datam habeat rationẽ.

Constructio & demonstratio.

130. huius.

d 148. huius.





Fiat planis seriei MK c æquale planum L, deinde vt α ad β, sic fiat planum simile T V R ad planum L, si iam planum datum D P, æquale vel maius est plano T V R, fieri problema non poterit. Minus ergo planum D P sit oportet, plano T V R: Itaque inueniatur d series planorũ similium P Q H, incipiens à plano D P, æqualis verò plano T V R. Dico hanc problema soluere, nam ex constructione series P Q H, incipit à plano dato D P, & æqualis est plano T V R, quare cùm planum T V R ex constructione datam habeat rationem ad planum L, etiam series P Q H ad planum L, hoc est rursum ex constructione ad seriem datam M K, habebit rationem datam: Factum igitur est quod petebatur.

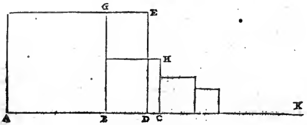
PRO-

PROPOSITIO CLIII.

Esto progressio quadratorum G H K, basibus in directum positis, & terminum longitudinis habens punctum K.

Dico quadratum super tota A K factum, ad seriem datam, proportionem habere compositam, ex ratione K A ad B A, & C A ad B A.

Demonstratio.



Fiat enim A D ad D K, vt A B ad B C. Igitur rectangulum D A B, siue A E, [a] æquatur seriei G K. ergo quadratum A F, eandem ad seriem G K, & ad rectangulum A E habet rationem. quoniam autem A D est ad D K, vt A B ad B C, erit inuertendo ac componendo K A ad D A, vt C A ad B A. Ergo cùm quadratum A F ad rectangulum A E rationem habeat [b] compositam ex rationibus K A ad D E, & K A ad D A, habebit quoque quadratum A F, ad idem rectangulum, compositam ex rationibus K A ad D E, & C A ad B A: quare cùm series G K & rectangulum A E, æqualia sint, habebit quoque quadratum A F ad seriem G K rationem compositam ex rationibus K A ad D E, hoc est B A, & C A ad B A. Quod erat demonstrandum. placet hoc quoque theorema vniuersaliter demonstrare.

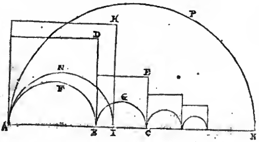
[a] 129. huius.

[b] 23. sexti.

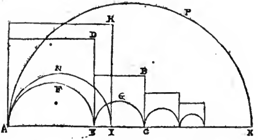
PROPOSITIO CLIV.

Data sit planorum similium quorumcunque progressio F G K, habens bases homologas in directum, & terminum longitudinis K, datæ progressionis.

Dico planum A P K ad totam seriem F G K habere rationem compositam, ex rationibus K A ad B A, & C A ad B A.



Demonstratio.



a 130. huius. b 22. sexti. c 130. huius. d 22. sexti. e 133. huius.

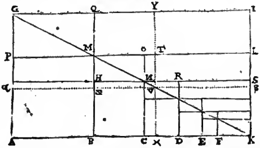
SVper ijſdem baſibus AB, BC, &c. conſtruatur quadratorum ſeries DEK: fiatque quadratum AD ad aliud AHI, vt AC ad AK, quod toti a ſeriei quadratorum DEK æquabitur. Super AI verò fac planum ANI ſimile plano AF. Itaque planum AF eſt ad planum ANI b vt quadratum AD ad quadratum AHI, hoc eſt ex conſtructione vt AC ad AK. Quare etiam planum ANI, ſeriei planorum ſimilium FGK c æquale erit; ergo ſeries FGK eſt ad planum ANI, vt ſeries DEK ad quadratum AHI: atqui planum ANI eſt ad planum APK, d vt quadratum AHI ad quadratum totius AK: igitur ex æqualitate ſeries FGK eſt ad planum APK, vt ſeries DEK ad quadratum AK, & inuertendo planum APK eſt ad ſeriem FGK, vt quadratum AK ad ſeriem DEK. ſed quadratum AK e ad ſeriem DEK, proportionem habet compoſitam ex rationibus KA ad BA, & CA ad BA. ergo & planum APK ad ſeriem FGK, proportionem habet ex ijſdem rationibus compoſitam; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLV.

ESto quadratorum ſeries habens baſes in directum, & terminum longitudinis K, inſcripta triangulo AGK, iuxta propoſitionem 131. huius, & completo rectangulo AI, latera quadratorum producantur in LS, &c. item in Q, O, R, &c.

Dico ex hac laterum productione perpetua, oriri progreſsionem rectangulorum MI, NL, &c. ſimilium, & continuè proportionalium, quæ progreſsioni quadratorum quoque ſit æqualis.

Demonſtratio.



f 125. huius. g 21. huius.

QVoniam ex hypotheſi K terminus eſt longitudinis quadratorum ſeriei, etiam K terminus f erit progreſsionis baſium AB, BC, &c. igitur BK g eſt ad CK, vt AB ad

AB ad BC, hoc eſt vt PM ad HN. hoc eſt vt GM ad MN, hoc eſt (quia QGM, HMN ſimilia ſunt triangula) vt QM ad MH, hoc eſt denique vt QM ad ON: à primo igitur ad vltimum, BK eſt ad CK, hoc eſt ML ad NS, vt QM ad ON: rectangula igitur MI, NL, proportionalia habent latera. Quare cùm ſint & æquiangula, erunt ſimilia; quod erat primum.

Deinde dicta rectangula complementa ſunt eorum, quę circa diametrum ſunt.
Ergo ſingula quadratis ſingulis datæ ſeriei a æquantur. ergo & progreſſio tota toti a 43. primi.
progreſſioni æqualis erit: ex quo etiam ſecundum patet. Cùm enim quadrata ex hypotheſi ſint in ratione continua, etiam complementa illis æqualia, in continua erunt analogia: quæ erant demonſtranda.

PROPOSITIO CLVI.

IIſdem poſitis fiat AX b æqualis ſeriei rationis AB ad CD, & ex puncto b 80. huius.
X, ducta normalis XY ſecet lineas PL, GK, in T & V.

Dico rectangulum ſub BKVY, toti complementorum ſeriei MI, NL, &c. æquari.

Demonſtratio.

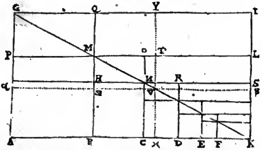
DVcatur enim AK per punctum V parallela αβ. Igitur rectangula c VI, AV, c 43. primi.
itemque rectangula MY, αM, æqualia ſunt inter ſe. Igitur figura MQIβV figuræ MPAXV æqualis eſt. quare communi addito rectangulo ZT, erunt rectangula ZI, AT ęqualia. Atqui rectangulum ZI eſt rectangulum ſub Zβ, id eſt
BK, & ſub ZQ, id eſt VY: rectangulum verò AT ſeriei quadratorum, d eſt æqua- d 118. huius.
le. ergo rectangulum ſub BKVY, ſeriei quadratorum, hoc eſt per præcedentem ſeriei complementorum eſt æquale. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLVII.

IIſdem poſitis, quæ ſuprà,

Dico ea quæ circa diametrum ſunt rectangula PQ, HO, &c. eſſe ſimilia inter ſe & continuè proportionalia; rectangulum verò ſub AB & VY, toti eorum progreſsioni eſſe æquale.

Demonſtratio.



VT PM eſt ad MO, ſiue HN, ſic GP eſt ad ON, ob triangulorum GMP, MON, ſimilitudinem: quare cùm rectangula PQ, HO, & latera habeant proportionalia, & angulos æquales, erunt ſimilia; ac proinde & reliqua omnia eodem diſcurſu ſimlia erunt: quod fuit primum. Deinde cùm ſimilia ſint dicta rectangula, erunt in duplicata homologorum laterum PM, HN, &c. ratione. Quare cùm & quadrata ſint in eorumdem laterum ratione duplicata, eadem erit rectangulorum ac quadratorum proportio. Atqui hæc ex hypotheſi ſunt in continua analogia, ergo
& illa: quod erat alterum. Deniq; rectangulum αM, æquatur e rectangulo MY. Ad- e 43. primi.

dito

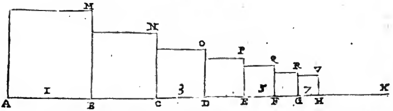
a 135. huius. dito igitur communi PQ, æquabitur rectangulum a Q, hoc est rectangulum sub AB & VY, rectangulo PY: Atqui rectangulum PY, a duplum est progressionis triangulorum GPM, MHN, &c. ergo & rectangulum sub AB & VY, progressionis triangulorum est duplum: quare cùm progressio rectangulorum PQ, HO, &c. etiam sit progressionis triangulorum dupla, rectangulum sub AB & VY, & progressio rectangulorum æqualia erunt: Quod postremum fuit eorum, quæ erant demonstranda.

PROPOSITIO CLVIII.

DAta sit quadratorum series, basibus indirectum positis, & terminum habens longitudinis K: impares autem quadratorum bases AB, CD, EF, &c. notentur numeris imparibus 1.3.5.7.&c.

Dico, primum quadratum AM esse ad secundum BN, vt AB ad CD: & rursum primum quadratum AM esse ad tertium CO, vt AB ad EF; & ad quartum DP, vt AB ad GH. Atque ita in infinitum, bases notatæ imparibus numeris, sunt primo quadrato cum subsequentibus comparato, proportionales.

Demonstratio.



b 114. huius. COmparemus exempli gratia quadratum AM, cum tertio CO; Quoniam quadrata omnia AM, BN, CO, &c. in continua sunt analogia, erunt b & bases continuę proportionales; ex æqualitate igitur etiam AB, CD, EF, erunt continuæ; (cũ inter ipsas æqualis continuè proportionalium numerus intercedit) ergo quadratum AM est ad quadratum CO, vt AB ad EF; (cùm rationes tam quadrati ad quadratum, quàm lineæ AB ad lineam EF, sint rationis AB ad CD duplicatæ) eadem valebit demonstratio, si quadratum AM cum quouis alio comparetur. Constat ergo propositionis conclusio.

PROPOSITIO CLXIX.

EAdem positâ figurâ; data sit planorum similium series MK habens bases homologas in directum, & terminum longitudinis K.

Dico seriem MK ad nullam sui partem, verbi gratia ad seriem NK aut seriem OK, vel seriem PK, &c. eam habere rationem, quam inter se habent duæ quæcumque in hac basium serie, rectæ lineæ, inter quas par linearum numerus intercedit.

Demonstratio.

SEries enim data MK, cum ea sui parte comparatur, vt inter vtriusque primum terminum, vel par intercedat planorum numerus, vel impar; comparentur primò series MK & OK, inter quarum initia, impar terminorum numerus intercedit; quia igitur

igitur plana sunt in continua analogia, etiam bases A B, B C, &c. erunt [a] continuæ proportionales. Quare ex æquo etiam A B, C D, E F, erunt continuæ: ergo planum AM est ad planum CO, vt [b] AB ad EF. Atqui series MK [c] est ad seriem OK, vt planum AM ad planum CO, (sunt enim similium rationum series) ergo series MK est ad seriem OK, vt A B ad EF; inter quas impar numerus basium intercedit, nempè, 3. Atqui in tota serie basium, non possunt reperiri duę aliæ lineæ, quæ eandem rationem habeant, quàm A B, E F, nisi illæ inter quas idem ternarius numerus linearum intercedit, vti ex elementis demonstratur; igitur nullæ lineæ ex serie basium, inter quas impar linearum numerus interiicitur, eandem habent rationem, quam series MK ad sui partem OK.

a 124. huius. b 10. sexti. c 84. huius.

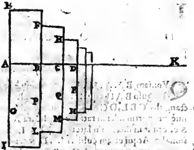
Comparentur modò duæ series MK, PK, inter quarum initia par planorum sit numerus: Rursum igitur ostendemus vti priùs seriem MK esse ad seriem PK, vt AB ad GH. quare cùm inter AB & GH, impar linearum sit numerus, nempe 5; tota demonstratio primæ partis huic etiam quadrat: vnde patet propositionis veritas.

PROPOSITIO CLX.

Data sit quadratorum series habens bases in directum & terminum longitudinis K. Deinde ex singulis punctis B, C, D, &c. erectæ sint perpendiculares A I, B L, C M, &c. proportionales continuæ in ratione dimidiata proportionis A B ad BC; & super illis perpendicularibus in altitudine linearum A B, BC, &c. fiant rectangula I B, L C, M D, &c.

Dico seriem rectangulorum I K, ad seriem rectangulorum L K, triplicatam habere proportionem rationis A I ad B L; cuius quadruplicatam habet series quadratorum E K, ad seriem quadratorum F K.

Demonstratio.



Primum enim rectangula I B, L C, &c. esse in continua analogia sic ostendo. ratio rectanguli I B ad L C, cōponitur ex rationibus A I ad B L, hoc est ex hypothesi B L ad C M, & AB ad BC, hoc est BC ad CD; Atqui etiam rectangulorum L C, M D, ratio componitur ex rationibus B L ad CM, & B C ad CD; ergo eadem est rectanguli I B ad L C, & L C ad M D ratio: ergo illa rectangula sunt in continua analogia, habeturque progressio continuè proportionalium rectangulorum I, L, M, N, K: quare series I K est [d] ad seriem L K, vt rectangulum I B, ad rectangulum L C: Atqui ratio rectanguli I B ad L C, componitur ex ratione A I ad BL, & ex ratione AB ad BC, quæ ponitur esse duplicata rationis A I ad B L; ergo ratio rectanguli I B ad L C, hoc est sicut modò ostendimus, ratio seriei I K ad seriem L K, est triplicata rationis A I ad B L. Series autem quadratorum E K est ad seriem F K, [e] vt quadratum BE ad quadratum CF, hoc est in duplicata rationis A B ad B C, hoc est (vt ex hypothesi colligitur) in quadruplicata rationis A I ad B L, cuius triplicata est ratio seriei rectangulorum I K, ad seriem L K. Quod erat demonstrandum.

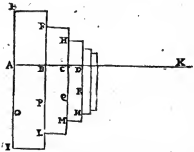
d 82. huius. e Ibid.

PROPOSITIO CLXI.

Iisdem positis loco rectangulorum intelligatur super normalibus A I, B L, &c. construi series quadratorum.

Dico seriem quadratorum E K, ad seriem F K, duplicatam habere rationem eius, quam habet series quadratorum A I, B L, C M, &c. ad seriem quadratorum B L, C M, D N, &c.

Demonstratio.



a ibid. Series E K est ad seriem a F K vt quadratum B E ad quadratum C F, hoc est in duplicata rationis A B ad B C. similiter ratio seriei quadratorum A I, B L, &c. ad seriem quadratorum B L, C M, &c. eadem est quæ quadrati A I ad quadratum B L, hoc est duplicata rationis A I, ad B L: hoc est ex hypothesi ratio seriei quadratorum A I, &c. ad seriem quadratorum B L, &c. eadem est quæ A B ad B C. quare cùm ostensum sit rationem seriei E K, ad seriem F K, esse duplicatam rationis A B ad B E, erit quoque duplicata rationis, quam habet series rectangulorum I K, ad seriem rectangulorum L K: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXII.

Iisdem positis quæ suprà; inter B A, A I, C B, B L, D C, C M, &c. inueniantur mediæ proportionales A O, B P, C Q, &c.

Dico quadrata A O, B P, C Q, &c. cubis A I, B L, C M, &c. esse proportionalia.

Demonstratio.

b 17. sexti. Qvoniam B A, A O, A I, sunt continuæ proportionales, erit quadratum A O, rectangulo B A I b æquale: similiter reliqua quadrata B P, C Q, &c. reliquis rectangulis C B L, D C M, &c. erunt æqualia. quare cùm rectangula c dicta sint continuè proportionalia in ratione triplicata A I ad B L, quadrata quoque A O, B P, &c. erunt in dictorum laterum A I, B L, &c. triplicata ratione continuè proportionalia. Atqui etiam cubi A I, B L, &c. sunt in laterum A I, B L, &c. d triplicata ratione; ergo quadrata A O, B P, &c. cubis A I, B L, &c. sunt proportionalia. Quod erat demonstrandum.

c 160. huius.

d 33. vndecimi.

PRO-

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM

PARS QVARTA

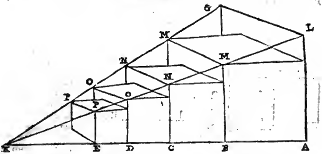
Doctrinam præcedenti parte in planis demonstratam, corporibus, solidisq; applicat.

PROPOSITIO CLXIII.

Data sit quadratorum continuè proportionalium series, basibus in directum positis, cuius longitudinis terminus sit K, super singulis autem quadratis cubi construantur.

Dico constitui seriem cuborum continuè proportionalium, quæ eumdem quoque habeant terminum longitudinis K.

Demonstratio.



Ratio cubi AM ad cubum BN, triplicata est rationis [a] AB ad BC, item ratio cubi BN ad cubum CO, triplicata est rationis [b] BC ad CD; id est rationis AB ad BC; (ponuntur enim quadrata AM, BN, CO &c. in continua analogia) quare cùm rationes vtræque, cubi AM ad cubum BN, & cubi BN ad cubum CO, triplicatæ sint rationis AB ad BC, eædem erunt. Sunt igitur cubi AM, BN, CO in continua analogia; eodem modo erunt & reliqui omnes continuè proportionales. Quod erat primum. ex quo patet etiam secundum: Cùm enim quadratorum & cuborum series, pariter semper procedant, idem vtriusque terminus sit longitudinis necesse est. Quæ erant demonstranda.

[a] 33. undecimi.
[b] 33. sexti

PROPOSITIO CLXVI.

Iisdem positis; primæ AB, & quartæ DE, æquales fiant RS, ST: continueturque ratio RS ad ST, per plures semper terminos TV, VX, &c.

Dico cubum primum AM, esse ad quemlibet cubum seriei propositæ, verbi gratia ad quartum DP, vt est linea RS ad quartam VX.

R S T VX

Demonstratio.

R . S T. VX

a 33. undecimi.

CVbus A M ad cubum D P, est in triplicata a rationis A B ad D E, hoc est per constructionem rationis R S ad S T. Atqui etiam R S ad quartam V X, est in triplicata ratione eius, quam habet R S ad S T: ergo vt R S ad V X, sic cubus A M ad cubum D P. Simili ratiocinatione ostendemus cubum primum, ad quemuis seriei cubum, eandem habere rationem, quam habet R S ad lineam quæ æquè distabit à prima R S, atque cubus à cubo primo A M. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

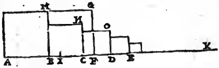
DVo hæc theoremata eâdem seruatâ demonstratione, ad omnia similium corporum genera licebit extendere.

PROPOSITIO CLXV.

DAta sit quadratorum series, habens bases in directum, & terminum longitudinis K. super quadratis autem singulis, exstructi sint cubi: Petitur seriei cubicæ æquale parallelepipedum exhiberi.

Constructio & demonstratio.

b 10. huius.



SEriei rationis primæ basicos A B, ad quartam D E, fac b æqualem A F; & super A F, in altitudine A B, rectangulum A G: deinde super rectangulo A G, in altitudine A B, construe parallelepipedum rectangulum. Dico hoc seriei cubicæ æquari. Vel super quadrato A B in altitudine lineæ, æqualis seriei rationis A B ad D E, fac parallelepipedum. Dico hoc esse quæsitum. Fiat enim B I æqualis D E. Quoniam igitur ex constructione seriei rationis A B ad B I, siue

c 21. huius. A B ad D E, æqualis est A F, erit c A F ad B F, vt A B ad B I, hoc est vt A B

d 11. sexti. ad D E: quia autem quadrata ex hypothesi sunt continua, erunt d lineæ A B, B C,

e 33. undecimi. C D, D E, &c. in continua analogia: vnde & cubus e A M ad cubum B N, vt A B ad D E, hoc est (sicut ostendi) vt A F ad B F: Quare cùm parallelepipedum A G,

f 25. undecimi. sit ad parallelepipedum B G, f vt basis A G ad basim B G, hoc est vt g A F ad B F,

g 1. sexti. erit cubus A M ad cubum B N, vt parallelepipedum A G, ad parallelepipedum B G: Atqui tota h series cubica M K, est ad seriem cubicam N K, vt cubus A M ad

h 21. huius. cubum B N, ergo parallelepipedum A G, est ad parallelepipedum B G, vt series cubica M K, ad seriem cubicam N K: ergo diuidendo cubus A M, est ad parallelepipedum B G, vt cubus idem A M, ad seriem cubicam N K: (cùm enim parallelepipeda A G, B G constructa sint supra bases A G, B G, in communi altitudine A B, patet cubum A M esse excessum parallelepipedi A G super parallelepipedum B G.) Itaque series cubica N K & parallelepipedum B G, erunt æqualia; communique addito cubo A M, tota series cubica, & parallelepipedum A G æqualia erunt. Factum igitur est quod petebatur.

Corol-

Corollarium.

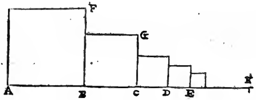
ITaque si fuerint propositæ binæ, vel plures cuborum progressiones, etiam rationum dissimilium, cognoscetur earum proportio inter se, si per hanc propositionem singulis cuborum progressionibus æqualia parallelepipeda constituantur.

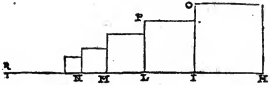
PROPOSITIO CLXVI.

DEntur binæ, sed æquales cuborum progressiones rationum dissimilium.

Dico seriem cubicam A K, ad seriem cubicam H R, rationem habere compositam, ex ratione primi quadrati A F, ad primum quadratum H O, & ratione seriei rationis A B primæ, ad quartam D E, ad seriem rationis H I, primæ, ad quartam M N.

Demonstratio.





PArallelepipedum factum super quadrato AB, in altitudine lineæ seriei rationis AB ad DE, per præcedentem seriei cubicæ AK, erit æquale: similiter parallelepipedum super quadrato HI, in altitudine lineæ seriei rationis HI ad MN, seriei cubicæ HR æquale est. Quare cùm series cubicæ ponantur æquales, dicta quoque parallelepipeda æqualia erunt; ergo reciprocam habent basium & [a] altitudinum rationem, hoc est habent rationem compositam ex rationibus basium & altitudinũ: Quare & series cubicę AK & HR illis æquales, rationem habent compositam ex ratione dictarum altitudinum, hoc est ex ratione seriei AB, DE, &c. ad seriem HI, MN, &c. & ex ratione basium, hoc est ex ratione quadrati AF ad quadratum HO. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. undecimi.

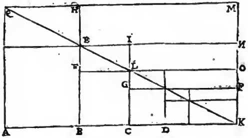
PROPOSITIO CLXVII.

DAta sit quadratorum progressio, basibus in directum positis, quæ terminum longitudinis habeat K. & iuxta 131. huius inscripta sit triangulo A Q K; completo autem rectangulo A M, producantur latera quadratorum in N, O, P, &c. & in H, I, L, &c.

 Dico

Dico feriem parallelepipedorum, fuper rectangulis E M, F N, G O, &c. in altitudine linearum B E, C F, D G, &c. æqualem effe feriei cubicæ, fuper quadratis exftructæ.

Demonftratio.



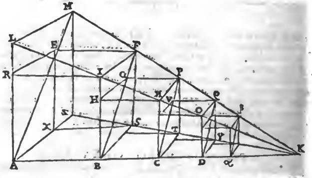
a 43. primi. Dicta enim E M, F N, &c. rectangula, funt complementa rectangulorum, quæ funt circa diametrum, ergo a fingula quadratis fingulis ordine funt æqualia. Quare parallelepipeda fuper complementis illis exftructa, cùm eafdem quoque cum cubis quadratorum habeant altitudines B E, C F, &c. patet fingula b parallelepipeda fingulis cubis æqualia effe: ergo tota parallelepipedorum feries, toti feriei cubicę æquatur: quod erat demonftrandum.

b 7. duodecimi.

PROPOSITIO CLXVIII.

Data fit progreffio linearum A B, B C, C D, &c. terminata in K, & fuper lineis quadrata, fuper quadratis autem cubi. Petitur cuborum feries infcribi pyramidi, quadratam bafim habenti.

Conftructio & demonftratio.



Ex puncto K, per I, S, F, ducantur rectę K I, K S, K F, quarum duę primę K I, K S, occurrant lineis A R, A X productis in L & Z: producto deinde plano A E, occurrat linea K F in M, iunganturque L M, Z M. Dico factum quod petebatur; Ducantur enim in aduerfis cuborum planis diametri A E, B F, C P, D Q, &c. primò igitur ex hypothefi manifeftum eft vtriufq; feriei quadrata A I, B N, C O, &c. A S,

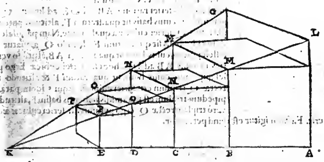
AS, BT, &c. esse in eodem plano. quare lineæ [a] KIL, KSZ transeunt per omnia puncta N, O, &c. T, Y, &c. hoc est tangunt totam cuborum seriem. Superest ergo vt demonstremus lineam KFM transire etiam per omnia puncta P, Q, &c. quod sic præstabimus. IF est ad HG, vt IB ad HB, id est vt IK ad NK, hoc est vt BK ad CK; Atqui cùm seriei AB, BC, CD terminus sit K, [b] AK, BK, CK sunt continuæ proportionales: ergo BK est ad CK, vt AB ad BC: & IF ad HG vt AB ad BC: quare cùm AB, IF æquales sint, etiam BC & intercepta HG, æquales erunt; ergo BF transit per verticem anguli G, quadrati SBHG, cùm intercipiat parallelam HG æqualem lateri dicti quadrati; vnde B, G, F sunt in directum. Itaque cùm ex elementis constet diametros aduersis CP, BG esse parallelas, etiam CP, BF erunt parallelæ. Quia igitur linea BF est in [c] plano BFK, etiam CP in eodem [d] plano BFK erit. Similiter ostendemus lineas DQ, CP, esse parallelas, & proinde cùm CP sit in plano BFK, etiam DQ esse in plano BFK. eodem discursu demonstrabimus omnes BF, CP, DQ, Xβ, &c. esse in eodem plano BFK, siue AMK: deinde BF, CP, &c. cùm sint in oppositis planis parallelis, productæ nunquam conuenient. quare cùm sint omnes in plano BFC, erunt omnes inter [e] se parallelæ. Præterea ex elementis & ex datis patet diametros BF, CP, &c. esse lateribus IB, NC, &c. hoc est AB, BC, CD, &c. proportionales: quare [f] KFM transit per omnia puncta P, Q, β, &c. Quod autem etiam basis ZM quadrata sit, sic ostendo: ZA est ad XA, vt ZK ad SK, hoc est vt AK ad BK, hoc est vt LK ad IK, hoc est denique vt LA ad RA: Quia ergo XA, RA æquales sunt, etiam ZA, LA [g] æquales erunt. Præterea LM est ad IF vt LK ad IK, hoc est vt AK ad BK, hoc est vt AZ ad BS, atqui IF, BS æquales sunt, ergo etiam LM, AZ æquales erunt. Deinde cùm LK sit ad IK, vt [h] MK ad FK, erit LM parallela ad IF, quę cùm ad AXZ parallela sit, etiam LM ad AXZ parallela erit. Quia igitur MZ & AL æquales & parallelas LM, AZ connectunt, ipsę quoque [i] æquales & parallelæ erunt; est autem angulus LAZ rectus, ac proinde etiam angulus MZA, & consequenter anguli illis oppositi sunt recti, basis igitur ZL est quadrata: Factum ergo est quod petebatur.

a 131 huius.
b 82. huius.
c 2. vndecimi.
d Defin. 34. primi.
e ibid.
f Lemma ad 131 huius.
g 14 quinti.
h 17. vndecimi.
i 33. primi.

PROPOSITIO CLXIX.

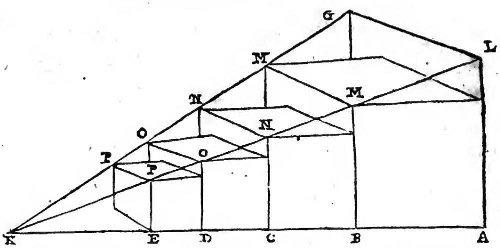
Series seu pyramis cubica inscripta sit pyramidi ALGK. Oporteat pyramidis includentis, & inclusæ differentiam exhibere.

Constructio & demonstratio.



Super quadrato AB in altitudine lineæ æqualis seriei rationis AB ad DE fac parallelepipedum, hoc est seriei [k] cubicæ æquale erit. Deinde fiat vt quadratum AB ad quadratum ALG, ita pyramidis GLK altitudo AK ad aliquam Q: denique super quadrato AB in altitudine lineæ, quę contineat vnam tertiam rectæ Q fiat parallelepipedum, erit hoc pyramidi LK æquale; nam parallelepipedum super quadrato

k 165. huius.



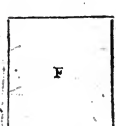
a 34. undecimi. drato AB in altitudine lineæ Q, æquale est [a] parallelepipedo super quadrato AG in altitudine AK, cùm habeant bases ex constr. & altitudines reciprocas. Quare cùm pyramis [b] LK sit vna tertia parallelepipedi super AG in altitudine AK (est enim AK altitudo pyramidis, quia AK vt ex construct. præcedentis propositionis patet, est normalis ad AL) itemque parallelepipedum super quadrato AG in altitudine tertiæ partis rectæ Q, sit eiusdem parallelepipedi tertia pars, erunt pyramis & dictum parallelepipedum æqualia. Quare cùm pyramis maior sit inscripta cubica pyramide, etiam dictum parallelepipedum nempe super quadrato AB in altitudine tertię partis rectę Q, erit maius parallelepipedo quod pyramidi cubicę ęquale feceramus. Eadem igitur erit pyramidis includentis & inclusæ quæ horum parallelepipedorum differentia. exhibuimus ergo, &c. quod petebatur.

b 7. vndecimi.

PROPOSITIO CLXX.

DAtæ seriei siue pyramidi cubicæ, pyramidem super F quadrato dato, æqualem exhibere.

Constructio & demonstratio.



SIt series cuborum AM, BN, CO, &c. & datum quadratum sit F, & fiat vt quadratum F ad quadratum AB, ita linea æqualis seriei rationis AB ad DE ad lineam Q. Dico pyramidem cuius basis sit quadratum F, altitudo autem tripla ipsius Q seriei cubicæ æqualem esse. Nam parallelepipedum cuius basis sit quadratum F altitudo Q æquatur [c] parallelepipedo, cuius basis sit quadratum AB, altitudo verò series rationis AB ad DE, hoc est [d] seriei cubicæ. Ergo parallelepipedum cuius basis sit quadratum F & altitudo tripla rectæ Q triplum erit seriei cubicæ. atqui [e] idem parallelepipedum triplum est pyramidis habentis basim F, altitudinem verò triplam rectæ Q, ergo pyramis illi seriei cubicæ æqualis erit. Factum igitur est quod petebatur.

c 34. vndecimi.

d 165. huius

e 7. duodecimi.

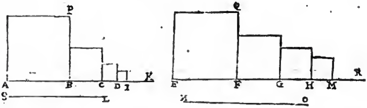
PRO-

PROPOSITIO CLXXI.

Binæ cuborum series quarumuis rationum ab æqualibus cubis A D, E Q incipiant.

Dico cubicas series eamdem habere ad inuicem proportionem, quam habent lineæ S L, N O æquales seriebus rationum A B ad D I, & E F ad H M.

Demonstratio.



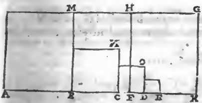
Parallelepipedum super quadrato A B in altitudine S L, æquatur [a] seriei cubicæ P K. Item parallelepipedum super quadrato E F in altitudine N O, æquatur seriei cubicæ Q R: cùm autem cubi A P, E Q ponantur æquales, etiam quadrata A B, E F æqualia erunt. Quare dicta parallelepipeda easdem bases habebunt; itaque dicta parallelepipeda, hoc est series cubicæ eamdem habebunt rationem, quam altitudines S L, N O, hoc est quam habent series rationis A B ad D I, & rationis E F ad H M: quod erat demonstrandum. [a 165. huius]

PROPOSITIO CLXXII.

Data sit quadratorum progressio solita, superque illis exstructa series cuborum, & inscripta parallelepipedo A G, cuius basis sit quadratum A B, altitudo A K, eadem nempè quæ longitudo seriei cubicæ.

Dico parallelepipedi ad seriem cubicam, eamdem esse rationem, quæ est D A trium primorum laterum, ad latus primum A B.

Demonstratio.

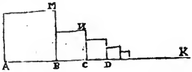


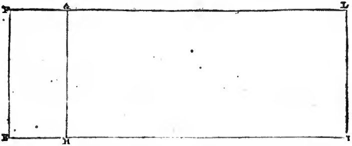
Linea A F æqualis fiat seriei rationis A B ad D E; erit parallelepipedum super quadrato A B in altitudine A L (quod vocemus parallelepipedum A H) æquale [b] seriei cubicæ; sed parallelepipedū A G est ad parallelepipedum A H, (cùm eadem sit basis vtriusque) vt A K ad A F, hoc est vt [c] D A ad B A; ergo parallelepipedum A G etiam erit ad seriem cubicam vt D A ad B A. Quod erat demonstrandum. [b Ibid.] [c 105 huius.]

PROPOSITIO CLXXIII.

Data sit vt suprà cubórum series. Oportet exhibere superficiem omnibus superficiebus omnium cuborum progressionis datæ æqualẽ.

Demonstratio.





170. huius Fiat rectangulum EHGF æquale progressioni quadratorum AM, BN, &c. tum EI sextupla fiat lineæ EH. Dico rectangulum FI esse id quod quæritur. Cùm superficies singulorum cuborum constet sex quadratis æqualibus, manifestum est omnes seriei cubicæ superficies constitui ex sex seriebus quadratorum AM, BN, &c. atqui rectangulum HF ex constructione seriei quadratorum AM, BN, est æquale. Ergo sex rectangula FH, hoc est ex construct. rectangulum FI, constituet omnes seriei cubicæ datæ superficies. Fecimus ergo quod petebatur.

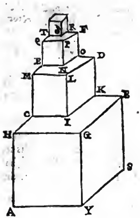
PROPOSITIO CLXXIV.

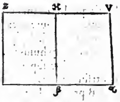
Data sit cuborum progressio sibi mutuo insistentium, constituens pyramidem cubicam.

Dico residuas basium superficies, nempè BKICHG, DONEML & reliquas omnes in infinitum simul sumptas, quadrato primi cubi æquales esse.

Demonstratio.

Fiat enim seriei rationis primæ AH ad tertiam EQ æqualis VZ; super qua in altitudine AH fiat rectangulum Zα, sumptâque VX æquali, AH ducatur ad Vα parallela Xβ, quæ abscindat quadratum Xα æquale quadrato AG seu HB. Rectangulum αZ per 79. huius æquatur seriei quadratorum AG, CL, EP, &c. hoc est (quoniam cuborum plana omnia sunt quadrata æqualia) seriei quadratorum HB. MD, QF, &c. ergo cum αX ex constr. quadrato AB æquale sit, erit reliquum βZ reliquæ quadratorum seriei MD, QF, &c. æquale. Atqui series quadratorum





dratorum M D, Q F, &c. eadem eſt cum ſerie quadratorum K C, O E, &c. rectangulum igitur β Z ſeriei quadratorum CK, O E, &c. æquatur. Quare cùm rectangulum α Z & ſeries quadratorum H B, M D, Q F, &c. itemque rectangulum β Z & ſeries quadratorum C K, E O, &c. æqualia ſint, etiam exceſſus rectanguli α Z ſuper β Z, & exceſſus ſeriei H B, M D, &c. ſuper ſeriem C K, E O, &c. æquales erunt. Atqui exceſſus α Z ſuper β Z eſt α X, id eſt ex conſtruct. quadratum H B: exceſſus verò ſeriei quadratorum B H, M D, &c. ſuper ſeriem quadratorum C K, E O, &c. ſunt figuræ BKICHG, DONEML, F R δ T Q P, &c. ergo figuræ illæ omnes ſimul ſumptæ æquantur quadrato H B. Quod erat demonſtrandum.

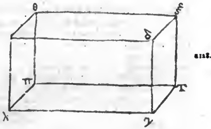
PROPOSITIO CLXXV.

Iiſdem poſitis,

Dico ſuperficiem cubicæ pyramidis, æqualem eſſe ſuperficiei parallelepipedi γθ, cuius baſis γξ ſit primi cubi quadratū, altitudo verò γ λ æqualis ſeriei rationis primæ A H ad tertiam E Q. Per ſuperficiem autem pyramidis cubicæ intelligo hîc ſuperficies omnium cuborum, exceptis quadratis C K, E O, T R, &c.

Demonſtratio.

Rectangulum λδ continetur lineâ γλ, æquali ſeriei rationis AH ad E Q, & altitudine γδ, quę æqualis eſt A H: eſt enim quadratum γξ æquale quadrato A G: igitur rectāgulum λδ omnibus quadratis A G, C L, &c. æquale eſt: reliquæ igitur hederæ τθ, δθ, γπ æquales ſunt ſeriei quadratorum oppoſitæ ſeriei A G, C L, &c. & ſeriei quadratorum B Y, D I, &c. nec non illi quę infra huius oppoſita eſt: eſt autem & quadratum γξ baſis parallelepipedi æqualis qua-



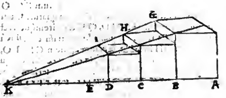
drato AS basi pyramidis cubicæ, & per præcedentem, quadratum HB, id est Λθ æquale est omnium basium residuis. Ergo tota superficies parallelepipedi, toti pyramidis cubicæ superficiei æqualis est. Quod erat demonstrandum.

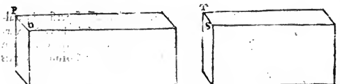
PROPOSITIO CLXXVI.

DAta sit quadratorum progressio cui terminus longitudinis sit K; super quadratis autem exstructa sit cuborum series. Deinde per 165. huius factum sit parallelepipedum MP, æquale seriei cubicæ.

Dico superficiem huius parallelepipedi, ad superficiem pyramidis cubicæ (sumendo hic superficiem pyramidis cubicæ, vt in propositione præcedenti sumpsimus) eam habere rationem, quam linea æqualis seriei rationis AB primæ ad DE quartam, vnà cum dimidia ipsius AB, habet ad æqualem seriei rationis primæ AB ad CD tertiam, vnà cum dimidia AB.

Demonstratio.





PArallelepipedum MP factum est æquale seriei cubicæ, igitur latus MN æquale est a seriei rationis AB ad DE, & NO, OP æquales sunt singulæ ipsi AB. Fiat iam super quadrato RT quod sit æquale quadrato AB, parallelepipedum QT, in altitudine QR, æquali seriei rationis AB ad CD. ergo per præcedentem superficies parallelepipedi QT æqualis erit superficiei cubicæ pyramidis. Deinde superficies parallelepipedi MP æqualis est rectangulo b quod lineâ compositâ ex quadrupla MN & dupla NO, & altitudine NO siue OP continetur. Similiter superficies parallelepipedi QT æqualis est rectangulo cuius basis sit composita ex quadrupla QR & dupla RS; altitudo verò RS siue ST (sunt enim RS, ST æquales) quia latera sunt quadrati RT. Quare cùm dicta rectangula sint vt bases (altitudines enim NO, RS æquales habent eidem AB, ideoque æquales inter se) etiam erit parallelepipedi MP superficies, ad superficiem

a 165. huius.

b 1. sexti.

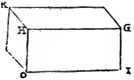
ciem parallelepipedi QT, vt basis ad basim, nempè vt composita ex quadrupla MN & dupla NO, ad compositam ex quadrupla QR & dupla RS. Atqui vt quadrupla MN cum dupla NO, ad quadruplam QR cum dupla RS, sic MN cum dimidia NO ad QR cum dimidia RS; ergo superficies parallelepipedi MP, est ad superficiem parallelepipedi QT, hoc est ad superficiem pyramidis cubicę, vt MN cum dimidia NO, hoc est vt series rationis AB ad DE cum dimidia AB, ad QR cum dimidia RS, hoc est ad seriem rationis AB ad CD cum dimidia AB: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVII.

Proportionem exhibere quam superficies pyramidis habet ad inscriptæ sibi pyramidis cubicæ superficiem.: eo modo intelligendo superficiem seriei cubicæ, quo in præcedenti propositione.

Constructio & demonstratio.





Assumemus hoc loco pyramidem isosceliam, facilitatis gratiâ. sit ergo pyramis QLMRN isoscelis, cuius basis sit quadratum QM, cui pyramis cubica AB, CD, &c. inscripta intelligatur, factoque quadrato OK æquali quadrato AB reperiatur linea GH æqualis seriei rationis AB primę ad tertiam EF; & super quadrato OK in altitudine GH, fac parallelepipedum, cuius superficies æquabitur [a] superficiei pyramidis cubicæ. Dico vt rectangulum super dupla LN & LM tamquam vnâ recta, in altitudine LM, est ad rectangulum super quadrupla GH & dupla AO tamquam vnâ rectâ, in altitudine HO, sic pyramidis includentis superficies, ad superficiem inclusæ pyramidis cubicæ. Ducatur enim ex vertice pyramidis N ad LM normalis NP, quæ vt ex datis facilè colliges, bisecat LM in P: rectangulum igitur NLP duplum est trianguli rectanguli LPN, vt patet ex elementis; ergo rectangulum NLP, æquale est triangulo LMN. & rectangulum NLM duplum est trianguli LMN. ergo rectangulum super dupla LN, in altitudine LM, est quadruplum trianguli LMN, hoc est æquatur toti superficiei pyramidis pręter basim; quare rectangulum super dupla LN & LM tam- [a] 175 huius.

 quam

a 1. secundi. quam vnâ rectâ in altitudine LM, æquatur toti a superficiei pyramidis. simili discursu demonstrabimus rectangulum super quadrupla GH & dupla HO tamquam vnâ rectâ, in altitudine HO æquari superficiei parallelepipedi; ergo superficies pyramidis N, est ad superficiem parallelepipedi, hoc est ex construct. ad superficiem pyramidis cubicæ, vt sunt dicta rectangula inter se. Exhibuimus ergo, &c. quod petebatur.

Libri secundi finis.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER TERTIVS DE CIRCVLIS.

ARGVMENTVM.

Liber hic omnis in quatuor partes veluti membra diuiditur.
Prima de linearum in circulis agit proportione.
Secunda angulos & arcus circulares inter se comparat.
Tertia circulorum mutuas intersectiones & contactus exhibet.
Quarta linearum in circulis potentiam contemplatur.

CIRCVLORVM PARS PRIMA.

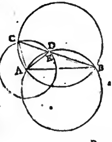
De linearum in Circulis proportione.

PROPOSITIO PRIMA.

AEquales circuli sese intersecent in A & B; centroque A, interuallo AC, circulus describatur, occurrens æqualibus circulis in CD.

Dico C,D,B, puncta esse in directum.

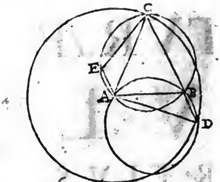
Demonstratio.

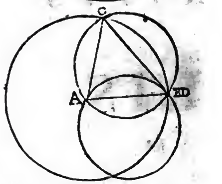


SIt primò radius AC, minor AB, ducaturque CB, occurrens ADB, perimetro in E. iunganturque AE, AC Quoniam angulus ABC, vtrique circulorum æqualium ADB, ACB communis est, erunt arcus a AE, AC, illorumque subtensæ æquales; hoc est recta AE, æqualis AC, & E punctum in peripheria circuli ADC; sed idem E, per constructionem est in perimetro circuli ADB, igitur E punctum cum D, idem est, transitq; CB recta, per D, & C. quare in directum sunt puncta C, D, B.

a 29. tert.

2. Ra-





2. Radius A C maior sit rectâ A B: iungantur C B, B D; & A B rectæ, æqualis applicetur C E, iunganturq; A E, A D. Quoniam igitur C E linea, æqualis ponitur rectæ A B, & C A æqualis ipsi A D, sint autem & circuli A B C, A B D per construc. inter se æquales, erit arcus [a] C E æqualis arcui A B, & arcus C E A, æqualis arcui A B D: vnde angulus A B D, æqualis [b] angulo A E C. sed angulus A E C vnà cum angulo [c] A B C duobus rectis est æqualis, igitur & angulus A B D, cum angulo A B C duobus rectis æquatur. quare C B, B D lineæ in directum sunt.

a ibid.

b 16. tertij.

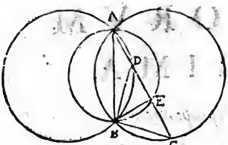
c 22. tertij.

3. Radius A C. æqualis sit radio A B. patet punctum D, incidere in B. igitur, &c. Quod fuit demonstrandum.

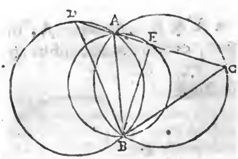
PROPOSITIO II.

OCcurrant sibi denuo æquales duo circuli in A & B. circuli quoque A E B diameter sit A B, ducaturq; recta quæuis A D, occurrens perimetris circulorum æqualium in D, & C, & circulo A E B in E. Dico in E bifariam diuidi rectam D C.

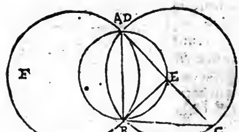
Demonstratio.



CAdant primò puncta E & D, ad eandem partem lineæ A B; ducantur rectæ D B, C B, E B: Quoniam angulus C A B, duobus arcubus D B, C B circulorum æqualium insistit, æquales erunt subtensę D B, C B; ac proinde anguli E D B, E C B, æquales; sunt autē anguli D E B, C E B, recti ob A E B semicirculum, & E B vtrique triangulorum D B E, B E C communis, triangula igitur D E B, C E B, æqualia sunt inter se, & similia; quare & C D in E bifariam diuisa.



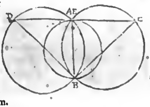
Secundò sit A punctum medium inter D, & E: Cum circuli A C B, A D B, sint æquales, & A B linea, vtrique communis triangulo D E B, E B C, erunt anguli A D B, A C B, inter se æquales; quàre cùm anguli quoque ad E recti sint, erunt triangula D E B, E B C inter se æqualia & similia; ac proinde D E rectę E C æqualis.



d 32. tertij.

Tertiò linea A C contingat circulum A F B in A: punctum quoque D idem sit cum A, quia igitur A C contingit circulum A F B, erit angulus C A B, æqualis [d] angulo segmenti D F B, ac proinde angulo A C B (cùm A F B, A C B segmenta sunt æqualia) quare æquales quoque sunt anguli B A C, B C A: & quia angulus A E B rectus est in semi-

semicirculo AEB, erunt similia triangula & æqualia ABE, EBC: vnde & AE, EC æquales sunt lineæ.



Quartò. Contingat recta CD, circulum diametri AB in A, adeoq; & punctum E, idem sit cum puncto A. cùm igitur DC sit contingens, a erunt BAD, BAC anguli recti: sunt autem æquales anguli ADB, ACB, æqualium segmentorum; igitur triangula ADB, ABC, similia sunt & æqualia. Quod fuit demonstrandum.

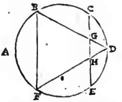
a 18. tertij.

PROPOSITIO III.

Diuiso circulo in sex partes æquales, punctis A, B, C, D, E, F. ductisque BF, CE, ponantur BD, FD, occurrentes CE in G & H. Dico CE lineam in G & H trifariam esse diuisam.

Demonstratio.

CVm enim arcus BD, DF, FB ponantur æquales, erit BDF triangulum æquilaterum. vnde cùm CE æquidistet BF, erit & GDH æquilaterum: est autẽ GD æqualis b CG, & HD æqualis HE; igitur CG, GH, HE lineæ, sunt inter se æquales, & CE in G & H trifariam diuisa. Quod erat demonstrandum.



b Deducitur ex 109. & 111. Pappi lib. 7.

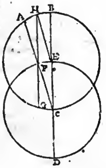
PROPOSITIO IV.

SEcent se inuicem æquales duo circuli ABC, DEF- per mutua centra C, E, transeuntes: lineæ verò BD, per vtriusque centrum actæ, parallela ponatur quæuis HG, occurrens perimetro in F; & per F linea CFA.

Dico GF, FA, æquales esse.

Demonstratio.

DVcatur EH: quoniam HG, æquidistat BC erit angulus FHE æqualis angulo HEB. & quia arcus HB, FE ob circulorum æqualitatem, æquales quoque sunt, erit angulus FCE æqualis angulo HEB, adeoque angulo FHE; vnde parallelogrammum vel Rhombus est CH: & HF lineæ æqualis CE, id est CF; est autem rectangulo CFA, æquale c HFG rectangulum; igitur AF, GF lineæ d quoque inter se æquantur. Quod fuit demonstrandum.



c 35. tertij.
d 1. sexti.

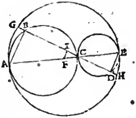
Corollarium.

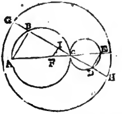
HInc sequitur HF, BE lineas quoque inter se æquari, cùm HF linea æquetur ipsi EC: & quia HG est quæcumque æquidistans diametro BC, sequitur parallelas omnes rectæ BE, cauâ circuli ABC, & conuexa FED peripheria interceptas, esse inter se æquales, cùm singulæ æquentur ipsi BE.

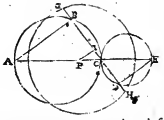
PROPOSITIO V.

Contingant sese circuli ABC, CDE. exterius in C, lineâ vero AE, per vtriusque centrum actâ, ac diuisâ bifariam in F, describatur quiuis circulus centro F, & per C, punctum contactus, recta ponatur GCH: Dico GB, DH æquales esse lineas.

Demonstratio.





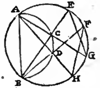


IVngantur AB, ED, illisq; æquidistans, ponatur FI, erit hæc normalis ad GH, cùm ABC angulus rectus sit : vnde & GH in I diuisa est bifariam, estque AF ad FC, vt BI ad IC : & permutando AF ad BI, vt FC ad IC. Deinde vt EC ad CF, ita DC est ad CI, & cõponendo, permutando, vt FC ad IC, ita EF ad ID: sed vt FC ad IC, sic AF ad BI, igitur vt AF ad BI, ita EF ad DI, & permutando vt AF ad EF, ita BI ad DI, sunt autem lineæ AF, FE ex hypothesi æquales inter se ; ergo DI, BI, quoque inter se æquantur; quæ si demantur ab æqualibus IH, IG, manent residuæ GB, DH, inter se æquales. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

INtersecent sese quiuis duo circuli in A & B; assumptisque in ACD perimetro punctis C, D, agantur per illa lineæ ACG, ADH: & BCE, BDF.

Dico iunctas EG, FH æquales esse.



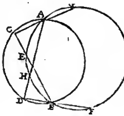
Demonstratio.

PRimò, arcus ACB ambitu AGB interceptus, vtrumque punctorum C & D, contineat; quo casu cùm anguli CAD, CBD arcui CD insistentes [a] æquentur, erunt EF, GH arcus [b] quoque inter se æquales; addito igitur communi arcu FG, erunt FH, EG arcus adeoque & lineæ [c] æquales.

a 27. tertij.
b 26. tertij.
c 29. tertij.

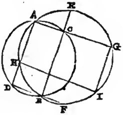
Secundò arcus ACB, extra AFB ambitum conten-

contentus, puncta C & D obtineat; cùm igitur anguli CAD, CBD, arcui CD inſiſtentes ſint æquales, erunt quoque anguli HAG, FBE reliqui æquales; ac proinde arcus FGE, FGH, adeoque iunctæ EG, HF æquales.



Tertiò punctum C intra AGB circuli ſpatium contineatur; D verò punctum extra collocatum ſit. Ducatur GI æquidiſtans CB, iunganturque HI: quoniam GI, CB æquidiſtant, anguli ACB, AGI, æquales ſunt; vnde & angulus AHI æqualis eſt angulo ADB: quia AHI, a cum AGI, hoc eſt ACB duobus rectis æqualis eſt, ſicut eſt angulus ACB cum ADB. Vnde æquidiſtantes ſunt HI & DF, adeoque & arcus HB, FI & conſequenter HF, BI æquales. quare & iuncta HF id eſt BI ipſi EG æquatur. Quod erat demonſtrandum.

a 11. huj.



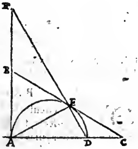
PROPOSITIO VII.

Esto ABC triangulo rectangulo, ſemicirculus inſcriptus AED contingens AB, BC latera in A & E: & per E ponatur recta DE occurrens AB, in F.

Dico AB, BF lineas, æquales eſſe.

Demonſtratio.

Iungantur AE: erit igitur angulus AED in ſemicirculo rectus, vti & reliquus AEF: qui proinde æqualis eſt duobus angulis EFA, EAF: eſt autem angulo EAF æqualis BEA, cùm AB, BE ſint contingentes ex eodem puncto eductæ; adeoque æquales; reliquus igitur angulus AFE, reliquo BEF æqualis eſt: quare BF rectę BE, hoc eſt AB, æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.



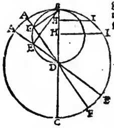
PROPOSITIO VIII.

Circulum ABC, contingat intus circulus DEB, in B. tranſiens per D centrum circuli ABC; ductis inſuper per D rectis ADF quæ circulo DEB occurrant in E: fiant DE rectis æquales DH, & perpendiculares ponantur HI ad diametrum BC.

Dico EB, HI lineas, æquales eſſe.

 Demon-

Demonstratio.



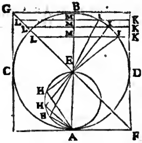
QVoniam B D, lineę ipsi D A sunt æquales; veluti & H D, rectis E D ex hypothesi, erunt residuæ H B, residuis E A æquales. quare A EF rectangula, rectangulis BHC æqualia, hoc est quadrata H I, quadratis EB: æquales igitur sunt EB, H I. Quod demonstrandum fuit.

PROPOSITIO IX.

ESto circulo ABC, cuius diameter AB, & centrum E circumscriptum quadratum G F: & super AE vt diametro, descripto circulo AHE, per centrum E, lineæ ponantur H I, & per I parallelæ rectæ A F, occurrentes F G, diametro quadrati in L, rectæ verò F D in K.

Dico HL, KL lineas inter se ęquales esse.

Demonstratio.



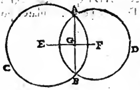
C־Oniungantur H, A; & rectæ K L, secent AB, diametrum in M: Quoniam LK lineæ, tangenti GB æquidistant, erunt I M, normales ad diametrum A B, adeoque anguli IME, angulis EHA æquales; sunt autem & IEM anguli, æquales angulis HEA, ad verticem positis, & E I lineæ, æquales rectæ E A; triangula igitur HEA, triangulis IME sunt æqualia: vnde HE, lineis EM, & HA, rectis M I æquales. Rursum cùm LM, lineæ GB æquidistent, erit vt GB ad BE, ita LM, ad ME. sunt autem GB, BE æquales, ergo & LM, EM æquales quoque sunt. Quare cùm MK, hoc est EB, lineis EI, & rectæ LM, ipsis ME, id est HE, ex demonstratis sint æquales, erunt HI lineę, æquales rectis LK; quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO X.

QVod si per circulorum sese secantium centra, recta ducta sit, quam altera intersecet, sectionum puncta coniungens.

Dico duas illas sese orthogonaliter decussare.

Demonstratio.



SInt enim circuli duo ABC, ADB quorum centra E, F; coniungat EF recta; & puncta intersectionum recta AB, occurrens EF lineæ in G, oportet ostendere angulos ad G rectos esse. ductâ EG normaliter ad AB, secta erit AB bifariam in G; sed recta quæ ex G ducitur, ad F centrum, diuidens AB bifariam in circulo ADB, eidem quoque AB orthogonaliter insistit; patet igitur

igitur lineas A B, E F sibi inuicem normales esse. Quod fuit demonstrandum.

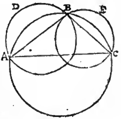
Corollarium.

Hinc patet, E F lineam, quæ circulorum sese intersecantium centra coniungit, bifariam quoque diuidere arcus, mutuis peripherijs interceptos.

PROPOSITIO XI.

Esto A B C triangulum, super cuius basi A C, descriptum sit quodlibet circuli segmentum; oportet super reliquis trianguli lateribus, segmenta describere, similia illi, quod super base descriptū est segmento.

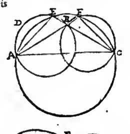
Constructio & demonstratio.



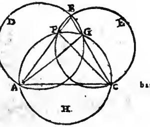
a 32. tertij.

Transeat primò segmentum super basi positum, per singula trianguli extrema; describatur autem circulus per B C, vti & per B A, qui rectas A B, B C contingat in B. Dico factum quod postulatur. Quoniam B C linea contingit circulum A D B in B; erit angulo A B C, æqualis angulus [a] segmenti A D B. eodem modo angulus segmenti B E C, æqualis est angulo A B C. quare segmentorum anguli A E B, A B C, B D C, æquales sunt inter se; & similia proinde segmenta.

Secundò B vertex trianguli A B C, cadat infra perimetrum segmenti, super A C exstructi: productis lateribus A B, B C, donec occurrant peripheriæ circuli A E C, in F & E, describantur circuli per A E B, B F C: eritque peractum quod postulatur: iunctis enim A E, C F. exsurgent anguli A E C, A F C eidem arcui insistentes æquales, ac proinde A D B, A E C segmenta similia erunt: rursum cùm angulus A E C sit æqualis angulo A F C, id est B F C, erunt & segmenta A E C, B F C, inter se similia, quare tria A D B, A E C, B F C, similia sunt.



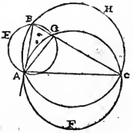
Tertiò B vertex trianguli A B C, extra segmenti ambitum constitutus sit, quod super basi exstructum est; occurratque perimeter trianguli lateribus in punctis F, & G. Tum per B F C, B G A, circuli describantur. Dico factum esse quod petitur. Iungantur A G, F C. Quoniam anguli A F C, A G C æquales sunt, erunt & B F C, B G A reliqui æquales. quare & arcus A D B, B E C quibus insistunt, similes sunt. Rursus cùm angulus A G C tam cū angulo [b] segmenti A H C, quàm cum A G B angulo, duobus rectis æquetur, dempto communi angulo A G C: erunt anguli A G B, A H C, adeoque & residuorum segmentorum anguli A D B, A G C, æquales, & A G C, B D A, segmenta similia: est autem B E C segmentum ostensum simile segmento A D B, tria igitur segmenta A G C, A D B, B E C sunt inter se similia.



b 32. tertij.

Quartò B punctum cadens extra segmentum baseos, constituat B A, trianguli latus, contingens circulum A G C in A: latus verò B C, eundem secet in G. per puncta B, A, C, & A, B, G, circuli describantur; dico illos satisfacere petitioni

 fun-



a 32. tertij.

b 32. tertij.

iungantur A, G. Quoniam A B contingit circulum A G C in A, erit angulo a B A C, æqualis angulus segmenti A F C. vnde B A C, A F C, ideoque reliqua A G C, B H C segmenta sunt similia: vlterius eũm angulus A G C tam eum angulo A G B, quàm eum angulo segmenti A F C, b duobus rectis sit æqualis, dempto communi angulo A G C, erunt A G B, A F C æquales anguli, vnde & angulus segmenti A E B, æquatur angulo A G C, adeoque A E B, A G C segmenta sunt similia. igitur constat veritas propositionis.

Corollarium.

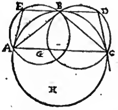
HInc patet in secundo casu, si super A B C. trianguli lateribus similia descripta sint circulorum segmenta rectas A B, C B productas cadere in communes intersectiones E, F: si enim per B & puncta quibus A E C perimetro occurrunt circuli describantur. erunt A E B, B F C segmenta similia segmento A B C.

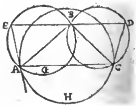
PROPOSITIO XII.

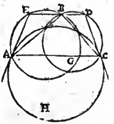
SVper A B C trianguli lateribus descripta sint A E B, A B C, B D C similia circulorum segmenta; ductæque lineæ ex A & C circulum A B C, contingant in A, & C, peripherijs autem occurrant in D, & E.

Dico E, B, D, puncta esse in directum posita.

Demonstratio.







c 32. tertij.

d 22. tertij.

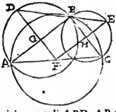
QVoniam E A, contingit circulum A B C erit angulo c E A C, æqualis angulus segmenti A H C, hoc est segmenti A G B quod illi simile est, sed angulus A E B, vnà eum angulo segmenti A G B, duobus rectis d est æqualis, igitur A E B, E A C anguli duobus rectis sunt æquales; adeoque E B, A C lineę parallelæ: eodem modo ostenduntur A C, B D, ęquidistantes esse; quare constat E B, B D, in directum esse constitutas: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

SVper lateribus trianguli A B C, similia circulorum segmenta descripta sint per quorum centra G, H, ex centro F, segmenti super A C basi

basi trianguli descripti educantur rectæ occurrentes perimetris in D & E. Dico puncta D, B, E, in directum constituta esse.

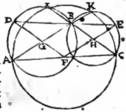
Demonstratio.



PRimò vertex trianguli ABC in perimetro sit circuli, qui super basi AC, describitur, iunganturque DB, EB. Quoniam FD, per centra F & G, acta est, secabit bifariam, tum a rectā AB, tum arcum ADB. eadem quoque ratione radius FH, diuidet bifariam cum BC rectam, tum BEC arcum. Igitur cū ADB, BEC similia sint segmenta anguli ABD, CBE similibus arcubus insistentes, æquales sunt: quare & angulus ABD æqualis est angulo BCE, quia EB arcus æqualis est arcui EC. est autem angulus ABC æquales angulo BEC ex hypothesi, igitur anguli ABD, ABC, CBE æquales sunt tribus angulis trianguli BEC adeoque duobus rectis æquales, quare lineæ DB, BE b sunt in directum.

a 10. huius.

b 14 primi.



Secundò B apex trianguli, super basi ABC erecti, intra segmenti AKC aream cadat; producantur AB, CB, cadēt illæ in cōmunes c circulorum intersectiones I & K: Quoniam FG, FH lineæ centra cōiungunt circulorū sese intersecantium erunt arcus ADI, KEC in D & E bifariam d diuisi, vnde ABD, DBI anguli, item KBE, CBE sunt æquales; sed & anguli ABI, CBK ad verticem oppositi quoque inter se æquantur, igitur & angulus ABD, ipsi KBE & IBD, angulo EBC est æqualis. quare in directum sunt D, B, E puncta. Quod erat demonstrandum.

c Coroll. prop. vndec. huius.

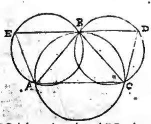
d 10. huius.

PROPOSITIO XIV.

QVod si super ABC trianguli lateribus segmenta circulorum similia, descripta fuerint; & recta quædam ED, per B, verticem acta, circulorum AEB, BDC, perimetris occurrat in D, & E.

Dico lineas inter cauas circulorum AEB, BDC peripherias & extimam circuli ABC interceptas, æquales esse.

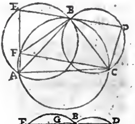
Demonstratio.



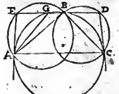
SIt primò triangulum Isoscelium ABC; & ED contingat circulum ABC in B: iunganturque AE, CD. Quoniam EB est contingens, erit angulo EBA, æqualis e angulus ACB: eadem ratione angulus CAB æqualis est angulo CBD: vnde cùm anguli BAC, BCA per hypothesim sint æquales, erunt quoque anguli EBA, CBD inter se æquales. sunt autem & anguli AEB, CDB, (ob AEB, CDB segmenta similia) æquales, insuper & AB, linea æqualis lineæ BC; igitur triangulum AEB, triangulo CBD & EB latus, lateri BD est æquale.

e 32. tertij.

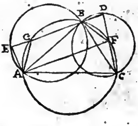
Secundò ED ponatur contingens, triangulo ABC existente Scaleno, dico ED in B bifariam secari. sit AB latus, altero BC maius, & ED contingenti, ponatur



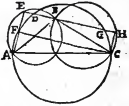
natur æquidiſtans C F: iunctaque, A F, concurrat cum D B, producta in E. quoniam parallelæ ſunt C F, D E, erit angulus A F C angulo A E D æqualis: ſed A F C æqualis ponitur angulo ſegmenti A E B; igitur concurſus A F, cum D B producta, fit in perimetro circuli A E B: Rurſum quia contingens eſt E D, eidemque æquidiſtat C F, erunt ſegmenta B F, B C æqualia, ac proinde iunctæ F B, B C, quoque inter ſe ęquales. vnde ſimilia ſunt, & æqualia triangula F E B, B D C, id eoque E B æqualis B D.



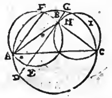
Tertiò, recta E D circulum non contingat ſuper baſi A C erectum, ſed interſecet in puncto quodam G. ſitque E D æquidiſtans A C. dico E G, B D lineas æquari. cùm enim E D, A C æquidiſtent, erunt, A G, B C arcus adeoque & ſubtenſæ æquales: vnde & anguli G A C, B C A æquales ſunt, vti & anguli illis alternatim poſiti E G A, D B C; quocirca ſimilia ſunt & æqualia triangula E A G, B D C; & recta E G, ipſi B D æqualis.



Quartò, quod ſi recta E D per B ducta occurrens perimetro A B C in G, non æquidiſtet A C, ducatur A F parallela E D, & ducta C F, occurrat E B, productę in D. quoniam parallelæ ſunt E D, A F, erit A F C angulus angulo E D C ęqualis: ſed A F C ęquatur angulo ſegmenti B D C ex poſitione, igitur D in perimetro eſt circuli B D C; & quia æquidiſtant E D, A F erunt arcus A G, B F, æquales, adeoque & ſubtenſę A G, B F. cumque æquales ſint anguli G A F, B F A, ęqualibus arcubus inſiſtentes, erunt & anguli E G A, D B F quoque æquales; ſunt inſuper æquales anguli A E G, B D F, ob ſegmenta ſimilia; igitur triangula ſimilia ſunt & æqualia A E G, B D F; vnde & lineæ E G, B D, æquales.



Quintò cadat B vertex trianguli A B C intra aream circuli ſupra baſim trianguli deſcripti: & primò recta E H per apicē B tranſiens, baſi trianguli non occurrat. ducatur C F æquidiſtans E H, donec conueniat cum A F producta in E. oſtendetur vti priùs punctum E in perimetro eſſe circuli A E B, & F E D, G H C triangula, adeoque & latera E D, G H inter ſe æquari. Secundò recta per apicē B acta, occurrat baſi trianguli: quo caſu demonſtrandum

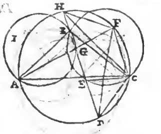


eſt lineam E D, rectę G H æqualem eſſe. Quoniam E H per B ducta occurrit baſi trianguli A C; vel alterum circulorum continget in B, (quo caſu apparet E D, G H, æquales eſſe: cum F H G, A D E triangula facile ex datis oſtendantur æqualia.) vel vtrumque circulorum ſuper lateribus trianguli A B C deſcriptorum ſecat in G, & E, circulū autem ſuper baſi factū, in D, & H I; quo caſu ducatur ex A per G, linea A G F, iungaturque puncta E C, C F, E H, C D; angulus A G B vnà cum angulo ſegmenti A I B. a æqualis eſt duobus rectis: ſed angulo A I B, æqualis eſt angulus A F C ex hypotheſi, & angulo A G B æqualis

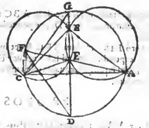
a 22. tertij.

lis

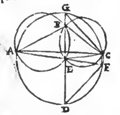
sis angulus EGF ipsi AGB ad verticem positus; igitur anguli AFC, EGF, sunt duobus rectis æquales; adeoque BD, FC parallelæ, & arcus HF, CD, eorumque subtensæ æquales; vnde & anguli DHF, HDC æqualibus arcubus insistentes, æquales sunt: est autem angulus AGB, æqualis angulo CEB, (cum AGB, BEC segmenta reliqua sint similia) adeoque & reliquus FGH, æqualis reliquo CED; igitur triangula FHG, CED, sunt inter se æqualia; & HG latus æquale lateri ED.



Sextò, quod si recta GD per apicem acta, per communem intersectionem E transeat; sic ostendetur æquales esse rectas GE, ED. Sint primò segmenta similia, semicirculis maiora; ductaque ex A per E, recta AEF, iungantur CE, CF, FD, CG: Quoniam igitur segmenta similia, semicirculis sunt maiora, erit E extra lineam AC: si enim fieri possit, sit CEA vna eademque linea cum AC. cùm ergo ob similitudinem segmentorum, anguli BEA, BEC sint inter se æquales, erunt etiam recti: quod fieri non potest, cùm segmenta sint semicirculis maiora. quare punctum E non est in linea AC. Cùm igitur angulus AFC, vnà cum angulo segmenti ADC, duobus rectis sit æqualis, sitque angulo ADC, æqualis angulus AEB (ob ADC, AEB segmenta similia) id est angulus DEF ad verticem oppositus, erit angulus AFC vnà cum angulo DEF, duobus rectis æqualis; vnde FC, BD, lineæ æquidistant; & arcus GF, DC, adeoque & arcus GC, DE eorumque subtensæ æquales, &c. vt priùs. *ibid.*



Si verò segmẽta similia minora fuerint semicirculis: demonstrabitur vt priùs, punctum E, esse extra lineam baseos AC. quia verò AFC, AEB segmenta sunt similia, erunt anguli AEB, AFC æquales; sed angulo AEB æqualis est angulus ad verticem DEF; igitur anguli DEF, AFC sunt æquales, & BD, FC rectæ æquidistantes; quare & arcus GC, DF, eorumque subtensæ æquales sunt: &c. vti priùs.

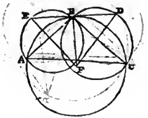


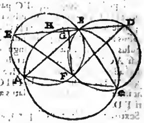
Reliquum esset casus eosdem explicare cùm vertex trianguli ABC cadit in peripheriam vel extra aream circuli qui supra basim AC constitutus est; sed quia omnes illi, demonstrationes communes habent & constructiones cum casibus quos explicuimus, dum nimirum vertex B, ipsa area continetur, lectorem non vlterius defatigandum censeo: hoc tamen premoneo, vt dum B vertex trianguli, cadit extra segmentum baseos, casus excludat, quos in medium protulimus qui BD lineam iubent ea ratione duci, vt eum basi trianguli non conueniat, quos ineptos esse huic materia manifestum est.

PROPOSITIO XV.

SI denuo super ABC trianguli lateribus segmenta circulorum similia constructa fuerint, ac per B verticem ponatur ED, ad cuius extrema ex centro F circuli super basi descripti, ducantur FE, FD. Dico eas inter se æquales esse.

Demonstratio.





a 18 tertij. Contingat recta E D, circulum A B C in B; erit igitur B F normalis[a] ipsi E D: vnde cum lineæ B E, B D, per præcedentem æquales sint, erunt etiam æquales F E, F D;

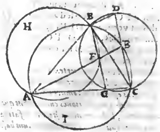
Iam verò E D, circulum A B C secet in puncto quodam H: ducaturque ex F recta F G, perpendicularis ad E D: igitur[b] H G, G B æquales sunt; ostendimus au-
b 3 tertij.
c 14. huius. tem E H,[c] B D quoque æquales esse; igitur F E, F D æquales sunt. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Svper A B C, trianguli lateribus, segmenta circulorum similia constituta sint, & ex C recta educta C D; cui ex B vertice trianguli parallela ponatur B F, occurrens circulo A H B in F:

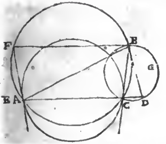
Dico E D, B F, æquales esse lineas.

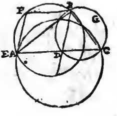
Demonstratio.



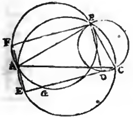
Sit primò vertex trianguli in perimetro circuli A B C constitutus; linea verò D C sit extra triangulum A B C: ponatur iunctæ B D æquidistans A F, occurrens rectæ C D in E; igitur angulo B D C, æqualis est A E C, sed & B D C angulo æquatur angulus segmenti A E C, igitur punctum E, communis est intersectio circuli A B C & rectæ C D: & quia segmenta circulorum A B C, B D C similia sunt, erit angulus A F B æqualis illi qui segmento A I C continetur; igitur & punctum F communis est intersectio circuli A H B, & rectæ B F: cùm igitur parallelogrammum sit B F E D, manifestum est E D, B F lineas inter se æquales esse. Quod oportuit demonstrare.

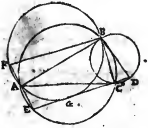
Secundò





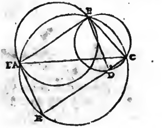
Secundò, C D linea in directum posita sit, cum A C, & recta B F æquidistans basi A C; iungantur A F; & B D ponatur æquidistans ipsi A F occurrens A C in D. Quoniam A C, B F, item A F, B D æquidistant, erit angulus C A F (id est C D B in secunda figura) vnà cum angulo B F A (id est B D C in prima figura) æqualis duobus rectis. sed angulo B F A, per constructionem est æqualis angulus segmenti C G B. Igitur C D B angulus, vnà cum angulo segmenti C G B duobus rectis est æqualis. quare punctum D est in perimetro circuli C G B & A C linea eidem bis occurrit: quare cùm F D parallelogrammum sit: patet F B, E D lineas æquari.

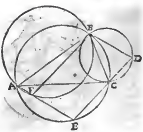




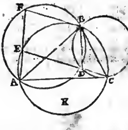
Tertiò, recta C D cadat infra basim trianguli A B C, occurrens circulo B C D, in D; & circulo A B C in E; ita tamen vt ducta B F parallela ipsi C D, cadat supra latus A B, dico B F, D E lineas esse inter se æquales. ducatur enim ex E per A linea, occurrens B F in F iunganturque B D, cùm igitur segmenta B D C, A E C similia sint, erit angulus B D C, æqualis angulo A E C, adeoq; B D, F E lineæ æquidistantes. vnde F D parallelogrammum est & F B, D E latera æqualia. Rursum angulus E F B vnà cum angulo F E D id est angulo segmenti A G B æqualis est duobus rectis: quare punctum F, est in peripheria circuli A F B. in secunda verò figura, quia angulus B D C id est A B C vnà cum angulo A E C, duobus rectis est æqualis, erunt B D, A E parallelę: reliqua vt antè.

Quartò, sit B F linea eadem cum recta A B; ducatur ex C recta C E æquidistans A B: iunctaque F E, demittatur ex B recta B D, quæ æquidistet E F: occurrens C E in D: ostendetur vt priùs punctum D esse communem interfectionem circuli B D C, & rectarum B D, C E: quare cùm F B, C E & B D, F E, sint æquidistantes, patet F B, E D æquales esse.





Quintò, quod si rectæ D E, B F infra latus A B constituantur, & B F quidem secet circulum A F B in F: ponatur recta A F E, occurrens C E in E: & A F æquidistans B D: ostendetur vt prius punctum E in perimetro A E C circuli consistere, vti & punctum D in perimetro circuli B D C: vnde cùm parallelæ sint F B, D E, F E, B D, manifestum est, F B, E D esse æquales.



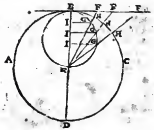
Sextò, tandem lineæ F B, D C, supra basim A C constituræ sint, & C D occurrat circulo A B C in E; agaturque per E, recta A E, occurrens F B in F: deinde ex B ponatur B D parallela ipsi A F: erit angulus A F B in segmento A F B: & punctum D, communis intersectio rectarum C D, B D, & perimetri B D C: cùm angulus B D C æqualis sit angulo segmenti A K C, qui cum angulo A E C, hoc est A F B, hoc est B D E, duobus rectis est æqualis: patet igitur lineas F B, D E, æquales esse inter se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVII.

Contingant sese intus in B circuli duo A B C, E B G: sitq; E centrum maioris; positâ deinde B F contingente, ducantur E F, occurrentes circulo E B G in G: ex quibus normales ponantur ad B D diametrum, rectæ G I.

Dico E I, E G, E H, E F esse quatuor in continua analogia.

Demonstratio.



Svnt enim ex elementis continuæ proportionales E I, E G, E B, hoc est E H: sed vt E I, ad E G, ita est E B, id est E H, ad E F; sunt igitur in continua ratione E I, E G, E H, E F. Quod fuit demonstrandum.

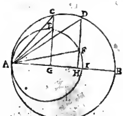
PROPOSITIO XVIII.

Contingant sese item circuli duo A B C, A E F, in A; quorum centra contineat diameter maioris A B, ad quam positis normaliter C G, D H, quæ occurrant perimetro A E I, in E & F. collocentur A C, A D: & A E, A F.

Dico A C ad A D, eandem rationem habere, quæ inter A E, A F, reperitur.

Demonstratio.

QVadratum enim A C, ad A D quadratum est vt G A B rectangulum ad rectangulum H A B per elementa: hoc est vt G A linea a ad lineam H A: sed vt G A ad H A, sic G A I rectangulum ad rectangulum H A I, id est quadratum A E, ad A F quadratum; ergo vt quadratum A C, ad A D quadratum, ita est A E quadratum ad quadratum A F, quare vt A C linea ad A D lineam, ita A E, ad A F. Quod erat demonstrandum.



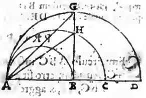
a 1. sexti.

PROPOSITIO XIX.

SInt continuæ proportionales A B, A C, A D, diametri circulorum sese intus in eodem puncto contingentium, erectaque ex B normaliter B G occurrente perimetris in H & G, iungantur A G, A H. Dico A B, A H, A G, esse in continua analogia.

Demonstratio.

SVnt enim in continuata ratione A B, A H, A C, veluti etiam A B, A G, A D per elementa. quare A G media est inter A B, A D; sed ex hypothesi ipsa quoq; A C media ponitur inter A B, A D. Igitur A C, A G lineæ sunt æquales; adeoque in continua sunt ratione A B, A H, A G. Quod fuit demonstrandum.

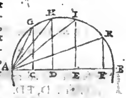


PROPOSITIO XX.

SI diuisa fuerit diameter A B in cõtinuè proportionales A C, A D, A E, A F, &c. ponanturque normaliter ad diametrum, C G, D H, E I, F K. Dico iunctas A G, A H, A I, A K, in continua quoque esse analogia.

Demonstratio.

SVnt enim quadrata A G, A H, A I, A K inter se vt rectangula B A C, B A D, B A E, B A F vt ex elementis patet: sed rectangula illa sunt vt A C, A D, A E, A F; igitur & quadrata A G, A H, A I, A K sunt vt lineæ A C, A D, A E, A F: quæ cùm ponantur continuæ proportionales, patet & quadrata A G, A H, A I, A K, adeoque & lineas, in continua esse analogia. Quod erat demonstrandum.



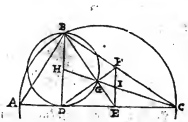
PROPOSITIO XXI.

IN semicirculo A B C recta collocata sit B D perpendicularis ad diametrum A C, quã diuisa bifariam in H: centro H, interuallo H B, de-

scribatur circulus B G D, ponanturque H C, quidem occurrens perimetro circuli B G D in G, recta verò B G, diametro A C in E.

Dico A D, D E, E C, tres lineas, eandem rationem continuare.

Demonstratio.



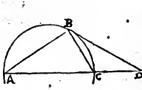
POnatur EF, æquidistans BD, iunganturque DG, GF, AB, quoniam EF æquidistat BD quæ in H diuisa est bifariam, erit EI æqualis IF: vnde vt EI ad BH, id est FI ad HD, sic EG ad GB id est IG ad GH, & permutando vt FI ad IG, ita DH ad HG, quare cùm anguli DHG, FIG lateribus proportionalibus contenti sint æquales (ob HD, FI parallelas) similia erunt triangula FIG, HDG: sicut & GIE, BHG, item FEG, BDG: sunt ergo in directum D, G, F, puncta, vt ex elementis patet. Vlterius quia similia sunt triangula BDG, DGE, erit BD ad DE vt BG, ad DG: id est EG ad GF: sed vt EG ad GF sic DE est ad EF cùm DGE, GEF similia sint triangula, igitur BD est ad DE vt DE ad EF; quare sunt proportionales BD, DE, EF & rectangulum BDFE, quadrato DE æquale. sunt autem similia quoque triangula ADB, EFC. igitur vt AD, ad DB, ita FE ad EC. vnde rectangulo ADEC æquale est rectangulum BDEF, hoc est quadratum DE. sunt igitur continuæ proportionales AD, DE, EC: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

SEmicirculo ABC inscriptum esto triangulum cuius alterum latus BC, semidiametro sit æquale.

Dico BC, AB, & aggregatum ex AC, CB, tres esse in continua ratione.

Demonstratio.



a 16. primi.

FIat AD sesquialtera CD: iungaturque BD: arcus AB duplus est arcus BC, quia CB latus hexagoni est; igitur & angulus BCA, duplus anguli BAC: sed angulus BCA, quoque duplus est anguli a BDA cùm sit BCD Isosceles per constructionem: igitur angulus BDA æqualis est angulo BAD & AB, BD latera æqualia inter se; vnde similia sunt triangula BDC, BDA: & vt CD id est BC ad DB, ita DB hoc est AB ad AD, hoc est ad AC, CB. Quod fuit demonstrandum.

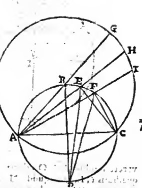
PROPOSITIO XXIII.

INtersecent sese ad rectos, diametri AC, BD; positisque AEC, AFC; iungantur ED, FD.

Dico DE, ad DF, eandem habere rationem quam aggregatum duarum AE, EC, ad aggregatum AF, FC.

Demon-

Demonstratio.



CEntro B, interuallo AB describatur circulus ACG, cui productæ AB, AE, AF, occurrant in G,H,I; Quoniam AG,BD, circulorum suorum diametri sunt, anguli AHG, AIG æquales erunt angulis DEB,DFB, sed & anguli BAE, EAF æquales sunt angulis BDE, EDF, quòd iisdem insistant arcubus; similia igitur sunt triangula GAH,HAI triangulis BDE, EDF; & AH, AI lineæ proportionales ipsis ED, FD: quare cùm sint æquales AH, AI, rectis [a] AEC, AFC, patet aggregatum AE, EC, ad aggregatum AF, FC, eandem obtinere rationem, quam recta DE, ad DF. Quod fuit demonstrandum.

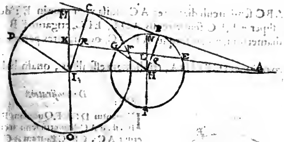
[a] Sereni l.1. prop. 45

PROPOSITIO XXIV.

COntingat AB inæquales circulos, conueniens cum recta per vtriusque centrum acta in A: ex quo ponatur AD occurrens circulis in E, F, G, D.

Dico AB ad AC eandem continere rationem, quam obtinet AG ad AD, vel AE ad AF.

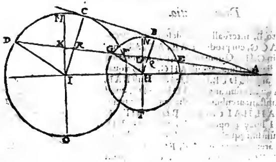
Demonstratio.



AD puncta contactuum ex centris ducantur diametri IC, HB, itemque aliæ binæ diametri HN,IM, & ad rectam DA normales, quoniam igitur anguli ad B & C recti sunt, parallelæ erunt rectæ HB, IC. Ergo vt AB, ad AC, sic HB ad IC, hoc est HQ ad IR. Deinde, quia anguli, IKR, HLQ recti sunt, & IRK, HQL anguli (quòd HQ, IR sint parallelæ,) sunt æquales; triangula IRK, HQL, erunt similia; ac proinde HL est ad IK, vt HQ ad IR, hoc est (sicut iam ostendi) vt HB ad IC, hoc est (quoniam HN, IM diametri, æquantur diametris HB, IC) vt HN ad IM. Quia igitur est HL ad IK, vt HN ad IM, erit permutando ac inuertendo NH ad PH, vt MI ad KI, adeòque quadratum NH ad quadratum LH, vt quadratum MI ad quadratum KI. sed [b] quadratũ NH æquatur rectangulo NLP cũ quadrato LH, & quadratũ MI, rectangulo MKO cũ quadrato KI. ergo rectangulũ NLP, cum quadrato LH est ad quadratũ LH, vt rectangulũ MKO cũ quadrato KI ad quadratũ KI: ergo diuidendo rectangulũ NLP est ad quadratũ LH,

[b] 5. secundi.

vt



vt rectangulum MKO ad quadratū KI. Atqui rectangula NLP, MKO æquantur quadratis GL, DK, quòd GL, DK sint ad diametros NP, MO normales; ergo quadratum GL est ad quadratum LH vt quadratum DK ad quadratum KI, ergo recta GL est ad rectam LH, vt recta DK ad rectam KI; quoniam igitur anguli quoque GLH, DKI, vtpote recti ex constr. æquales sunt, erunt triangula a GLH, DKI similia, adeoque anguli HGL, IDK æquales, ergo GH, DI parallelæ sunt. Ergo vt AG est ad AD, sic AH, ad AI, hoc est quia HB, IC etiam sunt parallelæ, vt AB ad AC. Quod erat primum, simili ratione ostenduntur iunctæ IF, HE æquidistare, adeoque esse vt AH ad AI, id est AB ad AC, sic AE ad AF. Quod erat demonstrandum.

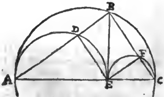
a 6 sexti.

PROPOSITIO XXV.

Sit ABC semicirculi diameter AC diuisa vtcunque in E: descriptisque super AE, EC semicirculis ADE, EFC, erigatur EB normaliter ad diametrum, ponanturque AB, BC, occurrentes perimetris in D & F.

Dico rationem CF ad DA, triplicatam esse illius, quam habet CB, ad AB.

Demonstratio.



IVngantur DE, EF. Quoniam EB normalis est ad AC diametrū semicirculi ABC, erunt AC, CB, CE, item AC, AB, AE continuę proportionales; sed vt BC ad CE sic EC ad CF (ob EFC, BEC triangula similia,) & vt AB ad AE sic AE ad AD (ob ABE, ADE triangula similia) igitur tam AC, CB, CE, CF, quàm AC, AB, AE, AD sunt continuæ proportionales: vnde cùm vtrique seriei prima sit communis AC, erit b CF ad AD quarta ad quartam, in triplicata ratione CB ad AB, secundæ ad secundam. Quod erat demonstrandum.

b 17. de progressionibus.

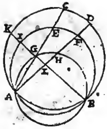
PROPOSITIO XXVI.

Secent sese tres circuli in punctis A, B, & ex A quæuis rectæ AC, AD, eductæ perimetris occurrant in E, F, G, H:

Dico GE, EC, rectis HF, FD, esse proportionales.

Demonstratio.

AGatur recta BK per G, occurrens AD in L & perimetris in I & K, cùm rectangula ALH, GLB,[a] æqualia sint; vti & rectangula ILB, ALF; & KLB, ALD; erunt rationes[b] laterum reciprocæ: hoc est, erit AL ad LB, vt GL ad HL, & AL ad LB, vt IL ad LF, vel KL ad LD: quare etiam vt GL ad LH,[c] ita IG ad HF, & LK ad LD, siue IK ad FD. rursum cùm sit vt AG ad GB, ita IG ad EG vel KG ad GC (ob AGE, IGB, item KGB, AGC rectangulorum æqualitatem) erit IG ad GE, vt KI ad EC. quare ex æquo EC ad FD vt GE ad HF. Quod fuit demonstrandum.



[a] 35 tertij.
[b] 14. sexti.
[c] 19 quinti.

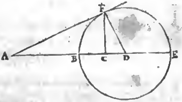
PROPOSITIO XXVII.

E Puncto A extra circulum posito, ducta ad centrum eiusdem linea AD diuisa sit in tres continuò proportionales. quarum media sit semidiameter BD, tertia CD: erectaque ex C perpendiculari CF, iungantur AF.

Dico AF contingentem esse & contra.

Demonstratio.

POnatur DF. Quoniam DC, DB id est DF, DA, circum angulum communem ADF proportionales sunt, erunt FCD, AFD triangula similia: vnde angulus AFD æqualis est angulo FCD per hypothesim recto: quare AF circulũ cõtingit. Quod erat primũ.



Iam verò sit AF contingens & FC normaliter ad AD diametrum posita. Dico AD, BD, CD in continua esse analogia: cùm enim AF sit contingens & FD diameter, erit angulus AFD rectus adeoque æqualis angulo FCD, est autem angulus ADF communis triangulis AFD, FCD, igitur triangula illa similia sunt, & AD ad DF, id est DB, vt DF ad DC. Quod erat demonstrandum.

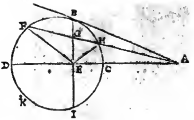
Est hæc Apollonij l. prim. propos. 35. aliter demonstrata.

PROPOSITIO XXVIII.

COntingat AB linea circulum BCD: ductaque AD per centrum ponatur ad illam orthogonalis BE, quam in G secet quædam AF, occurrens circulo in H, F:

Dico quadratum AB, æquari rectangulo FGH, vnà cum quadrato GA.

Demonstratio.



EST enim quadratũ A B æquale quadratis B E, E A, hoc est rectangulo B G I, vnà cũ quadratis G E, E A, vt ex elementis patet: est autem quadratum G A, æquale duobus G E, E A, ergo A B quadratum æquatur B G I hoc est G F H rectangulo vnà cum quadrato G A: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

IIsdem positis si iungantur H E, F E;
Dico lineas tres H E, B E, F E, in continua esse analogia:

Demonstratio.

SI enim H E intelligatur produci in K, erit E K æqualis ipsi E F, vt ex elementis educitur, vnde & H E F rectangulum, æquale est rectangulo B E I, id est quadrato B E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXX.

IIsdem positis:
Dico A F ad A H, eandem habere rationem quam F G ad G H, siue A F in G & H diuisam, extrema & media ratione proportionali.

Demonstratio.

a 28. huius. b 35. tertij. RECtangulum F G H, vnà cum quadrato G A, æquatur B A [a] quadrato, sed B A, quadrato æquale est [b] rectangulum F A H, igitur F G H rectangulum vnà
c 2. secundi. cum G A quadrato æquatur F A H rectangulo: quadratum autem A G, æquale est [c] rectangulis A G H, G A H; rectangula igitur F G H, A G H, G A H, æquantur
d 1. secundi. F A H rectangulo: Rectangulo autem F A H, æqualia quoque sunt [d] rectangula F G H A, G A H, ablato igitur communi rectangulo G A H, manet F G H A rectangulum, rectangulis A G H, F G H, id est rectangulo F A G H æquale, vnde vt F A, ad H A, sic F G ad G H. Quod fuit demonstrandum.

Scholion.

HAec propositio proponitur à Pappo libro septimo propositione 154. sed quia soli casui videtur applicata quo recta A D, per centrum ducta est circuli B D C. adeoq; & videatur casum recta A F excludere, placuit ostendere vniuersalem prorsus esse: Quod ipsum præstat Apollonius lib. 3. propositione 37. sed diuerso à præsenti discursu.

PRO-

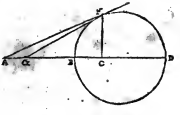
PROPOSITIO XXXI.

Ex A ducta sit per centrum circuli B D F recta A D, sitque A D ad A B ratio eadem, cum ratione D C, ad C B: erectâ deinde normali C F, iungatur A F.

Dico A F contingere circulum.

Demonstratio.

Si enim non contingat, ponatur per F contingens F G occurrens A D in G: erit ergo per præcedentem D G ad G B, vt D C ad C B; sed ex hypothesi vt est D C ad C B, ita est D A ad A B, Igitur vt D G ad G B sic D A ad A B, & diuidendo vt D B ad B G, sic D B ad D A: quod fieri non potest; cùm puncta A & G supponantur diuersa: quare F G non est tangens: sed A F. Quod erat demonstrandum.

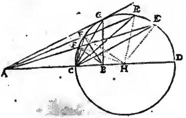


PROPOSITIO XXXII.

Sit A B vtcunque diuisa in C, & ex A ducta quæuis A E, exhibens angulum E A B recto minorem: Oporteat in linea A E, puncta assignare E & F, à quibus ad C & B rectæ eductæ, angulos A F B, A E B bifariam secent.

Constructio & demonstratio.

Producta A B in D, fiat vt A C ad C B, ita A D ad D B: & super C D diametro descriptus sit circulus C F D: cuius centrum H: secabit autem ille, vel continget rectam A D vel neutrum præstabit: Secet igitur primò A E lineam in F & E punctis; Dico illa esse, quę desiderantur: erecta enim B G, perpendiculariter ad diametrum C D, iungantur



A G, F C, F B, F H: C E, B E, H E. quoniam igitur vt A C ad C B, ita est A D ad D B, & normalis sit B G, diametro C D: erit A G recta contingens [a] circulum. vnde & A H, C H, [b] B H, continuæ sunt proportionales. est autem F H, vel E H, mediæ C H, æqualis; ergo [c] anguli A F B, A E B, per rectas C F, C E. diuisi sunt bifariam. *a 31. huius. b 27. huius. c 11. de progressionibus.*

Quod si circulum C G D contingat A G, in G: iungantur puncta G B, G C, G H: quoniam A H, C H, B H, sunt in continuata ratione; & G H linea mediæ C H, æqualis est, [d] erit A G B angulus bifariam diuisus per rectam C G: *d Ibid.*

Manifestum autem est si A E F recta circulo non occurrit, cessare materiam propositam.

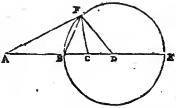
Corollarium.

IN idem recidit, eodemq; modo soluitur problema, quo iisdē positis petuntur in A E linea exhiberi puncta F & E, ad quę ductis ex C & B lineis; fiant A C, C B proportionales rectę A F, F B, A E, E B: inuenta enim per præcedentem puncta F & E à quibus ad C & B ductæ lineæ, angulos A F B, A E B bifariam secant, problema soluunt: nam angulis A F B, A E B, diuisis bifariam per rectas F C, E C, erunt A F ad F B, & A E ad E B vt A C ad C B.

PROPOSITIO XXXIII.

SIt B F E circuli diameter B E producta vtcunque in A: ex qua secans ponatur A F: & ex F, recta C F, vt A F sit ad F C, sicut A B ad B C. Dico A B ad B C eandem rationem obtinere quam A E ad E C.

Demonstratio.



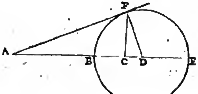
a 3. sexti.
b 11. de progressionibus.
c 1. de progressionibus.
d 5. lib. de lineis.

IVngantur D F, B F: cùm igitur sit A F ad F C vt A B ad B C, erunt anguli A F B, B F C æquales; Rursum cùm D F, æqualis sit D B, erunt a A D, B D, C D in continua analogia. vnde A B est ad B C, vt b c A D ad B D. & cùm D E recta sit æqualis D B, erit vt d A B ad B C ita A E ad E C. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

SIt A B ad B C, vt A E ad E C sitque B E diuisa bifariam in D. Dico A D, B D, C D fore in continua analogia.

Demonstratio.



e 31. huius.
f 17. huius.

DEscribatur circulus, centro D, interuallo B D, & eiigatur C F normaliter ad A E: occurrens circulo in F. ducanturque D F, A F: cùm igitur sit A B ad B C, vt A E ad E C, erit linea e A F contingens circulum, vnde A D, B D, C D f lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrādum.

Inuenies hanc in libro de lineis propositione quarta vel quinta aliter demonstratam.

PROPOSITIO XXXV.

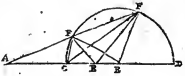
SIt A B recta, per centrum circuli C F D ducta; fiat autem vt A C ad A D, ita C B ad B D, & ducta A F secante circulum in F: iungantur B F, C F:

Dico A C, C B, & A F, F B, proportionales esse lineas.

Demon-

Demonstratio.

EX E centro ponatur E F. Quoniam ponitur vt A D ad A C, sic D B ad C B, erunt A E, C E, B E lineæ [a] in continua ratione. Igitur cùm F E sit æqualis mediæ C E, est A C [b] ad B C, vt A F ad F B: *Est hac conuersa trigesimæ tertiæ huius.*



a 34. huius.

b 11. lib. de progressionibus.

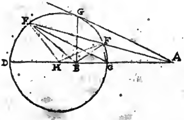
PROPOSITIO XXXVI.

SIt A D linea vtcunque diuisa in C: descriptoq; super C D circulo, ponatur ex A linea A E occurrens circulo in F: ducatur autem F B, vt A F, F B proportionales sint, lineis A C, C B, & ex B erecta normalis occurrat circulo in G.

Dico A G lineam circulum contingere.

Demonstratio.

CVm sit A F ad F B, vt A C ad C B, erit angulus A F B diuisus [c] bifariam: quia verò linea F H, rectæ C H æqualis est, erunt A H, [d] C H, B H in continua ratione: vnde & G A circulum [e] contingit. Quod fuit demonstrandum.



c 3. Sexti.

d 11. de progressionibus.

e 17. huius.

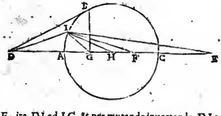
PROPOSITIO XXXVII.

CIrculi A B C diameter A C, vtrimque producta sit in D & E puncta, æqualiter à centro H distantia, positâ deinde D B contingente in B, demissaque normaliter B G, ad C A diametrum, fiat C F, æqualis A G: ductisque rectis D I, I E: iungantur I G, I F.

Dico D I, I E, ipsis I G, I F proportionales esse.

Demonstratio.

IVngatur H I, quoniam D B contingit circulum & B G normalis ponitur ad diametrum, erunt [f] D H, A H, G H in continua analogia vti & E H, C H, F H: est autem H I, ipsi A H æqualis; igitur vt E C ad C F ita [g] E I ad I F. sed vt E C ad C F, ita D A ad A G, hoc est D I ad I G, quare vt E I ad I F, ita D I ad I G. & per mutando inuertendo D I ad I E vt I G ad I F.



f Ibid.

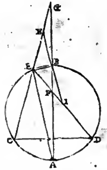
g 11. de progressionibus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Circuli ABC diametrum AB, secet in F recta quæuis DE, sumptoque AC arcu æquali AD, ponatur ex C per E linea CG conueniens cum diametro in G.

Dico AG ad GB eandem habere rationem quam AF ad FB.

Demonstratio.



Iungantur AE, EB, & per B ponatur IK æquidistans ipsi AE: quoniam AC, AD arcus sunt æquales, erunt & anguli AEC, AED quoque æquales: quia verò angulus AEB in semicirculo rectus est, adeoque duobus AEC, GEB angulis æqualis, demptis AEC, AED æqualibus, æquales remanent anguli DEB, GEB. sunt autem & anguli EBG, EBI recti, cùm IK æquidistet AE, æqualia igitur sunt latera IB, KB: quare vt AE ad IB est B, id est AF, ad FB, sic AE est ad KB, id est AG ad GB. Quod erat demonstrandum.

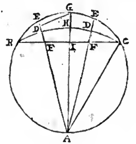
PROPOSITIO XXXIX.

Circulum ABC interfecet alter, centrum habens in perimetro ABC: iunctisque intersectionum punctis BC, ponantur ex A centro circuli intersecantis, quæuis AE, occurrentes perimetris in D & E, rectæ verò BC in F.

Dico lineas AF, AD, AE in continua esse analogia.

Demonstratio.

a 10. huius.



Ponatur ex A per centrum circuli ABE diameter AG occurrens perimetris in G & H, rectæ verò BC in I, iunganturque GE, AC: cùm igitur AG transeat per centra circulorũ sese intersecantium, erit BC in I [a] normaliter diuisa: vnde angulus AIF æqualis angulo AEG in semicirculo posito: est autem GAE angulus communis vtrique triangulorum AIF, AGE, similia sunt igitur triangula AIF, AGE: quare vt AI, AF, sic AE ad GA: adeoque FAE rectangulum æquale, rectangulo IAG, id est quadrato AC, id est AD quadrato: proportionales igitur sunt AF, AD, AE. Quod erat demonstrandum.

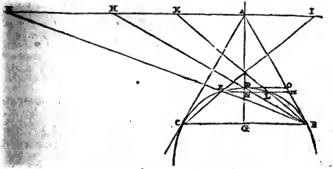
PRO-

PROPOSITIO XL.

SInt A B, A C contingentes circulum B D C. ductæque B C, ponatur æquidistans A E, & ex A diameter A G, occurrens perimetro in D: per quod ex B, agatur B H; dein per quodlibet punctum in perimetro assumptum F ducantur C F I, B F E.

Dico rectangulum I A E quadrato A H æquale esse.

Demonstratio.



SVmatur arcui CF, æqualis BL, & per L ducta BL occurrat A E in K: LF quoque iuncta secet A B, contingentem in M, & H B in N: denique ponatur D O contingens. Quoniam CF, B L arcus ponuntur æquales, erit L F ipsi B C adeoque & rectæ A H æquidistans: quia verò OD, OB contingentes ex eodem educuntur puncto æquales sunt OB, OD, adeoque & MB, MN: ac proinde quia M L, M B, M F sunt proportionales, erunt & M L, M N, M F quoque continuè: sed vt M L ad MN sic A K ad A H, & vt MN ad MF sic A H est ad A E, proportionales igitur sunt A K, A H, A E: est autem ipsi A K æqualis A I (quia B C illi æquidistans, ab A G diametro diuisa sit bifariam) igitur A I, A H, A E in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

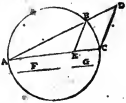
PROPOSITIO XLI.

DAto segmento circuli A B C & recta C D, vtcunque ad A C posita, oporteat rectam ducere A D, quam diuidat arcus A B C in B, secundùm datam rationem F ad G.

Constructio & demonstratio.

DIuidatur A C basis segmenti in E, secundùm datam rationem F ad G: erecta deinde E B, quæ æquidistet C D, occurrente perimetro in B, ponatur A B D: Dico factum quod petitur. patet ex elementis.

Hic notatu dignum est, quod punctum C, assumi possit non solùm in termino rectæ A C, sed vel intra, vel extra circulum, in quauis parte A C productæ.

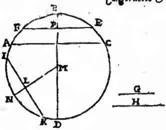


PRO-

PROPOSITIO XLII.

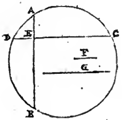
Dato circulo ABC, lineâ AC, quæ non fit maior diametro BD, & ratione G ad H, oporteat alteram FE, circulo inscribere, quæ æquidistet AC, vt quam G, ad H, habet rationem, habeat quoque FE ad AC.

Constructio & demonstratio.



Ponatur BD diameter normaliter ad AC, fiatque vt H ad G, ita AC ad IK: quæ in circulo ABC applicata, diuidatur bifariam in puncto L; iunctaque ML, fiat rectæ ML æqualis MP, ponaturq; FPE, quæ æquidistet AC; patet factum quod quæritur. nam rectæ FE, IK cùm sint æquè à centro remotæ, inter se æquales sunt.

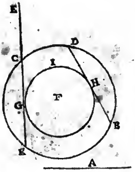
PROPOSITIO. XLIII.



Rectam AB quæ non sit diameter, altera CD intersecet ad angulos rectos in E, vt DE ad EC datam habeat rationem F, ad G.

Constructionem & demonstrationem huius inuenies in libro nostro de ellipsi: quas hic non ponendas iudico eò quod ab ellipsi planè sit dependens.

PROPOSITIO XLIV.



A Puncto extra circulum dato, lineam circulo immittere quæ datæ sit æqualis; modò ea diametro circuli non sit maior.

Constructio & demonstratio.

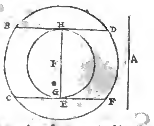
Applicetur datę rectæ A in circulo BCD æqualis BD; dein ex F centro describatur alter circellus, contingens BD, in H: Deinde tum ex E puncto dato ponatur EG, contingens eundem circellum in G; occurrens verò circulo ABDC in K & C. Dico CK, fore quæsitam; cùm enim æqualiter DB, GK, distent à centro F (quia contingunt eundem circulum GIH) æquales sunt inter se: ac proinde rectæ A, ęqualem posuimus GK: quod fuit præstandum.

PRO-

PROPOSITIO XLV.

IDem præstare à puncto intra aream circuli posito. oportet autem datā A hoc casu non minorem esse rectâ illâ, quæ per E posita ad diametrum, per E quoque transeuntem normalis sit.

Demonstratio.

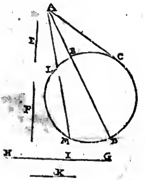


DAtæ A vt priùs, accommodetur in circulo, æqualis BD: centroque F circulus describatur contingens BD in H, transibit ille per punctum datum E, vel infra illud cadet: cùm enim ex hypothesi normalis per E ducta ad diametrum, per E quoque ductam, maior esse non possit datā lineā A, id est DB: patet & EF diametrum, quæ rectam per E ductam secat orthogonaliter, maiorem non esse diametro, quæ lineam DB datæ A æqualem orthogonaliter diuideret. vnde circulus radio FH descriptus, vel transit per E, vel infrà cadet. vtroque casu agatur per E contingens circulum radio FH descriptum, patet illam æquari rectæ DB, id est datæ A: quare fecimus quod postulabatur.

PROPOSITIO XLVI.

A Dato extra circulum puncto lineam educere quæ in data ratione à perimetro diuidatur: oportet autem rationem datam, maiorem non esse illa quę reperitur inter partes lineæ quæ à dato puncto per centrum ducitur.

Constructio & demonstratio.

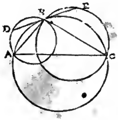


SIt datum punctum A & circulus BCD: data quoque ratio sit E ad F, quæ minor sit rationis AB ad BD, partium diametri: fiat rectis E, F æqualis GH, & GI quidem ipsi E: interque K media inter IG, GH, ponatur ex A contingens AC, & vt K ad GI sic AC fiat ad AL: patet ex datis AL minorem esse AC, & non minorem AB, adeoque punctum L in perimetro esse circuli: ducatur igitur per L ex A linea AM. occurrens circulo in L & M, dico AM satisfacere petitioni; cùm enim LAM rectangulum æquale sit quadrato AC & IGH rectangulum quadrato K, ponatur autem & LA ad AC vt IG ad K, erunt GI, K, GH lineæ proportionales eiusdem rationis cum AL, AC, AM: vnde vt prima GI ad excessum HI, id est per constructionem vt E ad F, sic AL quarta ad excessum LM. eduximus igitur à dato puncto, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XLVII.

INtersecent sese inuicem duo circuli A B D, B E C in B. Oporteat per B, rectam D B E ponere, quæ B D rectæ, æqualem B E constituat.

Constructio & demonstratio.



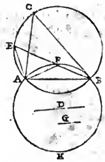
POnantur A B, C B contingentes in B, circulos A B D, B E C; occurrentes perimetris in A & C: dein per A, B, C, circulus describatur A B C, quem in B contingat D E: dico factum quod postulatur. ostensum est enim segmenta, A D B, B E C, A B C esse inter [a] se similia adeoque D E tangentem in B diuisam [b] bifariam: posuimus igitur per B rectam, &c. Quod erat faciendum.

a 11. huius.
b 14. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

SEcent inuicem vt priùs circuli duo A B C, A H B in A & B. Oporteat ex B rectam educere B E F, vt E F perimetris intercepta sit datæ D, æqualis.

Constructio & demonstratio.

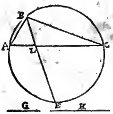


COnstituatur B C contingens circulum A H B in B. oportet datam lineam D, hac contingente maiorem non esse; iunctis A C fiat vt C B, ad A B, ita D, ad G. Dein ipsi G, fiat æqualis A F, & iuncta B F pertingat in E: dico factum esse quod petitur. Ducatur enim A E. quoniam angulus A F B tam cum angulo segmenti A H B, id est A B C angulo (ob C B tangentem) quàm cum A F E, duobus rectis est æqualis; dempto communi A F B remanebunt æquales anguli A F E, A B C; sunt autem & anguli A C B, A E B eidem insistentes arcui æquales: similia igitur sunt triangula A E F, A C B. vnde A F est ad F E vt A B ad B C, id est per constructionem vt G ad D: & permutando vt A F ad G, sic E F ad D: quare cùm A F, & G æquales ponantur, erunt & E F, D lineæ æquales. Perfecimus igitur quod postulabatur.

PROPOSITIO XLIX.

IN dato segmēto circuli A B C, ex A, & C duas lineas inclinare, sese in perimetro decussantes: quæ datam inter se rationem contineant G ad H.

Constructio & demonstratio.



DIuisâ in D rectâ A C, segmentum subtendente, secundùm rationem G, ad H; bisecetur arcus A E C in E, & per D ex E, recta ponatur E D B, iunganrut A B, B C: Dico A B, B C esse quęsitas. Cùm enim anguli A B E, E B C æqualibus arcubus insistentes æquales sint, erit [c] A B ad B C vt A D ad D C, id est per constructionem vt G ad H.

c 3. sexti.

CIRCV-

CIRCVLORVM PARS SECVNDA

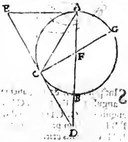
De Angulorum & arcuum circularium comparatione.

PROPOSITIO L.

Circulum ABC, cuius diameter AB, contingat in A recta AE, in qua assumpto quouis puncto E, ponatur EC contingens quidem circulum in C, occurrens autem diametro AB protractæ in D, iunganturque CA.

Dico angulum CEA duplum esse anguli CAD.

Demonstratio.



PEr centrum F diameter ponatur CG: Quoniam ED circulum contingit in C, & CG diameter est, erit a angulus GCD rectus, adeoque angulo EAD æqualis. est autem angulus EDA communis triangulis CFD, EDA: igitur CFD angulo, angulus AED æqualis est. sed angulus b CFD duplus est anguli CAD, igitur & angulus AED, eiusdem CAD duplus est. Quod erat demonstrandum.

a 18. *tertij.*

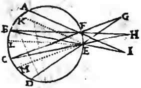
b 20. *tertij.*

PROPOSITIO LI.

ASsumptis in perimetro ABC, tribus arcubus æqualibus, AB, BC, CD, ducantur per duo quædam puncta F, E, rectæ AF, BF, CF, & BE, CE, DE, occurrantque in G, H, I.

Dico angulos I, H, G, inter se æquales esse.

Demonstratio.



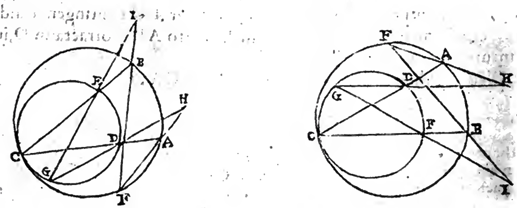
POnantur ex puncto E, rectæ EK, EL, EM, quæ æquidistent lineis AF, BF, CF. erunt itaque anguli KEB, LEC, MED, æquales angulis I, H, G; quia verò arcus AB, BC, CD ponuntur æquales, & AK, BL, CM arcus æquantur arcui EF, adeoque & inter se, reliqui quoque arcus KB, LC, MD, & anguli KEB, LEC, MED illis insistentes æquales sunt: quare & anguli I, H, G, sunt inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LII.

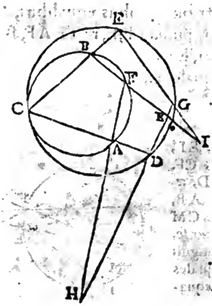
CONtingant inuicem interius circuli duo ABC, DEC, in puncto C: ex quo eductis CA, CB, sumantur puncta G, F, in singulorum arcubus ex quibus rectæ ponantur GE, GD, FB, FA.

Dico si lineæ illæ conueniant, angulos GIF, FHG æquales esse.

Demonstratio.



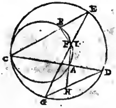
a 21. tertij. SInt primò G, & F, puncta vel supra vel infra angulum ACB posita: Quoniam anguli CBF, CAF, CF arcui insistentes æquales a sunt, vti ob eandem causam, anguli CEG, CDG, id est IEB, HDA ad verticem positi, erunt anguli IEB, EBI simul sumpti, æquales angulis HDA, DAH; quare & tertius EIB, tertio DHA æqualis erit.



b 22. tertij. Quod si vtrumque punctorum F, & G, angulo ACB, contineantur, hac ratione assertionē demōstrabimus: cū anguli b ACB, AFB, duobus rectis æquales sint, vti & anguli ECD, EGD: dempto igitur communi angulo ECD, manet AFB, angulo EGD, ac proinde reliquis AFI, reliquo DGI æqualis. sunt autem ad verticem anguli FKH, GKI æquales, igitur reliqui FIG, FHG æquales quoque sunt.

Cadat iam alterutrum punctorum, puta F, intra, & aliud extra angulum ACB: dico rursum angulos H, I esse inter se æquales, cùm enim angulus FBC tam cum angulo FAC, quàm cum EBF duobus rectis sit c æqualis, dempto communi
c Ibid.

muni FBC, erit angulus EBI æqualis angulo FAC id est DAH, sunt autem & anguli CEG, CDG eidem insistentes arcui æquales, igitur reliquus I, æquatur reliquo angulo H. Quod erat demonstrandum.

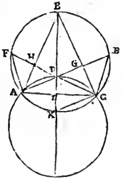


PROPOSITIO LIII.

DVctæ sint normales à terminis trianguli ABC, ad opposita latera.

Dico illas sese in eodem puncto decussare.

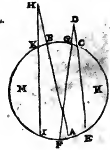
Demonstratio.



Circumscribatur ABC triangulo circulus, & per AC puncta alter circulus describatur ADC, æqualis circulo ABC. Productaque BI, occurrat perimetris in D, & K, & per D quidem ex A & C, agantur CDF, ADE, iunganturq; AF, CE, CK, erunt itaque anguli AFC, AEC arcui AC insistentes æquales, quia verò angulus EAC, vtrique circulorum æqualium communis est, arcus quoque DC.CE æquales sunt, vti illorũ subtensæ: ob eandem rationem quoque lineæ AF, AD sunt æquales. Rursum cùm angulo DKC, id est KDC (ob circulos æquales) duo anguli internè DCB, DBC, æquales sint, erunt duo arcus FB, KC id est DC æquales duobus arcubus BE, EC; ablatis itaque æqualibus arcubus KC, CE, remanent quoque æquales arcus FB, BE: quare anguli FCB, BCE quoque sunt æquales, sicut & anguli FAB, BAD. vnde cùm AF, AD lineç, adeoque & anguli AFD, ADF æquales sint, erunt & reliqui FHA, DHA quoque inter se æquales, adeoque & recti, eodem modo ostenditur angulos ad G positos, esse rectos. quare patet normales BI, CH, AG, sese in eodem puncto decussare. Quod fuit demonstrandum. 21.tertij.

PROPOSITIO LIV.

IN datum circulum ABC, à dato extra eum puncto D, ductæ sint DCE, DGF auferentes arcus FE, GC. Oportet ex alio puncto extra circulum assignato, H, duas rectas in circulum immittere, quæ arcus duos intercipiant, duobus FE, GC arcubus æquales.



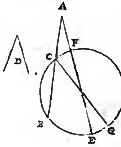
a 44. huius.

Constructio & demonstratio.

DVcantur ex H lineæ H I, H A, a vt K I, B A, circulo interceptæ, æquales sint rectis C E, G F: & factum erit quod fuit imperatum. cùm enim A B, F G sint æquales lineæ, erunt arcus G E F, A I B æquales, vti & arcus C N E, K M I, ob I K, C E æquales lineas. ablatis igitur æqualibus arcubus K M I, C N E, remanebunt arcus K B, I A, arcubus G C, F E æquales. demisimus igitur ex H puncto lineas, &c. Quod præstandum fuit.

PROPOSITIO LV.

A Dato extra circulum puncto, demissa sit per eundem recta A B; oporteat alteram ducere A E, quæ arcus auferat C F, B E, qui simul sumpti, angulum contineant æqualem dato D.



b Ibid.

Constructio & demonstratio.

FIat angulo D, æqualis B C G: & ex A ponatur A E, quæ rectam F E, æqualem lineæ C G b exhibeat; eritque peractum quod requiritur: cùm enim C G, F E lineæ æquentur, erit arcus F B E, æqualis arcui C B G; vnde ablato communi C B, remanet arcus B G, æqualis duobus B E, C F. quare angulo D, æqualis est angulus, qui duobus arcubus C F, B E simul sumptis continetur. perfecimus igitur quod petebatur.

C I R-

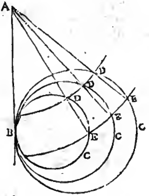
CIRCVLORVM
PARS TERTIA

De mutua circulorum interſectione & contactu.

PROPOSITIO LVI.

Recta AB, contingat circulos BDC, ſeſe in eodem B puncto, contingentes, centroque A, quouis interuallo circulus deſcribatur, occurrẽs perimetris circulorũ ſeſe contingentium in D, ponanturq; rectæ ADE.

Dico DE rectas inter ſe æquales eſſe, ſiue ad eundem eſſe circulum.



Demonſtratio.

Cvm enim AB ſit contingens rectangula DAE, æqualia erunt quadrato AB, adeoque & inter ſe; igitur lineæ DA, DB, DE, in continua ſunt analogia; ſunt autem DA primæ inter ſe æquales & AB media communis, igitur etiam primarum & tertiarum differentiæ DE, æquales erunt. Quod fuit demonſtrandum.

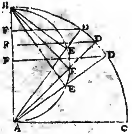
PROPOSITIO LVII.

Svper AB radio quadrantis circularis ABC, circulus deſcriptus ſit AEB; ductiſque rectis AED, occurrentibus circulo in EE, per EE ponantur DF normales ad radium AB.

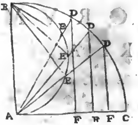
Dico rectis AF, æquales eſſe AE.

Demonſtratio.

Jvngantur BE: cùm AD æquales ſint AB, & anguli AEB, AFD recti; ſint autem & anguli FAE communes; erunt BEA triangula æqualia & ſimilia triangulis AFD: vnde reliqua AF, AE latera æqualibus angulis ſubtenſa ſunt æqualia.



Quod



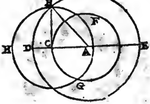
Quod si rectæ DF demittantur normaliter ad basim AC, sic ostendetur propositum: cùm DF sint æquidistantes AB, igitur anguli BAD, ADF, æquales sunt: proindeq; cū & anguli AEB AFD, recti sint, similia sint & æqualia triangula ABE, ADF, & latera æqualibus angulis subtensa. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LVIII.

PEr duorum circulorum parallelorum BDE, CFG centrum A actâ diametro DCE, ponatur CB contingens minorem à puncto quo à diametro interse catur.

Dico circulum radio BC descriptum æqualem esse annulo duabus circumferentijs intercepto.

Demonstratio.



a 2. duodecimi.

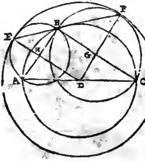
DVcatur AB, vt AB quadratum, ad duo quadrata BC, CA, ita circulus a DBE, ad circulos HBG, CFG; sed AB quadratum æquale est quadratis AC, CB, igitur & circulus DBE æqualis est circulis HBG, CFG, simul sumptis, ablato igitur communi circulo CFG, remanebit annulus perimetris æquidistantium circulorum interceptus, circulo BHG æqualis: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

SVper trianguli ABC, lateribus segmenta circulorum similia constituantur, centroque circuli, qui super basi exstructus est, circulus describatur qui alterutrum circulorum AEB, BFC contingat.

Dico quod & tertium quoque continget.

Demonstratio.



b 11. tertij.

c 13. huius.

d 15. huius.

DVcantur ex D, per H & G cētra circulorū AEB, BFC rectæ DE, DF: & circulus ED radio descriptus contingat circulū AEB in E, igitur recta DHE per centra D, & H transiens occurret vtrique in b puncto contactus E. quia verò segmenta super trianguli lateribus descripta, similia sunt iuncta c BF in directum erit ipsi EB; vnde cùm DE, d DF lineę sint ęquales, erit F punctum commune peripherijs circulorū EF, BFC; &

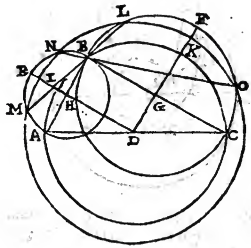
& cum eadem DF centra DG vtriusque coniungat, patet circulum EF, a in F contingere circulum BFC. Quod erat demonstrandum. a Schol. ad 13 tertij.

PROPOSITIO LX.

Iisdem positis: si circulus centro D descriptus alterutrum circulorum AEB, BFC secuerit:

Dico quod & alterum secabit; & secures ab vtroque auferet similes.

Demonstratio.



OCcurrat circulus centro D descriptus, circulo AEB in M & N: cadet igitur infra E & ED lineam secabit in I; quia verò rectæ DE, DF b æquales sunt, patet circulum radio DI descriptum, quoque infra F cadere, adeoque & circulum BFC secare in L & O. Quod erat primum. b 15. huius.

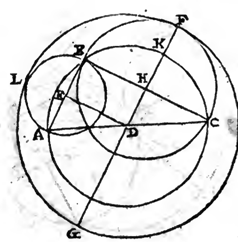
Hoc posito dico secures MEN, LFO ablatas inter se esse similes. ducta MB occurrat circulo LFO in L, ostensum est propositione 15. huius, iunctam DL, æquari rectæ DM, quare cùm punctum M in perimetro est circuli NLO, erit & punctum L in eadem perimetro. eadem ratione ostendetur, iunctam OB communi occurrere intersectioni circulorum MEB, MLO in N, vnde cùm NBM angulo angulus LBO ad verticem insistens, æqualis sit; similes erunt arcus MEN, LFO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXI.

SVper ABC trianguli lateribus semicirculi describantur ALB, AKC, BFC quos contingat circulus centro D, descriptus, in F & L.

Dico FG diametrum circuli vtrumque contingentis, æqualem esse diametris circulorum ALB, BFC.

Demonstratio.

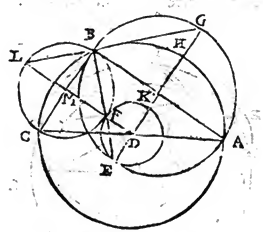


PEr centra D & H ponatur recta FG, iunganturque centra D, E; quoniam segmenta similia super trianguli lateribus descripta, semicirculi sunt, & AB BC à diametris DH, DE in circulo ABC bifariam diuisæ, erunt anguli DHB, DEB recti, vnde AB, DH æquidistant & HE parallelogrãmum, adeoq; BE, HD, item BH, ED lineæ æquales sunt. quare cùm FG dupla sit DF id est dupla duarum FH, HD, id est BH, BE, erit FG æqualis duabus diametris AB, BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXII.

ITerum similia segmenta constructa sint super singulis lateribus trianguli ABC centroque D circuli super basi descripti, circulus describatur KFE, qui circulum AGB contingat interius in E.

Dico quod & alterum BLC continget in F.



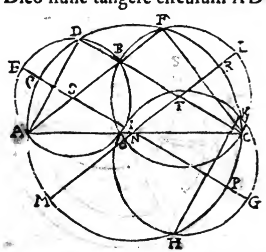
Demonstratio.

PEr cētra circulorum AGB, BLC; rectæ ponantur ex D, DG, DL: & DG quidem producta occurret perimetro circuli AGB in puncto contactus E; DL verò in aliquo puncto F circuli BLC, iunganturque BF, FE, cùm igitur DL, DG transeant per centra circulorum AGB, BLC, erunt LB, GB ductæ in directum: quia verò LMF diameter est circuli BLC, erit angulus
a 13. huius. LBF adeoque & GBF rectus, ac proinde BF pertinget in E. Rursum cùm LD, DG lineæ sint æquales, erunt & anguli quoque BLD, BGD æquales; sunt autem anguli ad B ostensi recti, reliquus igitur BED æqualis reliquo est LFB, id est EFD: vnde & æquales lineæ sunt DE, DF & punctum F perimetro circuli KFE commune: & cùm MD, li-
b 13. tertij. nea per F ducta, centra contingat D & M, patet circulum KFE [b] in F contingere circulum BLC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIII.

SVper trianguli lateribus constructa sint segmenta similia AEB, AD, FC, BLC. & ab intersectionum punctis D, F, ad puncta A, C ductis lineis DA, FC, aptetur in circulo KH æqualis FC, & parallela rectæ DA: describatur deinde circulus IKGH æqualis circulo BLCO, & transiens per puncta K, H.

Dico hunc tangere circulum ADI.



Demonstratio.

TRium circulorum AEB, ADFC, BLC centra sint S, N, T. per centra S, N ducatur recta QSINPG, occurrens circulo AEB in I, & circulo KGH in G: per centra verò T, N ponatur recta LRTNO occurrens circulo BLC in O. Quoniam QG iungit centra
c 10. huius. N, S, normalis [c] est ad AD, ac proinde & ad HK ipsi AD parallelam. centrum igitur circuli KGH est quoque in linea QG. consideretur iam punctum I quatenus est interse-
d patet ex elementis. ctio circuli AEB ac rectæ QG. Quoniam NR, est æqualis NP, & RL [d] æqualis PG, erit NL æqualis NG. Est verò per demonstrata 63 huius, etiam ON æqualis IN. ergo OL ęqualis est IG, quæ nempe posita est inter punctum G, & punctū I, in

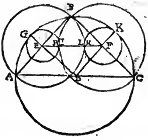
in quo circulus A E B secabat rectam Q G. Quare cùm circuli K G H diameter æqualis sit rectæ O L, diametro circuli B L C O, æqualis quoque erit rectæ I G. circulus igitur K G H transit per I. Atqui etiam supra ostendimus centrum eius esse in recta Q G transeunte per centrum circuli A E B: ergo circulus K G H tangit circulum A E B C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIV.

SVper A B C trianguli lateribus semicirculi describantur A B L, B I C, A G C, quorum centra sint D, E, F, centris autem F vel E, circuli construantur H G, K N, qui circulum A G C contingant in G & K.

Dico eosdem, quoque reliquos contingere in I, & L.

Demonstratio.



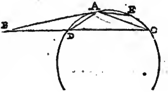
DVcantur F E, D E G, D F. quoniam diametri A B, C B bisectæ sunt in centris E, & F, erit E F parallela A C, ergo vt A B ad E B sic A C ad E F. quare cùm A B dupla sit E B, erit A C dupla quoque E F. Ergo A D dimidia ipsius A C, hoc est G D, æqualis erit E F. similiter quoniam tres diametri A C, A B, B C bisectæ sunt in centris D, E, F patet a E D, B C, & D F, A B esse parallelas; parallelogrammum igitur est E B F D. ergo F B hoc est F I æqualis est D E. Quare cùm tota F E toti G D, & pars F I, parti D E æqualis sit, residuum quoque I E æquale erit residuo G E, hoc est circuli diametro G E, siue E H. quare punctum I, commune est duabus peripherijs G H & B I C siue puncta H & I omnino eadem sunt inter se. Vnde cùm E F per centra circulorum ducta per I punctum transeat, manifestum est in eo contactum fieri. eodem pacto de altero circulo centro F descripto demonstratio procedet. a 2. Sexti.

PROPOSITIO LXV.

IN triangulo A B C, sint in continua analogia B D, B A, B C: & per puncta A, D, C describatur circulus.

Dico eum rectam A B contingere.

Demonstratio.



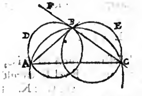
QVoniam A D C, puncta in perimetro sunt circuli, igitur si non contingat recta A B, circulum, occurrat eidem in altero puncto E: igitur rectangulũ A B E, æquale erit rectangulo D B C, hoc est per hypothesim quadrato B A, quod b est absurdum: quare non occurret B A, circulo nisi in A. b Ele-menti.

PROPOSITIO LXVI.

SI super A B C trianguli lateribus segmenta circulorum similia descripta fuerint,

 Dico

Dico AB, CB latera trianguli producta contingere in B segmenta ADB, BEC.



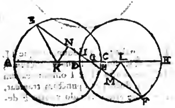
Demonstratio.

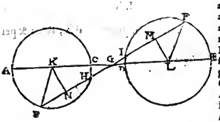
Angulus ABC tam cum angulo ABF quàm angulo segmenti residui in eodem circulo duobus rectis æqualis est; igitur angulus residui segmẽti, angulo FBA æqualis est: quia verò ADB, ABC segmenta sunt similia adeoque & illorum anguli æquales, erit angulus FBA simul cum angulo segmenti ADB duobus rectis æqualis: quare angulus ABF, æquatur angulo residui arcus circuli ADB: vnde FC eundem contingit in B, vt ex elementis patet. eodem modo ostenditur AB contingere in B circulum BEC. Quod erat demonstrandum.

Est hæc conuersa vndecimæ huius.

PROPOSITIO LXVII.

Datis duobus circulis ABC, DEF, oporteat exhibere punctum G, per quod lineæ ductæ diuidant circulos in similes partes.





Constructio & demonstratio.

Actâ per vtriusque centra KL rectâ AE, diuidatur in G, vt ratio AG ad GE, sit eadem cum ratione AC ad DE. Dico punctum G esse quod quæritur. ducatur enim quæuis BGF occurrens perimetris in I & H: quoniam AG ad GE, eandem habet rationem quam AC ad DE, ex constructione, erit AC ad CG, vt DE ad DG, ac proinde AG ad GK vt EG, ad GL, & GK ad GL vt KA ad LE, id est BK ad LF, demissis igitur perpendicularibus KN, LM ad FB lineam, erit simile triangulum KGN, triangulo GML. quare vt KG ad GL, hoc est AK ad EL, id est AC ad DE, ita est KN, ad LM; igitur BH ad IF, est vt AC ad DE, cùm eadem proportione distent à centris quæ inter se sunt diametri circulorum, quare similia segmenta subtendunt & circulos similiter diuidunt, perfecimus igitur quod imperatum fuit.

CIR-

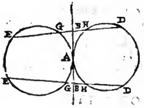
CIRCVLORVM
PARS QVARTA

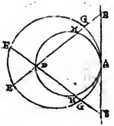
De linearum in circulis potentia.

PROPOSITIO LXVIII.

COntingant sese circuli duo in A puncto, per quod acta contingens AB, occurrat cuiuis EBD secanti perimetros in E, G, H, D.
Dico GBE rectangulum, rectangulo HBD æquale esse.

Demonstratio.





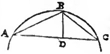
PAtet, cùm vtrumque quadrato contingentis AB, æquale sit.

PROPOSITIO LXIX.

SEgmento circuli ABC inscriptum sit triangulum ABC, à cuius vertice B, normalis demittatur BD.
Dico parallelogrammum ABC in angulo ABC, æquari rectangulo AC, BD.

Demonstratio.

PArallelogrammum ABC, duplum est, trianguli ABC; sed & AC, BD rectangulum, eiusdem duplum est, cùm basim habeat eandem AC, & BD altitudinem; igitur parallelogrammum ABC in angulo ABC, æquale est rectangulo ACBD. Quod erat demonstrandum.

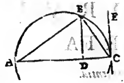


a Parallelogramma.

PROPOSITIO LXX.

SI rursum segmento ABC inscriptum fuerit triangulum, à cuius vertice demissa BD, æquidistet contingenti CE.
Dico rectangulum ABC rectangulo ACBD æquale esse.

 Demon-



Demonstratio.

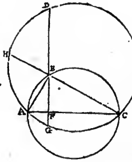
CVm enim EC, BD æquidistent, erunt anguli DBC, BCE, id est anguli DBC, BAC ob EC tangentem æquales; similia igitur sunt triangula DBC, ABC. vnde vt AC ad AB, ita a BC est ad BD: patet igitur ABBC, & ACBD. rectangula esse æqualia.

a 17. Sexti.

PROPOSITIO LXXI.

SEcent inuicem circuli duo quorum vnus per centrum alterius transeat sic vt ducta AC quæ puncta sectionum coniungit, sit diameter circuli transeuntis per centrum alterius; ad quam erigatur per B, in perimetro ABC assumptum, normalis DBG, occurrens ADC perimetro in D & G, & AC in F:

Dico rectangulo DBG æquari ACBF rectangulum.



Demonstratio.

DVcâ CBH, cùm circulus ABC per alterius centrum transeat, erit b HB æqualis AB. vnde ABC rectangulum æquale est rectangulo HBC, sed HBC æquale est rectangulo DBG; igitur & DBG æquatur ABC id est c ACBF rectangulo. Quod erat demonstrandum.

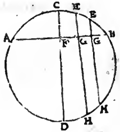
b Serenus lib. 1. prop. 45.

c 69. huius.

PROPOSITIO LXXII.

DIametrum circuli ABC, secet AB, normaliter in F, ponanturq; quæuis EH, occurrentes AB in G.

Dico EGH rectangulum vnà cum FG quadrato, æquari EGH rectangulo vnà cum quadrato FG.



Demonstratio.

QVoniam AB normalis est ad diametrum CD, erit bifariam diuisa in F; & quia non bifariam diuisa est in G, erit AGB, rectangulum vnà cum quadrato FG, d æquale quadrato AF. sed AGB rectangulo æquale est EGH e rectangulum; addito igitur FG quadrato, erit EGH rectangulum vnà cum quadrato FG, quadrato AF æquale. igitur & EGH rectangulum, vnà cum quadrato FG, æquale est EGH rectangulo vnà cum quadrato FG. Quod erat demonstrandum.

d 5. secundi.

e 35. tertij.

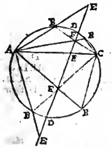
PRO-

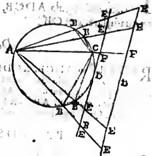
PROPOSITIO LXXIII.

Sit ABC segmentum circuli, cuius AC subtensa, secetur rectâ ED occurrente AC in F vt angulus AFE sit æqualis angulo segmenti ABC: ductæ deinde ex A quotuis rectæ AE occurrant perimetro in B: & ED lineæ in E.

Dico rectangula EAB, inter se esse æqualia.

Demonstratio.





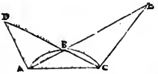
Qvoniam æquales sunt anguli AFE, ABC, & communis angulus BAC, similia igitur existunt triangula AFE, ABC, vnde vt AF ad AE, sic AB ad AC, rectangulum igitur CAF rectangulo EAB [a] æquale est. quare & rectangula EAB, inter se sunt æqualia. Quod fuit demonstrandum. [a] 17. sexti.

PROPOSITIO LXXIV.

Segmento ABC inscripti trianguli ABC latera producta exhibeant triangula ADC, CAE habentia angulos DAC, ACE singulos angulo segmenti æquales.

Dico quadrato AC, æquari rectangulum ADCE.

Demonstratio.



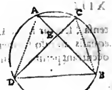
Qvoniam angulus ABC æqualis est angulo DAC, & ACB communis triangulis ABC, ADC, similia erunt triangula ABC, ADC. eodem modo similia ostendentur triangula ABC, AEC: igitur & ADC triangulum simile est triangulo AEC, & DA, AC, CE latera proportionalia: vnde[b] AC quadrato æquale est rectangulum DACE. Quod fuit demonstrandum. [b] ibid.

PROPOSITIO LXXV.

Occurrant inuicem ad rectos in circulo ABC lineæ AB, CD, in E. Iunctisque extremis, exsurgat quadrilaterum ACBD.

Dico quadratis AC, BD, æquari AD, CB, quadrata.

Demon-



Demonstratio.

CVm enim anguli ad E recti sint, erunt quadrata AD, CB, æqualia quadratis AE, ED, CE, EB. sed iisdem æqualia quoque sunt quadrata AC, DB; igitur quadratis AC, BD, æqualia sunt AD, CB quadrata.

PROPOSITIO LXXVI.

IIsdem positis,

Dico rectangula ADCB, ACDB simul sumpta, dupla esse figuræ quadrilateræ ACBDA.

Demonstratio.

a Lud. à Ceul. & alij. RECtangula duo ADCB, ACDB æqualia sunt a rectangulo ABCD, sed & ABCD rectangulo æqualia sunt rectangula AEC, AED, BEC, BED, quæ simul sumpta b dupla sunt figuræ ACBDA, igitur & rectangula ADCB, ACDB

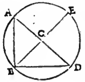
b Patet ex elementis. æqualia sunt rectangulis AEC, AED, BEC, BED adeoque & dupla figuræ ACBDA. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVII.

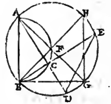
SEcent iterum sese ad rectos in circulo lineæ AD, BE in C.

Dico quatuor quadrata partium AC, CD, CB, CE, simul sumpta, quadrato diametri esse æqualia.

Demonstratio.



TRanseat primò altera linearum, putà AD per centrũ circuli, iunganturque AB, BD. cùm igitur anguli, ACB, DCB recti sint, erunt quadrata AB, BD, æqualia quadratis AC, CB, & CB, CD siue CE, CD, (quia BE in C ab AD diametro diuisa est bifariam) sed quadratum AD, quadratis AB, BD quoque æquale est, cùm ABD sit angulus semicirculi adeoque rectus, igitur etiam quadratum AD, æquale est quatuor quadratis AC, CB, & CB, hoc est CE, CD: quod fuit primò demonstrandum.



Quod si neutra linearum AD, BE transeat per centrum, iunctâ AB, describatur semicirculus ACB, qui per C punctum transibit, cùm angulus ACB rectus ponatur, ex A, verò diameter ducatur AG occurrens circulo ACB in F, per quod collocetur BFH: iunganturque HG, ED, erunt igitur HG, ED lineæ adeoque quadrata inter c se æqualia: quia verò quadrata AB, HG, sunt æqualia quadratis HF, FG, AF, FB, id est quadrato diametri AG vt priùs ostensum est; igitur & quadrata ED, AB, quadrato diametri AG æqualia sunt; sed quadrata ED, AB, æqualia sunt quadratis EC, CD, & AG, CB, igitur & quadrata EC, CD, AC, CB, quadrato diametri sunt æqualia. Quod fuit demonstrandum.

c 18. huius.

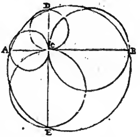
PRO-

PROPOSITIO LXXVIII.

SEcent sese denuo in C ad rectos duæ quæuis AB, DE, in circulo ABD, & super partibus, circuli describantur.

Dico illos simul sumptos æquales esse circulo ABD.

Demonstratio.



CIrculi inter se eam rationem habent quam à diametris a descripta quadrata: ostendimus autem præcedenti propositione quadrata AC, CD, CB, CE, æquari quadrato diametri circuli ADB; igitur & circuli super AC, CD, CB, CE, descripti æquales sunt circulo ADB. Quod fuit demonstrandum.

a 2. duodecimi.

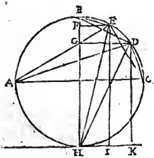
PROPOSITIO LXXIX.

SEmicirculo ABC inscripta sint triangula quęcunque AEC, ADC, actaque contingente HK quæ AC diametro æquidistet, ponantur EI, DK normales contingenti HK.

Dico quadrarum compositæ ex AE, EC, ad quadratum compositæ ex AD, DC eam habere rationem quam continet EI ad DK.

Demonstratio.

POsitâ HB diametro ducantur ad illam normaliter EF, DG, iunganturque EH, DH, EB, DB, quoniam FE normaliter insistit rectę BH, erunt FH, HE, HB, lineæ in cōtinua analogia, vt ex elementis patet. vnde rectangulo FHB, æquatur HE quadratum; eademque de causa quadrato HD, rectangulum GHB; quare vt FH ad GH, hoc est EI, ad DK, sic EH quadratum ad DH quadratum: Rursum cum sit vt HB ad HD, ita composita b ex AE, EC, ad compositam ex AD, DC, erit vt quadratum HE, ad HD quadratum, sic quadratum compositæ ex AE, EC, ad quadratum compositæ ex AD, DC: igitur vt EI ad DK, ita quadratum compositæ ex AE, EC, ad quadratum compositæ ex AD, DC. Quod demonstrandum fuit.



b 14. huius.

PROPOSITIO LXXX.

SEmicirculo ABC inscripta sint triangula duo ABC, ADC; atque ex C, ad opposita latera rectę ducantur CE, CF, vtcunque.

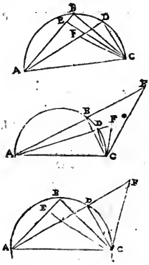
Dico si intra aream circuli occurrant rectis AB, AD, in E, F, quadra-

ta

ta AE, EC, vnà cum rectangulo AEB bis sumpto, æquari quadratis AF, FC vnà cum rectangulo AFD bis sumpto.

Si verò extra circulum occurrant, dico quadrata AE, EC, minùs AEB rectangulo bis sumpto, æquari quadratis AF, FC minùs AFD bis sumpto.

Quod si autem altera intra aream circuli cadat, altera extra, dico quadrata AE, EC cum AEB rectangulo bis sumpto, æquari quadratis AF, FC minùs rectangulo AFD bis sumpto.



Demonstratio.

Si enim cadat CB, CF, intra aream semicirculi, constituent angulos obtusos, AEC, AFC, cùm ABC, ADC recti sint, vnde per elementa quadrata AE, EC, cum rectangulo AEB, bis sumpto, quadrato AC æqualia erunt; sed eidem AC quadrato æqualia sunt AF, FC, quadrata vnà cum rectangulo AFD bis sumpto; igitur quadrata AE, EC cum AEB rectangulo bis sumpto æqualia sunt quadratis AF, FC vnà cum rectangulo AFC bis sumpto. Quod erat primum.

Si verò CE, CF extra cadant; patet angulos AEC, AFC esse acutos: quare tam quadrata AE, EC minùs rectangulo AEB bis sumpto, æquabuntur quadrato AC, quàm quadrata AF, FC minùs AFD rectangulo bis sumpto: vnde veritas secundæ partis quoque manifesta est.

Partis tertiæ demonstratio ex ante dictis clarè patet; igitur, &c. Quod erat demonstrandum.

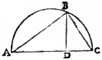
PROPOSITIO LXXXI.

Semicirculo ABC triangulum inscribatur ABC, à cuius vertice ad diametrum demittatur perpendicularis BD.

Dico ADC rectangulum, & rectangulum ABC; denique quadratum AC in continua esse proportione.

Demonstratio.

a 70. huius. b 1. sexti. c 35. tertij.



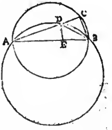
Quadratum AC est ad rectangulum ABC, hoc est a ACBD rectangulum vt b AC ad DB: sed & rectangulum ACBD est ad quadratum BD c hoc est rectangulum ADC, vt AC ad BD, igitur continuant eandem rationem AC quadratum, rectangulum ABC, vnà cum rectangulo ADC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXII.

PEr extrema diametri A B circuli A B C, circulus deſcribatur A D B, poſitâque A C, quæ occurrat A D B perimetro in D, demittatur normaliter D E ad diametrum A B, iunganturque D B, C B.

Dico rectangulum ex A B, D E, ad rectangulum A D B, eam rationem habere quæ eſt inter rectas C B, D B.

Demonſtratio.



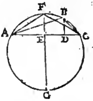
QVoniam angulus A C B in ſemicirculo rectus eſt adeoque æqualis angulo A E D; & A E D, A C B triangulis communis angulus D A E, erunt A D E, A C B triangula ſimilia, vnde vt A B ad C B ſic A D ad D E, & A B D E rectangulum æquale rectangulo A D C B: ſed rectangulum A D C B eſt ad rectangulum A D B vt C B ad D B, igitur & rectangulum A B D E ad rectangulum A D B eſt vt C B ad D E. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIII.

OCcurrat circuli A B C diametro F G in E orthogona A C, quam in D ſecet normaliter B D, iunganturque A B, B C.

Dico rectangulum A B C ad rectangulum A C B D rationem obtinere eandem, quam F G diameter ad A C lineam.

Demonſtratio.



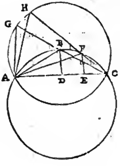
IVngantur A F C. quoniam A C linea in E bifariam adeoque ad rectos eſt diuiſa, erunt A F, F C lineæ æquales, & A F C rectangulum æquale quadrato A F id eſt a rectangulo E F G: quia F E, F A, F G ſunt proportionales. Sed E F G rectangulum eſt ad rectangulum A C F E vt F G ad A C: igitur & rectangulum A F C ad A C F E rectangulum id eſt b parallelogrāmum A F C, vt F G ad A C; quia verò eſt A F C rectangulū ad rectāgulū A B C vt A F C parallelogrāmum in angulo A F C, ad parallelogrammum A B C, in eodem angulo A B C (cū ex ijſdem rationes habeant compoſitas) erit permutando A B C rectangulum ad parallelogrāmum A B C, id eſt ad rectangulum A C B D vt A F C rectangulum ad parallelogrammū A F C id eſt ad c A C F E rectangulum, id eſt ex demonſtratis vt F G ad A C. Quod erat demonſtrandum.

a 47. primi & 5. ſecūdi.
b 69. huius
c Ibid.

PROPOSITIO LXXXIV.

SEcent ſe vtcunque circuli A B C, A D C in punctis A C, iunctaque A C ponantur C E H, C B G, occurrentes perimetris circulorum in B, E, G, H. iunganturque A B, A E.

Dico rectangulum A B C, ad A E C rectangulum eam rationem obtinere, quam G B C, ad rectangulum H E C.



Demonstratio.

IVngantur AG, AH: quoniam anguli ABC, AFC eiusdem segmenti æquales sunt, erunt & reliqui ABG, AFH quoque inter se æquales: vnde cùm & anguli AGC, AHC eidẽ insistentes arcui sint æquales, erũt AGB, AHF triangula similia: & AF ad AH, vt AB ad AG. est autem ratio rectanguli ABC, ad AFC rectangulum composita ex ratione AB ad AF, hoc est GB ad HF, & ex BC ad GC, & ex ijsdem quoque composita est ratio rectanguli GBC ad HFC; igitur vt rectangulum ABC ad AFC, sic GBC rectangulum ad HFC. Quod erat demonstrandum.

Corollarium primum.

HInc consequens est demissis normalibus BD, FE esse GBC, rectangulum ad rectangulum HFC, vt est recta BD, ad EF. est enim vt ABC rectangulum ad AFC sic GBC ad rectangulum HFC; sed ABC ad AFC, rectangulum est, vt ABC parallelogrammum in angulo ABC, ad parallelogrammum, AFC in angulo AFC (quia ex ijsdem rationem habent compositam) hoc est vt rectangulum ACBD ad [a] rectangulum ACFE; igitur vt rectangulum ACBD, est ad rectangulum super ACFE, sic GBC rectangulum ad rectangulum HFC: quare vt BD ad EF, sic GBC rectangulum ad rectangulum HFC. Quod fuit demonstrandum.

[a] 63. huius.

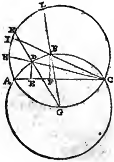
Corollarium secundum.

EAdem manente figura, patet AG esse ad AH vt AB ad AF, siue vt GB ad HF, quia AGB, AHF triangula ostensa sunt inter se similia: quod speciatim ideò volui apponere, quia aliquoties posteà assumendum est.

PROPOSITIO LXXXV.

TRanseat per circuli ABC centrum, perimeter circuli AGC, iunctisque AC, ponantur quæcunque BF, DE normales ad AC: ex centro deinde G, per B & D, agantur rectæ GBL, GDK.

Dico DE, BF lineis KD, LB, esse proportionales.



Demonstratio.

POnantur per D & B rectæ CDH, CBI. vt DE, ad BF, sic HDC [b] rectangulum ad IBC rectangulum, hoc est KDG ad LBG: sed est quoque vt KD ad LB, sic KDG rectangulum ad rectangulum LBG, cùm DG, BG lineæ sint æquales; igitur vt DE ad BF; sic KD ad LB. Quod fuit demonstrandum.

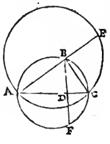
[b] Per coroll. præcedentis.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI.

OCcurrat iterum circulus A B C, cuius diameter A C, centro circuli A E C, ductâque ex A recta A B E, ponatur normalis B D F ad A C. Dico lineas A C, A E, & compositam ex A C & B F, in continua esse analogia.

Demonstratio.



QVadratum A E, æquatur quadratis A B, B E, & A B E [a] rectangulo bis sumpto: est autem quadratum B E æquale B C [b] quadrato, & A B E rectangulum bis sumptum æquale A B C rectangulo (hoc est [c] A C B D) bis sumpto, hoc est rectangulo A C B F semel sumpto; igitur quadratum A E, æquale est quadratis A B, B C, hoc est quadrato A C, & rectãgulo A C, B F, semel sumpto. Sed A C, quadrato vnà cum rectangulo A C B F, æquatur rectangulum super A C & composita ex A C, B F; igitur quadratum A E, æquale est rectangulo super A C & composita ex A C B F. Vnde lineæ A C, A E & composita ex A C B F in continua sunt analogia. Quod fuit demonstrandum.

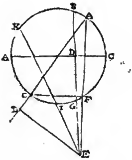
a 4 secundi.
b Serenus lib 1. propos. 45.
c 69. huius.

PROPOSITIO LXXXVII.

EXtra aream circuli A B C, sumpto puncto E, demittatur ad diametrum A C normalis E D, ponaturque quæuis alia E I K.

Dico si D punctum communis linearum A C, D E interfectio cadat intra circulum, quod E D quadratum superet rectangulum I E K rectangulo A D C: si verò D, extra cadat, dico quod E D quadratum deficiat à rectangulo I E K, rectangulo A D C.

Demonstratio.



PRoducta D E, circuli perimetro occurrat in B: quadratum D E æquale est quadratis D G, G E vnà cum D G E rectangulo bis sumpto id est rectangulo B G E semel sumpto, sed B G E rectangulum vnà cum quadrato G E æquatur rectangulo B E G, igitur quadratum D E æquale est quadrato D G, id est rectangulo C D A vnà cũ rectangulo G E B id est I E K.

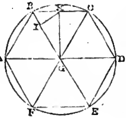
Quod si D extra circuli aream occurrat diametro A C productæ, ducatur ex E recta E A, occurrens perimetro circuli in F, iunganturque C F: erunt itaque similia triangula A D E, & C A F, & D A, A E latera proportionalia lateribus A F, A D: vnde & rectangula C A D, F A E, sunt inter se æqualia; quia verò quadratum A E æquatur rectangulis A E F, E A F, eidemque A E quadrato æquantur quadrata A D, D E; quadratum autem A D, æquale est rectangulis A D C, D A C, erunt rectangula A E F, E A F, æqualia rectangulis A D C, D A C vnà cum quadrato D E, ostensum autem est rectangulum D A C, rectangulo F A E æquale, quare residua quoque inter se æqualia sunt, id est C D A rectangulum auctum quadrato D E, æquale rectangulo F E A, id est I E K. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXVIII.

Circulo A B C, quodlibet polygonum inſcribatur regulare; ductaque ex G centro, G H quæ lateri B C normaliter inſiſtat; ex H ponatur H I, ad rectos angulos ipſi B G.

Dico totum polygonum, ad B G quadratum toties ſumptum, quot laterum eſt polygonum, eam rationem obtinere quam H I recta, ad B G.

Demonſtratio.



a 70. huius.

Dvcantur ex G centro ad angulos polygoni, rectæ A G, B G, C G, &c. Quoniam polygoni regularis latera æqualia ſunt, erunt ſingula triangula A G B, B G C, C G D, &c. inter ſe æqualia: ac proinde duplicia trianguli B H G, cùm B C in H diuiſa ſit bifariam: ſed & B H G trianguli, duplum eſt rectangulum B H G, hoc eſt ᵃ B G H, igitur B C G triangulo æquale eſt B G H I rectangulum, eſt autem B G H I, rectangulum, ad quadratum B G, vt H I, ad B G; igitur etiam B C G triangulum, eſt ad B G quadratum, vt H I ad B G: quia verò idem de ſingulis polygoni triangulis eodem modo demonſtratur, patet totum polygonum ad quadratum B G toties ſumptum, quot laterum eſt polygonum eam proportionem habere quam H I linea, ad rectam B G. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIX.

Iisdem poſitis,

Dico duplum polygoni ad quadratum lineæ, quæ polygoni perimetro ſit æqualis, eam rationem habere, quam H G linea ad lineam polygoni perimetro æqualem.

Demonſtratio.

b Per ſchematica.

Est enim totum polygonum, æquale triangulo baſim habenti æqualem ᵇ lineæ toti perimetro æquali, altitudinem verò H G; igitur duplum polygoni æquatur triangulo illi, bis ſumpto, hoc eſt rectangulo baſim habenti æqualem polygoni perimetro & H G altitudinem; ſed rectangulum hoc ad quadratum lineæ æqualis toti perimetro polygoni, eam obtinet proportionem, quam H G linea ad lineam æqualem toti perimetro; ergo polygonum bis ſumptum ad quadratum lineę, quæ perimetro ſit æqualis, eam habet rationem, quam H G linea, ad rectam toti perimetro polygoni æqualem: quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Hoc loco non videtur omittendum ſequi ex hac propoſitione per ea quæ in libro de progreſſionibus Geometricis diximus, circulum bis ſumptum, ad quadratum ſuæ peripheriæ, eam ſeruare rationem, quam ſemidiameter ad perimetrum, circulum autem ſemel ſumptum ad quadratum perimetri circularis, eam proportionem continere, quam quarta pars diametri ad circuli perimetrum, atque adeò propoſitio-

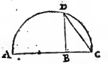
propositionis Archimedeæ veritatem de comparatione circuli ad rectangulum æquale aliter hinc posse demonstrari.

PROPOSITIO XC.

Diametro circuli A B C insistat ad rectos angulos recta B D, iungaturque D C.

Dico rectangulum A B D, ad A C D rectangulum triplicatam eius habere rationem, quam obtinet linea D B ad D C lineam.

Demonstratio.



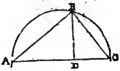
Quia D B normalis est ad diametrum A C rectæ C B, B D, B A, item C B, C D, C A per elementa in continua sunt analogia; vnde cùm prima B C vtrique seriei communis sit, erit * ratio A C ad A B tertiæ ad tertiam duplicata eius quam habet secunda C D, ad D B secundam, sed ratio rectanguli A B D, ad rectangulum A C D composita est ex ratione A C ad A B, hoc est duplicata D C, ad D B, & ex ratione D C, ad D B, patet igitur rationem A B D rectanguli ad rectangulum A C D, triplicatam esse lineæ D C ad D B. Quod fuit demonstrandum. * 117. Libri de progressionibus.

PROPOSITIO XCI.

Semicirculo A B C triangulum inscribatur A B C, è cuius vertice ad basim demissa sit normalis B D.

Dico rectangulum D A B, ad D C B rectangulum, triplicatam rationem habere eius, quam linea A B ad B C.

Demonstratio.



Cum enim B D normalis sit ad diametrum A C, erunt denuo tres A C, A B, A D, & A C, C B, C D in continuata ratione: quia verò communem habent primam A C, erit A D ad D C, in triplicata ratione A B ad B C, sed D A B rectangulum ad D C B rectangulum rationem habet compositam ex ratione D A ad D C, id est duplicata A B ad B C & ex A B ad B C, igitur rectangulum D A B, ad D C B triplicatam habet rationem A B ad B C. Quod erat demonstrandum.

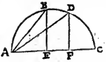
PROPOSITIO XCII.

Semicirculi A B C diametro A C in E & F occurrant normales E B, F D, iunganturque A B, A D.

Dico E A B rectangulum, ad F A D rectangulum, rationem habere triplicatam rectæ A B, ad A D.

Demon-

Demonstratio.



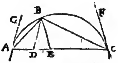
Linea AE ad AF duplicatam habet rationem AB ad AD, cùm tam AC, AB, AE, quàm AC, AD, AF continuè sint proportionales, habeantque communem primam A, vnde cùm ratio rectanguli EAB ad FAD composita sit ex ratione AE ad AF, & AB ad AD, patet EAB rectangulum ad rectangulum FAD triplicatam habere rationem eius quam habet AB ad AD. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCIII.

Segmento cuiuis ABC triangulum inscribatur ABC, ductisque contingentibus AG, CF, ponantur ex B vertice trianguli duæ BD, BE, contingentibus æquidistantes.

Dico rectangulum DAB, ad ECB, triplicatam continere rationem eius, quam habet AB ad BC.

Demonstratio.



a 16. tertij.

Cvm AG sit contingens, erit angulo GAB id est ABD (ob AG. BD parallelas) æqualis angulus a ACB: & quia FC quoque circulum contingit, angulo FCB id est EBC (ob EB, FC parallelas) æqualis est angulus BAC: triangula igitur ABD, BEC similia sunt triangulo ABC: vnde vt AC ad AB, sic AB ad AD: & vt ACad CB, itaCB ad CE: duæ igitur continuè proportionalium series communem habent primam AC; vnde AD ad EC, tertia ad tertiam b duplicatam habet rationem AB ad BC secundæ ad secundam: ratio autem rectanguli DAB ad ECB, rectangulum, composita est ex ratione AD ad EC, & AB ad CB, triplicata igitur ratio est rectanguli DAB ad ECB rectangulum. Quod erat demonstrandum.

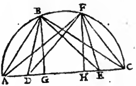
b 17. de progressionibus.

PROPOSITIO XCIV.

Circuli ABC diameter secetur in D & E, punctis, æqualiter à centro semotis, ex quibus binæ ad duo quædam perimetri puncta B, F rectæ deducantur DB, DF, EB, EF.

Dico quadrata DB, BE simul sumpta quadratis DF, FE esse æqualia.

Demonstratio.

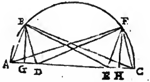


c 12. secundi.

Ivngantur AB, BC, AF, FC, ex B & F demittantur perpendiculares BG, FH ad diametrum AC, quæ cadant primò inter D & E; erunt igitur anguli ADF, CEF rectis maiores; vnde quadratum c FC excedit quadratum FE, quadrato CE vnà cum rectangulo CEH bis sumpto, & quadratum

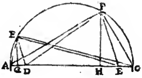
tum IAF ſupetat DF quadratum quadrato AD, vnà cum rectangulo ADH bis ſumpto, eſt autem rectangulum CEH, bis ſumptum, vnà cum rectangulo ADH bis ſumpto,[a] æquale rectangulo CED bis ſumpto; additis igitur quadratis æqualibus EC, AD, erit CED rectangulum bis ſumptum vnà cum quadratis A·D,EC, hoc eſt rectangulum ECA ſemel ſumptum, exceſſus quo AF, FC, quadrata ſuperant quadrata duo DF, FE. Eodem modo oſtendetur quadrata duo AB, BC excedere quadrata duo DB, BE, rectangulo DAC id eſt ECA; igitur cùm quadrata AF, FC æqualia ſint quadtatis AB, BE, & exceſſus DAC, ECA, ſuper quadratis DF, FE, DB, BE, æquales quoque ſint, illis ablatis manent DB, BE quadrata, æqualia quadratis AF, FE.

a Per elementa.



Secundò normales ex B & F demiſſæ cadant intra puncta AD, EC; BG quidem inter A & D; FH verò inter E & C, cùm angulus ADF recto maior ſit, quadratum AF, ſuperat quadrata AD, DF, rectangulo[b] ADH, bis ſumpto, hoc eſt rectangulo ADE, vnà cum rectangulo ADEH bis ſumptis: quia verò FEC angulus recto minor eſt, quadratum FC deficit à quadratis[c] EF, EC rectangulo CEH hoc eſt ADEH bis ſumpto; igitur ADE rectangulum bis ſumptum eſt exceſſus quo quadrata duo AF, FC ſuperant quadrata quatuor AD, DF, CE, EF: demptis igitur æqualibus quadratis AD, CE, remanet ADE rectangulum bis ſumptum exceſſus quo AF, FC, quadrata, excedunt quadrata DF, EF; eadem ratione oſtenditur quadrata DB, BE, ſuperari à quadratis AB, BC, rectangulo CED bis ſumpto, igitur cùm AB, BC, quadrata æqualia ſint quadratis AF, FC, & ADE rectangulum (exceſſus quadratum AF, FC, ſuper DF, FE quadratis) æquale ſit CED rectangulo, (exceſſui quo AB, BC quadrata, ſuperant DB, BE quadrata) demptis exceſſibus, remanent DF, FE quadrata, æqualia quadratis DB, BE.

b 12. ſecundi.
c 13. ſecundi.



Tertiò normalium BG, FH, altera intra DE, altera verò intra AD, ſpatium contineatur: oſtendetur vt priùs, CED rectangulum bis ſumptum, demptis æqualibus quadratis AD, EC æquale eſſe exceſſui quo CB, BA quadrata ſuperant EB, BD; item DF, FE, quadrata ſuperari à quadratis AF, FC, rectangulo ADE bis ſumpto demptis quadratis AD, EC: igitur cùm tota ſint æqualia & exceſſus inſuper æquales ſint, reſidua quoque quadrata DF, FE, erunt reſiduis quadratis DB, BE æqualia. Quod fuit demonſtrandum.

 Scho-

Scholion.

Posset aliter & commodius propositio hæc demonstrari, ac facilius fortassis, sed aliam studio in aliquorum gratiam adhibere volui demonstrationem.

Libri Tertij Finis.

PRO-

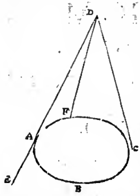
PROLEGOMENA
AD
SECTIONES
CONI.

Conicarum sectionum affectiones & accidentia indagaturi, alieno nonnihil ab antiquis consilio rem aggredimur: illi etenim proprietates quas pluribus sectionibus communes esse aduerterunt, communi quoque demonstratione inuoluerunt, nec immeritò, exigente talem scribendi rationem ipso doctrinæ tenore, ordine ac nitore: nos autem in alium scopum collimãtes, in gratiam eorum, qui Geometria afficiuntur, singillatim singulas explanare intendimus, quo faciliore methodo & minùs confusâ, tyrones ad conicarum speculationum contemplationem inuitentur & alliciantur. Nam vt rectè Fredericus Commandinus ait, quod si aliqua pars est Mathefeos quæ nostris incognita Philosophis, interpretationis lumen aliquod postulet, ea profectò est quæ de Conicis appellatur: quanquam enim à veteribus diligenter tractata sit, tamen eorum monumenta aut ad nos non peruenerunt, aut ita peruenerunt vt vix propter vetustatis iniurias maximasque difficultates intelligantur. conabimur autem ita planas reddere quas præ manibus habemus conicas materias, vt vel leuiter in elementis Euclidis versati eas percipere queant, sine vllo tædio, imò verò cum orexi ad vlteriora tendendi, & has lucubrationes in immensum extendendi. neque enim Geometriæ scientia terminis contineri potest, multoque minùs exhauriri, cùm abyssus sit vastissima, omnem Oceanum quarumcumque speculationum absorbens. Ordiemur itaque ab ipsius nominis notione, phaleris omissis, exponentes, quid Coni nomenclaturâ & natura ex ipsius descriptione aut construendi ratione denotetur.

DEFINITIO.

Quid sit Conus.

Conum appello corpus habens originem ex circumductu lineæ à puncto in sublimi posito in infinitum protensæ circa perimetrum circularem, quæ in diuerso ab eodem puncto plano constituta sit.



Expositio.

Concipiatur in hunc finem circulus quidam ABC, extra cuius planum in quo iacet, assumatur quoduis punctum D, à quo ducta sit linea AE contingens perimetrum circularem in puncto aliquo A: agatur verò linea DE circa peripheriam integram circuli ABC donec in A redeat, hac tamen conditione vt D punctū fixum permaneat, hoc est, vt extremum punctum lineæ DA, quod applicatum est initio circumuolutionis puncto D, ab ipso numquam recedat, tali inquam circumlatione lineæ DE, orietur figura DABC binas habens superficies, vnā motu rectæ DE efformatam, alteram verò circulum ABC. Priorem appellare solent superficiem præter basim. secundam autem ipsam coni basim; punctum D vertex coni nuncupatur, axis verò linea à vertice D ad centrū baseos pertingens.

Ex hac coni descriptione sequitur à quouis puncto in superficie conica assignato posse duci rectam lineam ad ipsum verticem D. cùm enim per rectam DA circa basim ABC circulatione facta, producta sit coni superficies, necesse est vt à quouis puncto perimetri ABC duci possit recta ad verticem D.

Hinc superuacaneum credo demōstrare quod rectæ omnes sint lineæ quæ à vertice ad quodlibet punctum in conica superficie ducuntur; proindeque satis esse manifestum ex ipsa ratione construendi conum, omnem sectionem quæ fit per verticem, triangulum exhibere cuius latera sint in coni superficie.

Suppono quoque æquè notum, omnem lineam à puncto in superficie coni assumpto ductam ad quoduis aliud, quod in recta non existat quæ ad verticem tendit intra conum ipsum penetrare si infinitè vtrimque producatur, licet hæc omnia placuerit Apollonio demonstrare: quarum demonstrationes si lector desideras, in eodem poteris cognoscere.

Hoc loco occurrit notandum pluribus alijs vijs conum describi posse; puta circumducendo ex eodem puncto D, in sublimi posito rectam AD circa figuram ellipticam aut quamlibet aliam è conicis: sed placuit non sine causa antiquis circulo solo vti, eò quod, vt in decursu libri apparebit, commodior figura sit ad demonstrationes formandas: adde quod figurarum aliarum efformatio conum priùs supponat, ex quo ferè solo ortum habent, præter ellipsin, quæ vt reetè Serenus ostendit, ex Cylindro quoque excludi potest.

Quotuplex sit conus.

Duplex est conus; alius Isoscelius est siue Æquicruris, qui & rectus dicitur; alius Scalenus. Æquicruris est à cuius vertice linea ad basim normaliter demissa in baseos centrum pertingit. Scalenus autem omnis ille conus appellatur, qui perpendicularem ductam a vertice ad circularem basim, si opus est etiam extensam infinitè, extra centri punctum constitutam habet, quod basis medium est.

Vnde rectum quoque dicunt conum qui æquicruris est, obliquum qui scalenus: discrimen inter vtrumque in eo maximè situm, quod rectum conum si per axem plano dispescas, Isoscelium resultabit in partibus diuisis triangulum, cuilibet alteri æquale & simile quod per axem fit: scalenus autem sine numero varia producit triangula sectionibus per axem repetitis, quæ inter se neque similia sint, neque æqualia: circa quæ has sequentes propositiones præmittemus. Ad quas perlegendas priusquam accedas amice Lector,

NO-

NOTA

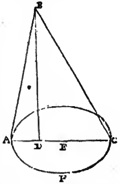
Pleraque theoremata, quæ in hisce prolegomenis adferemus, proponi etiam ac demonstrari à Sereno Antinsensi Philosopho ac Geometra, libro secundo de sectione coni. Omnino mihi memoria exciderat tractatam à Sereno eandem esse materiam: iam enim anni sunt viginti & amplius quod authorem illum non legerim. Velim itaque, qui hæc leget plagij reum me ne faciat; sed cogitet, si deinceps forsasse quædam mihi cum Sereno communia occurrent, mihi eadem, quæ Sereno olim, potuisse incidere.

PROPOSITIO PRIMA.

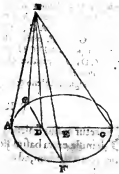
In cono scaleno si à vertice linea ad perpendiculum demittatur, & per verticem, centrum basis, ac punctum à perpendiculo denotatum planum agatur,

Dico triangulum per hanc sectionem factum continere maximam & minimam linearum quæ in superficie conica exhiberi possunt.

Demonstratio.

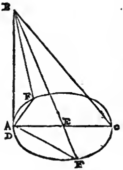


Triplex est hic casus: vel punctum perpendiculo denotatum intra peripheriam baseos existit, vel in ipsa peripheria, vel denique extra ipsum circulū. Pro primo igitur casu ponatur conus A B C & baseos centrum E: vertex autem B: à quo demissa perpendicularis, occurrat basi intra peripheriam in puncto D, per quod, & per centrum, agatur planum quod pertingat vsque ad B coni verticem; exhibebit hæc sectio triangulum A B C: nam ex constructione coni B A, B C sunt rectæ lineæ; ostendendum est itaque A B esse minimam omnium linearum, B C verò maximam quæ in superficie conica existunt.



Ducta quauis B G, ponatur ex G recta G D F, quoniam A D C per centrum transit, erit A D minor a quàm G D, & quadratum A D, minus quadrato G D: additoque communi quadrato D B, quadrata A D, D B, minora sunt quadratis G D, D B. angulus autem G D B b rectus est, quemadmodum & angulus A D B: igitur quadratum A B, æquatur c quadratis A D, D B, quadratum verò G B æquatur quadratis G D, D B. ergo quadratum A B, minus est quadrato G B. ergo linea A B minor rectâ B G. a 7. tertij. b defin. 3. undecimi. c 47. primi.

Eodem pacto ostendetur recta B C omnium maxima: ex puncto quippe quouis F, si ducatur quæuis F B: & per D ponatur F D, quia A D C per centrum transit, d D C maior est quàm E F. vnde quadrata C D, D B maiora sunt quadratis F D, D B, sed cùm rursum anguli C D B, F D B sint recti, quadratum C B quadratis C D, D B, & quadratum F B quadratis F D, D B æqua- d 7. tertij.

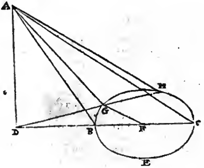


DB æquale eſt. Ergo quadratum CB maius eſt quadrato FB, adeoque recta CB maior quàm FB. vnde maxima BC eſt earum quę in ſuperficie coni aſſignari poſſunt; AB verò minima. Quod demonſtrari oportuit.

Iam verò BD perpendicularis è coni vertice demiſſa cadat in perimetrum circuli AFC; dico iterum AB lineam eſſe minimam, & BC maximam illarum quæ in ſuperficie coni exiſtunt.

Ducatur enim quæuis BF, iungaturque AF, rurſum igitur quadratum BF ª æquatur quadratis AF, AB, adeoque maius eſt quadrato AB. Vnde BF, linea maior eſt rectâ AB: clarum eſt inſuper BC rectam omnium eſſe maximam, nam quadratum BC æquale quadratis CA, AB maius eſt quadrato BF æquali quadratis FA, AB.

a 47. primi.



Reliquus caſus eſt in quo dato ſcaleno cono ABC, linea AD demiſſa perpendiculariter ad planum BEC productum, extra ipſum conum ſignat punctum D: quo caſu dico rurſum AB minimam eſſe, AC verò maximam. Ducatur enim quæcunque recta AG; ᵇ BD minor eſt DG, igitur quadratum AG æquale quadratis GD, DA maius eſt quadrato AB. ergo AB minor eſt quàm AG, ducatur iam quęuis AH; CD ᶜ maior eſt quàm HD, ergo quadratum CA, æquale quadratis CD, DA, maius eſt quadrato HA, æquali quadratis HD, DA. ergo CA maior HA.

b 8 tertij.
c 8. tertij.

In cono igitur ſcaleno &c. quod fuit demonſtrandum.

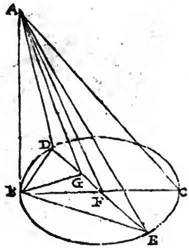
PROPOSITIO II.

SEcetur conus ſcalenus (à cuius vertice linea ad baſim perpendiculo demiſſa extra baſim non cadit) per centrum & verticem, ſectione exhibente triangulum, ad cuius baſim demittatur normaliter recta à vertice coni.

Dico illam intra conum cadere.

Demon-

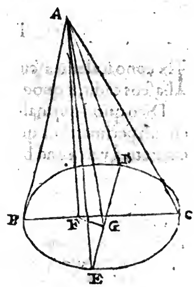
Demonstratio.



DVplex est casus; primus quo conus ABC cuius basis BDC, habet BA perpendicularem à perimetro aliquo puncto ad verticem erectam; alter dum lineæ à vertice ad basim ducta perpendiculariter intra basim cadit. Igitur fiat sectio per centrum F, & apicem A, exhibens triangulum ADE: ostendere igitur oportet, normalem ex A ad basim DE demissam intra conum, hoc est inter puncta D & E occursuram diametro DE. Ducantur enim BD & BE; deinde ex puncto B ponatur BG, normalis ad diametrum DE (cadet hæc necessariò inter puncta D, E) & iungantur AG. quoniam AB ex hyp. normalis est basi, recta EB in basi ad ipsam ducta per defin.3.11. normalis est. ergo quadratum AE æquatur quadratis AB, BE: hoc est a quadratis AB, BG, GE. quadratum autem AG quod angulus ABG b etiam rectus sit æquatur quadratis AB, BG, igitur quadratum AE excedit quadratum AG, quadrato GE. vnde quadratum AE æquale est quadratis AG, GE. angulus ergo AGE, rectus est, & AG perpendicularis. Atqui hæc ducta est à vertice coni & occurrit basi trianguli intra conum. Perspicua est igitur veritas propositionis in casu primo.

a 47. primi.
b ibid.

Eodem modo procedet demonstratio si loco lineæ AE, vtamur linea AD.

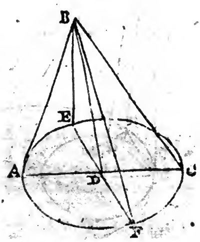


Quod si perpendicularis à vertice coni ad coni basim demissa cadat intra conum vt AF rursum ducatur FG normalis ad ED, iungaturque AG. Eodem planè discursu demonstrabimus quadratum AE æquari quadratis AG, EG; adeoque angulum AGE rectum esse, & AG perpendicularem ad basim trianguli ADE, ex quo manifesta in hoc etiam casu propositionis est veritas.

PROPOSITIO III.

LAterum quadrata cuiuscunque trianguli in cono scaleno per axem facti æqualia sunt quadratis laterum cuiuscunque alterius trianguli per eundem axem.

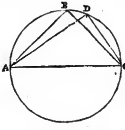
Demonstratio.



SIt enim ABC conus scalenus cuius axis BD: per quem fiat quæuis sectio BEF: fiat autem ABC triangulum aliud sectum per axem BD. Dico quadrata AB, BC, quadratis BF, BE esse æqualia, quadrata enim AB, BC ostensa sunt libro quem de linearum potentijs scripsimus, æqualia esse quadratis AD, DC, & BD bis sumpto; at etiam eodem discursu ostensum est quadratis BF, BE æquari quadrata FD, DE vnà cum quadrato BD bis sumpto: igitur cùm FE. AC lineæ earumque dimidiæ FD, DE, AD, CD sint inter se æquales, patet veritas demonstrationis.

Corolla-

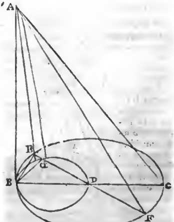
Corollarium.



Hinc colligere licet facilem praxim cognoſcendi latera triangulorum quæ per axem ſectione facta emergunt,& proportionem illorum inter ſe. ponatur enim ſemicirculus A B C : cui A B C triangulum ſit inſcriptum habens latera A B, B C æqualia lateribus maximi trianguli alicuius coni per axem ſecti: Quoniam ergo quadrata laterum minimi trianguli per axem eiuſdem coni æquantur quadratis laterum maximi A B, B C, (hoc eſt quadrato A C) poterunt & minimi latera inflecti in ſemicirculo, quæ ſint A D, D C. quod ſi tertia quędam ſectio fiat per eundem axem, proportio laterum illius trianguli, reperietur neceſſariò in aliquo triangulorum quod habebit baſim A C, & verticē in vno punctorum quę ſunt in parte perimetri B D. cùm enim æqualia ſint quadrata laterum vnius trianguli quadratis laterum alterius, quod per axem facta ſectione reſultat, ſintque A B C trianguli quadrata A B, B C æqualia quadratis laterum maximi; quadrata verò A D, D C æqualia ſint quadratis laterum minimi; ſequitur latera cuiuſcunque alterius, quod per axem coni producitur, in aliquo triangulorum reperiri debere quod baſim habeat A C & latera reliqua ſeſe in aliquo punctorum decuſſantia quę in arcu B D, aſſignari poſſunt, quod ex decurſu ſequentium propoſitionum magis elucidabitur.

PROPOSITIO IV.

IN cono ſcaleno à cuius vertice demiſſa perpendicularis in perimetrum baſeos cadit, ſi quoduis triangulum per axem ſectione facta exhibeatur: Dico quod normalis à vertice coni ducta ad baſim trianguli cadet in circuli perimetrum qui deſcribetur diametro intercepta inter perpendicularem à vertice ad baſim ducta & centrum baſeos eiuſdem.



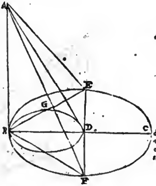
Demonſtratio.

SIt igitur A B C conus cētrū baſeos D. à coni vertice A tecta A B demiſſa perpendiculariter, cadat in B punctum perimetri baſeos B E C, deſcripto deinde circulo B G D, ſuper diametro B D, agatur planum per axem quodcumque A E F, exhibens triangulum A E F: cuius baſis primò ſecet circulū in punctis D G: ad G ex A puncto verticis, demittatur A G. Dico illam eſſe quæ baſi E F normaliter inſiſtit; ducatur enim recta linea B G, iungaturque B F. Quoniam igitur ex hypotheſi A B recta eſt plano baſis B E, C F, a angulus A B F rectus eſt: adeoque quadratum A F æquale quadratis A B, B F; hoc eſt, quoniam angulus B G F in ſemicirculo etiam rectus

a *def. 3. vndecimi.*

rectus est, quadratis AB, BG. GF. quadratum autem AG æquale est quadratis AB, BG, quod angulus ABG [a] similiter rectus sit. Igitur excedit quadratum AF [a] quadratum AG, quadrato FG: quare quadratum AF æquatur quadratis AG, GF. vnde normaliter insistit [b] recta AG, ipsi GF in puncto G. quod est in perimetro circuli habentis diametrum BD. [a] def. 1. vndecimi. [b] 48. primi.

Secundò basis trianguli EF contingat circulum BGD in puncto D; ducaturque AD, ad punctum contactus, quod idem est cum centro basis coni BHC; junganturque AE, AF: quoniam [c] anguli BDE, BDF recti sunt, & ED latus lateri DF, ac BD sibi ipsi æquale est, etiam bases BE, BF æquales erunt. ergo quadrata BE, BA, quadratis BF, BA æqualia sunt. Atqui quadratum FA æquatur quadratis BF, BA, & quadratum EA quadratis BE, BA, quod recta AB plano basis coni sit recta, adeoque anguli [d] ABF, ABE recti: quadrata igitur FA, EA, ac proinde etiam rectæ FA, EA æquantur. Quare cùm in Isoscele FAE, basim bisecet AD, erit hæc [e] perpendicularis ad basim. Itaque in hoc etiam casu perpendicularis AD est ad circulum BGD. [c] 18. tertij. [d] def. 3. vndecimi. [e] ex elementis.

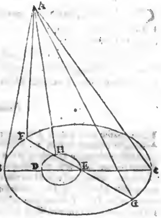


Tertiò si triangulum per axem transeat per AB normalem à vertice ad basim coni ductam, ac proinde eius basis eadem sit cum BDC: tum perpendicularis à vertice ad basim trianguli, eadem quoque erit cum perpendiculari AB quę ducitur à vertice ad basim coni. Quare etiam hoc casu tertio perpendicularis ad basim trianguli ad circuli peripheriam existet; in cono igitur scaleno, &c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Conus scalenus à cuius vertice perpendicularis cadit intra conum, si secetur per axem exhibens triangulum, ad cuius basim normalis ducatur à vertice procedens:

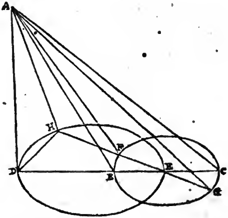
Dico illam perimetro circuli occursuram cuius diameter æqualis erit lineæ inter perpendicularem à vertice coni & centrum baseos eiusdem coni interceptæ.



Demonstratio.

Esto conus ABC, à cuius vertice perpendicularis AD demissa cadat intra conum, occurrens basi in D: à quo ducta sit DE recta ad centrum baseos, super qua vt diametro circulus DHE describatur: dein per axem fiat quęcunque sectio exhibēs triangulū AFG: cuius basis FG primò secet circulū in E & H, tū ex vertice A demittatur AH ad rectam FG. Dico illam in perimetrum circuli DHE incidere. ducatur enim ad punctum H, in quo GE circulo occurrit recta DH; junganturque

DG: erit igitur quadratum AG æquale quadratis AD, DG, hoc est quadratis AD, DH, HG: quadratum autem AH æquale est quadratis AD, DH: igitur excedit AG quadratum, quadratum AH, quadrato HG: igitur quadratum AG, quadratis AH, HG est æquale, adeoque recta AH normalis ad lineam FG. vnde patet normales omnes à vertice A hoc in casu ad bases triangulorum per axem demissas in circulum DHE cadere.



Casus secundi & tertij quando basis trianguli aut contingit circulum DHE, aut incidit in BEC, eadem est demonstratio, quæ pro ijsdem casibus superiori propositione allata est; consequitur scalenus, &c. Quod fuit demonstrandum.

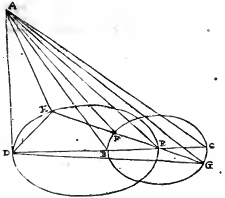
PROPOSITIO VI.

SI in cono scaleno perpendicularis à vertice ad basim ducta extra basim cadat, productum sit autem sectione per axem factâ quodcunque triangulum:

Dico normalem à vertice ad basim trianguli ductam, esse ad peripheriam circuli, cuius diameter est recta inter centrum basis coni & perpendicularem à vertice ad basim coni interiecta.

Demonstratio.

EXtra basim coni scaleni ABC perpendicularis à vertice cadat recta AD. actaque per centrum baseos E, recta DE circa quam circulus describatur DHE, ponatur quodcunque triangulum per axem FAG: & protractâ GF vsque ad peripheriam circuli DHE (ponimus enim primò basim EF secare circulum DHE) demittatur deinde recta AH ex puncto verticis A, ad punctum quo secatur circulus DHE à linea GF. Dico illam fore normalem, ad rectam GF productam. ducantur enim DG, DH: erit igitur quadratum AG æquale duobus quadratis AD, DG: (quoniam AD normalis est ad planũ baseos productum, adeoq; etiam ad DG) hoc



hoc est tribus quadratis A D, D H, H G, cùm D H E sit in semicirculo angulus rectus; sed quadratum H A æquatur quadratis A D, D H, quòd angulus A D H iterum * rectus sit; igitur quadratum A G excedit quadratum A H quadrato H G. vnde A G quadratum, duobus quadratis A H, H G æquale existit: quare angulus rectus est A H G. estque punctum H in perimetro circuli D H E ex constructione; manifestum igitur est in primo casu omnem normalem à vertice scaleni ad trianguli per axem basim in circuli D H E perimetrum incidere. * def. vndecimi.

Secundi casus tertijque quando basis trianguli aut contingit circulum D H E, aut incidit in rectam D E C, demonstratio conuenit cum ea, quam propos. 4. pro iisdem casibus attulimus.

Si igitur in cono scaleno, &c. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium primum.

HInc patet in omni casu quo è vertice coni scaleni ad basim eiusdem protractam, demittitur perpendicularis, extra basim coni, in triplici differentia producenda triangula per axem conicum linearum quæ à vertice ad bases triangulorum normaliter ducuntur, quædam occurrant punctis circuli D H E, quæ extra conum sunt, nonnullæ punctis intra eum constitutis, duæ autem numero ipsi perimetro baseos, videlicet I & K, quod patet ex partibus circuli D H E: quarum nonnullæ extra basim existunt, quædam verò intus, puncta verò I & K, cùm sint intersectionum necessariò in vtroque circulorum consistunt.

Corollarium secundum.

PErpendicularis incidens in perimetri D H E, punctum E, quod idem est cum centro basis coni, est omnium maxima. sit enim alia quæuis A H, quæ ipsa etiam incidet in perimetrum D H E, & iunge D H: quadratum E A æquatur quadratis E D, D A; quia autem E D diameter circuli quauis aliâ rectâ ductâ intra circulum, atque proinde & rectâ D H maior est, erunt quadrata E D, D A maiora quadratis H D, D A, hoc est quadrato H A. Quare quadratum E A maius quoque est quadrato H A, & recta E A maior quàm H A. Quod autem E A maior etiam sit quàm A D, manifestum est, cùm in triangulo E A D, opponatur E A recto, A D acuto, E A maiorem esse quauis alia v. g. H A; sic quoque & breuius ostendemus: quoniam H A ex hypothesi normalis est ad basim G F trianguli F A G, angulus A H E rectus est, adeoque alter A E H acutus. Quare E A opposita angulo recto maior est quàm H A quæ acuto opponitur.

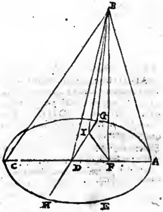
Perpendicularis verò quæ incidit in punctum D, ac proinde eadem est cum recta AD quæ à vertice ad basim coni normalis ducitur, omnium perpendicularium est minima. Ducatur enim quæuis alia perpendicularis AH, (nam quod AD minor sit quàm EA, iam ostensum est) erit hæc etiam ad peripheriam DHE: iungatur DH: in triangulo ADH, AD opponitur angulo acuto AHD; AH verò angulo recto ADH. ergo minor est AD quàm AH.

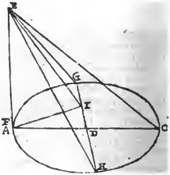
Hoc corollarium verum quoque esse in casibus duarum præcedentium theorematum, eadem planè demonstratione probabitur.

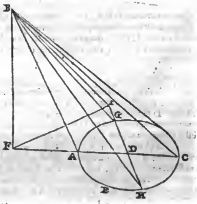
PROPOSITIO VII.

IN cono scaleno dato exhibere minimum triangulorum sectione per axem factâ.

Constructio & demonstratio.







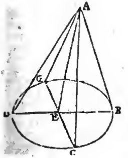
COnus scalenus ABC, datus sit, cuius vertex B: centrum baseos D: axis verò BD. demittatur ad basim coni perpendicularis BF, & iungantur FD. quæ continnetur vsque ad perimetrum baseos vtrimque in A & C, factâ igitur sectione coni per apicem B, & lineam AC, producetur triangulum per axem ABC. Dico hoc esse minimum eorum quæ ex cono ABC possunt educi per axem sectione factâ. Demonstratio est manifesta ex corollario 2. propos. præced. fiat enim quæuis alia sectio per axem, scilicet BGH: & è vertice B demittatur normaliter BI ad diametrum GH, iunga-

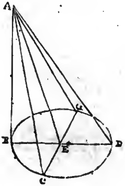
iungaturque recta F I. Cùm B F recta sit plano A H C, angulus B F I rectus erit; quare angulus B I F acutus est. maior ergo est B I quàm B F. itaque cùm triangula G B H, A B C æquales habeant bases G H, A C, erit A B C triangulum minorem habens altitudinem B F, minus triangulo G B H, maiorem habente altitudinem B I. Similiter ostendemus triangulum A B C quouis alio minus esse. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

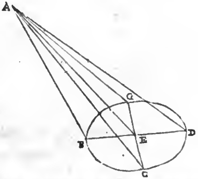
PROPOSITIO VIII.

IN cono scaleno assignare maximum triangulorum quod sectione quæ per axem facta educi potest.

Constructio & demonstratio.







SIt conus scalenus A B C D, per præcedentem verò propositionem inueniatur triangulum minimum eorum quæ per axem fiunt, nimirum A B D: deinde per centrum E collocetur C E G diameter normaliter ad rectam B D, secundùm quam & verticem A plano ducto statuatur triangulum A C G. Dico hoc omnium esse maximum. ex casu enim secundo propositionis quartæ patet A E normalem esse ad basim C G: & ex corollario secundo propositionis sextæ patet perpendicularem A E, ad basim trianguli C A G, esse maximam omnium perpendicularium, quæ ad bases reliquorum per axem triangulorum ducuntur. Quare cùm omnium per axem triangulorum bases sint diametri basis coni, ac proinde æquales, triangulum C A G maximam habens perpendicularem, hoc est altitudinem, omnium est maximum; in cono igitur scaleno exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

Corollarium primum.

HInc & ex corollario secundo sextæ huius patet triangulum maximum sectione per axem ad triangulum minimum, factum eadem sectione, esse in proportione, axis ad centrum basis ducti, ad perpendicularem AF, in fig. propositionis septimæ; cum illę vtriusque trianguli æquali basi insistentis perpendiculares sint.

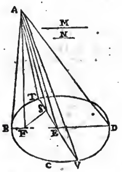
Corollarium secundum.

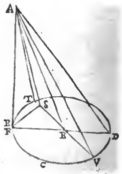
PAret deinde in cono scaleno triangulum maximum factâ sectione per axem natum, Isosceleum esse, cùm AE perpendicularis ostensæ sit secare lineam CG in partes æquales.

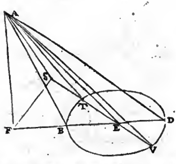
PROPOSITIO IX.

PRopositum sit in cono scaleno triangulum per axem exhibere quod cum minimo triangulorum per eundem facto datam obtineat rationem: quæ tamen maior non existat illâ quæ est inter triangulorum maximum & minimum sectione per axem factâ productorum.

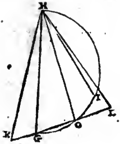
Constructio & demonstratio.







DAtus sit conus scalenus, basim habens BCD, in quam normalis cadat AF: axis sit AE, centrum basis E. Ratio autem data sit M ad N. Et quoniam illa ponitur non maior ratione maximi per axem trianguli ad minimum, neque maior erit ratione ipsius AE ad AF, vt colligitur ex coroll. præced: Ducto iam per A, F, E, puncta plano producatur triangulum ABD quod per 7. huius erit minimũ per axem triangulorum; assumptâ deinde rectâ GH, quę sit æqualis EA, describatur semicirculus GIH, cuius diameter GH, & rectæ AF æqualem HI inscribe semicirculo: denique vt N ad M, ita fiat HI ad HO, quæ ex puncto H aptari poterit in semicirculo inter puncta I, G, cùm ratio data M ad N, non sit maior ratione AE ad AF, hoc est, ob linearum ex constr. æqualitatem, HG ad HI. Deinde iuncta OG, quæ cùm HO angulum rectum constituet, vtpote in semicirculo, fiant GL, GK æquales semidiametro EB, iungaturque HL, HK. Quoniam igitur bases BD, LK, æquales





les sunt, triangulum LHK erit ad triangulum BAD, vt perpendicularis HO ad perpendicularem AF, hoc est vt HO ad HI, hoc est vt M ad N restat igitur vt situm huius trianguli in cono ABCD assignemus, assumptâ lineâ PQ quæ sit æqualis HO, describatur interuallo PQ semicirculus PRQ, deinde aptetur in semicirculo PR æqualis HI, hoc est AF, & iungatur RQ: tandem super base FE fiat triangulum ex lineis OG, RQ, nimirum FSE, vt ES ipsi OG, & FS æqualis sit QR. tum per E & S agatur diameter TV, ponanturque AT, AV, & AS. Dico triangulum ATV, esse æquale triangulo LHK & simile. Quoniam AF ducta est normalis ad basim coni, erit[a] angulus AFS rectus, & quadratum AS æquale quadratis AF, FS, hoc est (quia ex constructione AF est PR, & FS est RQ) quadratis PR, RQ. Atqui etiam quadratum PQ æquatur iisdem quadratis PR, RQ: igitur quadratum AS æquale est quadrato PQ, adeoque & recta AS æqualis est rectę PQ, hoc est rectæ HO. Iam verò AS normalem esse basi TV, vt HO est basi LK, sic ostendo. Quadratum HG æquatur quadratis HO, GO: quare cùm ex constructione AE ipsi HG, & SE ipsi OG, & ex demonstrat. AS ipsi HO sit æqualis, æquabitur etiam quadratum AE quadratis AS, SE: ac proinde angulus ASE rectus est, & AS perpendicularis basi. Quare cùm in triangulis LHK, TAV & bases LK, TV ex constructione, & perpendiculares siue altitudines HO, AS, æquales sint, ipsa quoque triangula erunt æqualia. Insuper cùm OG ipsi SE, & GK ipsi EV æquales sint, erit OK æqualis SV, sed & HO ostensa est æqualis AS, anguli que HOG, ASV recti sunt & æquales. Ergo HK æqualis est AV. similiter ostendam HL, æquari AT. Itaque similia etiam sunt triangula LHK, TAV. Quare assignauimus in cono scaleno triangulum per axem ATV quod ad triangulum ABD, habet datam rationem M ad N. Quod erat faciendum.

[a] def. 3. vndecimi.

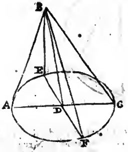
PROPOSITIO X.

SI coni scaleni triangulum per axem, ad verticem angulum rectum contineat:

Dico omnia per axem facta angulum rectum continere.

Demon-

Demonstratio.



a 3. huius.

b 41. primi.

SCalenus conus secetur per axem sectione A B C, quod triangulum producat habens angulum ad verticem B rectum: secetur autem quouis alio per axem plano exhibente triangulum B F E. Dico angulum F B E, rectum esse. Quoniam angulus A B C est rectus, quadratum A C æquale est quadratis A B, B C; sed suprà a ostensum est quadrata A B, BC æquari quadratis F B, E B. Ergo quadratum A C æquatur quadratis F B, E B. est autem F E æqualis rectæ A C, ergo & F E quadratum ijsdem quadratis F B, B E æquale erit, quare b angulus F B E rectus. Itaque si coni scaleni, &c. Quod fuit demonstrandum.

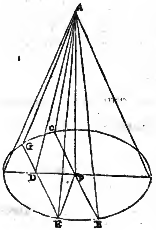
Scholion.

PRæter triangula quæ eruuntur ex cono sectione per axem factâ, alia quoq; assignantur quæ per verticem quidem transeunt, minimè verò per axem; quæ cùm sine numero sint, hinc determinationē exigunt vt solutiones problematum quæ circa ea versantur, rectè expediantur.

PROPOSITIO XI.

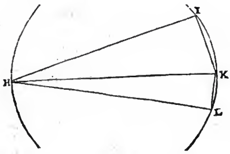
IN cono recto acutangulo & rectangulo impossibile est triangulo per axem facto, æquale triangulum exhibere non per axem. siue triangulú, per axem maius est quolibet non per axem.

Demonstratio.



c def. 3. vndecimi.

NAm si fieri potest, ponatur triangulum aliquod A E G non transiens per axem A F, ęquale triangulo per axem ducto B A C, quod ita in cono ductum concide, vt eius basis B C sit parallela basi E G, quod fieri posse constat, cùm omnia in cono recto per axem triangula sint æqualia. Ducatur ex centro F recta F D bisecans basim E G, junganturque A D, F E, & super recta H K æquali ipsi A E, constitue bina triangula H I K, H L K, æqualia & similia triangulis A E F, A D E. sic vt latera H I, I K, lateribus A F, F E, & latera H L, L K, lateribus A D, D E ęqualia sint, adeoque anguli I & L, angulis A F E, A D E sint æquales. Quoniam igitur axis A F ex hypot. rectus est plano basis, erit c angulus A F E rectus. Angulus quoque A D E rectus est, vt colligitur ex demonstratis in secundo casu quartæ huius. Quare recti etiam sunt anguli I & L, puncta igitur I, L, H, K sunt ad circulum cuius diameter H K. Et quoniam conus datus est rectangulus vel acutangulus, axis A F erit vel



vel æqualis ſemidiametro F E, vel maior. Quare cùm A I ipſi A F, & I K ipſi F E ſint æquales, erit quoque H I aut æqualis I K, aut maior. Ergo vertex I trianguli A I K, vel biſecabit arcum H I K, vel erit alterū punctum biſectionis verſus K. Deinde quia A D, hoc eſt A L, maior eſt quā A F hoc eſt H I, erit arcus H L maior arcu H I, ac proinde vertex L trianguli H L K non ſolùm cadet vltra punctum quo biſecatur arcus H L K, ſed etiam propius adhuc incidet verſus K, quàm alterius trianguli vertex I. Minor igitur eſt altitudo trianguli H L K, quàm trianguli H I K, adeóque minus eſt A L K hoc eſt A D E, triangulum, triangulo H I K hoc eſt A F E. Atqui triangulum A F E æquatur triangulo A F B, cùm omnia vtriuſque latera viciſsim ſint æqualia. Ergo triangulum A D E minus etiam eſt triangulo A F B: ac proinde triangulum E A G duplum ipſius A D E (eſt enim E G ex conſtructione biſecta in D) minus eſt triangulo B A C duplo ipſius A F B. ſimiliter demonſtrabimus quoduis aliud triangulum quod per axem non ſit factum, minus eſſe triangulo per axem. In cono igitur recto, &c. Quod erat demonſtrandum.

Quod autem in demonſtratione fuit aſſumptū, (in recto) nempè cono acutangulo axem ſemidiametro baſis eſſe maiorem, in cono verò recto rectāgulo æqualem, paucis ſic demonſtrabo.

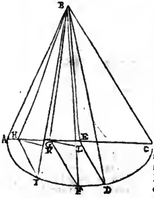
Sit conus rectus acutangulus ſectus triangulo per axem B A C. quoniam in triangulis B F A, C F A, latera B A, C A, B F, F C æqualia ſunt, & F A commune, anguli quoque F A B, F A C æqualia ſunt, ſed totus B A C eſt minor recto vtpote acutus, angulus igitur F A B ipſius dimidius minor eſt ſemirecto. Quare cùm angulus B F A rectus ſit, erit reliquus A B F minor ſemirecto, hoc eſt maior angulo F A B. ergo axis A F [a] minor eſt ſemidiametro F B. [a] 19. primi.

Quod ſi conus fuerit rectus rectangulus, tunc angulus B A C erit rectus, ac proinde B A F, dimidius totius B A C, ſemirectus eſt. Quare cùm angulus B F A rectus ſit, neceſſe eſt, vt reliquus F B A etiam ſit ſemirectus, adeóque æqualis angulo B A F. vnde axis A F & ſemidiameter baſis coni æquales erunt.

PROPOSITIO XII.

Aliter & expeditius præcedens theorema hunc in modum demonſtrabitur.

 Demon-



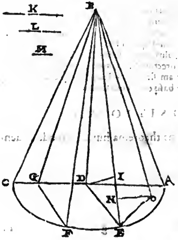
Demonstratio.

IN cono rectangulo vel acutangulo sit triangulum per axem BFG & quoduis aliud extra axem IBH, diameter autem basis coni sit AEC. ex punctis G ac H ducantur GL, HK normales ad BF, FI. Quandoquidem conus sit rectangulus vel acutangulus, erit axis BG, vt ostendi suprà, æqualis semidiametro GF, aut maior. Ex quo liquet segmentum BL non esse minus segmento LF, ac proinde punctum L cadere vel inter F & punctum medium rectę FB, vel ad summum in ipsam medium punctum incidere. Deinde quia angulus BGF, BHI, recti sunt, vt patet ex dictis prop. 11. & ab ijs normales dimissæ GL, HK, erunt a rectangula LFB, KIB æqualia quadratis FG, HI. Atqui quadratum GF maius est quadrato HI, rectangulum igitur LFB maius est rectangulo KIB. ergo cùm BI, BF æquales sint, IK minor est quàm FL. quoniam igitur, vt antè ostendi, punctum L cadit inter F & punctum medium rectæ BF, punctum K etiam cadet inter I & punctum medium rectæ BI, id est BF, & quidem propius versus I, quàm L, versus F. liquet igitur b rectangulum BKI minus esse rectangulo BLF. Atqui quadrata LG, KH, æquantur rectangulis BLF, BKI, ergo quadratum KH minus est quadrato LG, ergo normalis KH minor normali LG. Quare cùm bases BI, BF æquales sint, triangulum IBH minus est triangulo BFG. similiter ostendam quoduis aliud extra axem triangulum minus esse triangulo per axem FBG, illud igitur maximum est. Quod fuerat demonstrandum.

a 8. sexti.

b 5. secundi.

PROPOSITIO XIII.

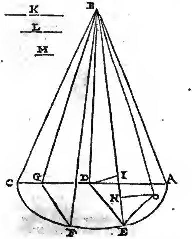


DAtus sit conus rectus axem habens BD, & ratio maioris inæqualitatis K ad L.

Oporteat triangulum exhibere extra axem ad quod BED triangulum per axem datam habeat rationem K ad L.

Constructio & demonstratio.

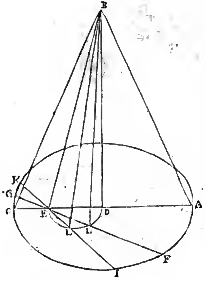
EX puncto D ad BE normalem ducito DI, fiatque vt K ad L, sic DI ad M. Tum quadrato M æquale fac rectangulum BNE, & quoniam quadratum M minus est quadrato DI, hoc est (quia ex angulo recto BDE ad basim ducta est normalis DI) rectangulo BIE, erit quoque BNE rectangulum minus rectangulo BIE. erigatur deinde ex puncto N normalis NO par rectæ M, iunganturq; BO, EO. Quo-



Quoniam igitur quadratũ NO æquatur quadrato M, hoc est rectangulo BNE, erunt BN, NO, NE tres continuæ. Angulus igitur BOE rectus est. Quare cùm triangula BOE, BDE super eadem basi BE vtraque sint rectangula, & vnius nempè BOE altitudo NO minor sit altitudine alterius DI, patet alterutrum E lateribus BO, OE maius esse alterius trianguli latere BD, quod idem est cum axe coni. sit latus BO maius axe BD: eritq; hoc nihilominus minus latere coni BE, siue BC. Quoniam igitur latus BO maius est axe BD, & minus latere BC; intra conum aptari poterit ex puncto B ad diametrum AC, recta AG æqualis lateri BO. factum sit, & ex G ad BG normalem duc GF & iunge BF. Quandoquidem anguli BOE, BGF recti sunt, quadrata BE, BF quadratis BO, OE; BG, GF æqualia sunt; sed quadrata BE, BF æquantur, æquantur igitur quadrata BO, OE; quadratis BG, GF. Cùm igitur quadrata BO, BG ob rectarum ex constructione æqualitatem, sint æqualia, reliqua etiam OE, GF æqualia erunt. æquantur igitur rectæ OE, GF; in triangulis ergo BOE, BGF singula singulis latera sunt æqualia. Ergo ipsa quoque triangula sunt æqualia. Atqui triangulum per axem BED ad triangulum BOE eandem habet rationem quam normalis DI ad normalem NO, hoc est quam DI ad M, hoc est quam K ad L: ergo triangulum per axem BED ad triangulum quoque BGF rationem eandem habet quam K ad L. Exhibuimus ergo triangulo per axem, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIV.

IN cono recto triangula non per axem ducta, quorum bases in eodem puncto se intersecant, habent perpendiculares ad bases è vertice ductas, in peripheria circuli cuius diameter est recta inter centrum basis conicæ & punctum intersectionis intericcta.



a 3. tertij.

Demonstratio.

IN cono recto ABC intersecent sese mutuo in E puncto quæuis bases FEG, IEK triangulorum non per axem FBG, IBK, & circa DE, inter centrum D & E punctum interiectum describe circulum DHLE: dico perpendiculares à vertice B ductas ad FEG, IEK, incidere in peripheriam DLE. iungantur enim BL, BH, DL, DH. erit angulus DLE in semicirculo rectus; vnde,[a] rectæ IL & LK æquales erunt; est autem recta BI æqualis BK; igitur etiam BL normalis est ad rectam IK. similiter ostendemus L normalē esse BH ad FG. ergo omnia triangula per E punctum & verticem ducta normales suas inuenient in perimetro circelli DLE. quod oportuit demonstrare.

Scholion.

CVm intersectionis punctum E *aut intra basim dari possit, aut in perimetro basis, aut extra basim, fit vt hic triplex casus oriatur. primus, quo circellus* DEH *totus base comprehenditur. secundus quo idem occurrit puncto perimetri* AIC *eundem contingendo: in quo casu quarta est pars circuli, qui fungitur basis vice coni* ABC*: tertius verò quo extra basim diffusus circulum baseos secat in duobus punctis; sed quia triplex hic casus diuersitatem nec in ipsa constructione, nec in demonstratione inducit, hinc silentio tam in propositione quàm demonstratione suppressus est.*

PROPOSITIO XV.

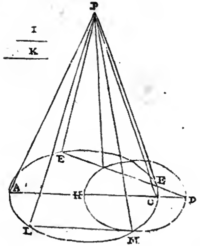
IN cono recto exhibere triangulum quod per apicem coni & punctum datum siue intra, siue extra coni basim transeat, habeat verò ad triangulum per axem datam rationem.

Constructio & demonstratio.

COnus esto ABC rectus, & per eius axem facto triangulo ABC detur punctum quoddam D. oporteat verò per punctum D, & verticem coni constituere triangulum EBF quod ad triangulum per axem ABC rationem habeat I ad K datam. Inueniatur per duodecimam triangulum LBM, quod habeat ad triangulum ABC rationem I ad K. Deinde ex D puncto ducatur DFE, sic vt FE sit

b 44. de circulis. æqualis ipsi LM. per ea quæ de circulorum[b] proprietatibus conscripsi: & secundùm EF & B, agatur planum, hoc ipsum exhibebit triangulum, postulatum BEF,

erit



erit enim EBF æquale triangulo BLM, cùm basis LM æqualis sit EF ex constructione, & lineæ EB, FB non solùm sint æquales inter se, sed etiam sint æquales rectis LB, BM. Igitur perfecimus quod imperatum fuit.

Scholion.

HActenus conati vtcunque sumus sectiones cani explicare qua per apicem transennt siue in recta, siue in scalena cano: quia verò apud antiquiares, maximè Archimodem, aliâ nomenclaturâ insignitas reperies reliquas coni sectiones, quarum explanationem sequentibus libris prosequi intendimus; hinc apera pretium iudieaui præmittere qua ad rem hanc pertinere videbuntur.

In duplici differentia conos esse posuimus, alios scilicet rectos, alios scalenos: antiqui verà eos in triplici differentia posuerunt. Quosdam dixerunt canos rectangulos, nannullos acutiangulos, alios denique abtusiangulos, denaminatione sumptâ ab angulis quas sectia per axes facta contineret ad verticem coni; vnde illis distinctio canorum rectorum & sealenorum ignota fuisse videtur, cùm scalenus conus, omnis generis angulos admittat ad verticem, variata solummodo, secundùm diuersas situs, sectione per axem. Rectangulum itaque conum dixerunt conum Isoscelium qui nullam admitteret. varietatem in triangulis per axem exsurgentibus, omnes alios angulos excludens prater rectum. Conum verò rectangulum priùs dispesecbant diuisione per axem, ortique inde trianguli latus alsa plano secabant ad angulos rectos quod insuper ipsi triangulo esset orthogonum; quam sectionem appellabant coni rectanguli, recentiores autem parabalam dicunt. Conum verà acutiangulum similiter Isascelium partiebantur bifariam per axem, ac primò quidem sectionem per axem coni instituebant; deinde triangulum ex sectiane per axem productum, alia secabant plano, quod tam plana quam lateri triangnli rectum esset, quo fiebat vt alteri quaque crurum accurrens, figuram alterius forma praferrent, & à parabala longe diuersam, qua scilicet tota clauderetur intercapedine linearum rectarum trianguli per axem: sectionē inde resultantem cani acutianguli dicebant Isoscelem, denique conum obtusiangulum, eadem praxi & per axem diuidebant, deinde plano ad vnum laterum, & ad ipsum triangulum recto per canum acta, figuram farmabant quam coni obtusianguli vocabant, qua in idem recidit cum hyperbola recentiorum. Hac igitur antiquorum ratio diuidendi canum, à recentioribus. maximè verà ab Apallonio, nonnihil est immutata: conus enim qualiscunque sit ex natura sua tale corpus est, ex quo singula harum sectionum erui possint; quoduis enim trian-

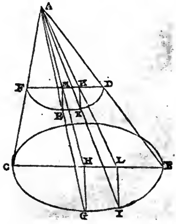
gulum per axem exhibitum trifariam diuidi poteſt à plano huic ad angulos rectos conſtituto; aut enim cammunis interſectio horum planorum, trianguli ſcilicet per axem, & plani orthogonaliter eidem inſiſtentis æquidiſtat vni laterum trianguli, & hoc ſitu parabolam gignit; aut vtrique occurrit intra trianguli latera producta, qua ratione emergit Ellipſis; aut vni laterum occurrit extra triangulum praducto, atque ita hyperbalam exhibet. has omnes ſectiones eaſdem eſſe cum illis quas antiqui ernebãt, horum librornm decurſu intelliges: non ita tamen vt quæcunqne ſectio à recentioribus facta exhiberi nata ſit in coni alicuius ſectione ab antiquis facta; nam antiqui vnam ſalam Ellipſeos ſpeciem proferre poterant vnamq́ ſpeciem Hyperbalæ in dato cono, ita vt ſi dinerſam reqnirerent Ellipſim aut hyperbolam, ad conum confugere deberent magis minúſve acutum aut obtuſum. Infinita autem varietates ariuntur in quouis cono ſecta iuxta methodnm recentiorum, prout cognoſcere poteris benigne Lector ſi ſequentia proſequaris.

Inſuper Recentiorum ratio ſecandi connm, perhibet circulum ſectione non facta ad baſim coni æquidiſtante; quem circulum antiqui ernere nequibant, quia hunc circnlum exhibere non valet conus rectns ſiue Iſoſcelius, quem antiqui ſolùm conſiderauere, ſed ſolummodò ex cono ſcaleno eruitnr, vti ſequentia docebunt.

Priuſquam huic diſcurſui finem imponam, verbulo inſinuandum mihi eſt cur axem coni determinent lineam à vertice coni ad circnli centrum demiſſam potiùs quàm ad cẽtrum Ellipſeos, cùm Ellipſis non minùs centrnm obtineat quàm circulus, & ſecnndum Ellipſeos perimetrum à pnncto in ſublimi poſito ſi circumagatur recta linea eandem prorſus conicam ſuperficiem deſcribat quam ſi ab eodem puncto circa circuli eiuſdem coni producti lineam circumduxeris. In promptn reſpanſum eſt, neque enim filia matrem præcedit, gignitur qnippe è cono Ellipſis. Inſuper circuli proprietates cùm ex elementis ſupponantur omnibus nota, inſeruiunt rectè & commode demonſtrationibus propoſitionum quæ ex cono eruuntur: Ellipſeos autem cùm accidentia ignata ſint, fruſtra ea adhiberetur ad theorematum aut problematum veritates manifeſtandas. potiſſima verò ratio mihi videtur, quod Ellipſes in cono aſſignari queant ſine numero inter ſe diuerſa ac proinde pro ſingulis deberet mutari axis coni: non enim ydem eſſe poſſunt axes è vertice coni ad circuli centrum, cum axibus ab eodem vertice ad centra Ellipſeon, varietas ergo hæc inimica doctrina ellipſin meritò excludit ne baſeos munere fungeretnr in cono, perfectior tamen videtur cono ſcaleno Rectus qui præter vnum axem alternm non admittit, vti conus ſcalenus, ex quo capite imperfectionem includit.

PROPOSITIO XVI.

IN cono quocunque omnis ſectio baſi parallela circulus eſt.



Demonſtratio.

DEtur conus ABC cuius baſis BGC, & ſectio EF æquidiſtans plano baſeos dico DEF eſſe circulum. ducantur enim AH per centrum & AL quæuis altera in plano trianguli per axem ABC. occurrentes rectæ DF in punctis M, N & HG, LI normaliter erigantur ad BC diametrum, & iunctis AG, AI occurrentibus ſectioni DEF in E & K, iungantur ME, NK: quoniam plana æquidiſtantia ſunt DEF, BGC, erunt a quoq; ME, HG, & NK, LI & MN, HL æquidiſtantes; eſt igitur

a 16. undecimi.

igitur M E, ad H G, vt A M ad A H, hoc est vt A N ad A L, hoc est vt M K ad L I. Itaque permutando M E est ad N K vt H G ad L I. adeoque & quadratum M E ad quadratum N K vt quadratum H G ad quadratum L I. sed quadrato H G æquale est B H C rectangulum, & L I similiter quadratum æquale rectangulo B L C. Igitur M E quadratum est ad N K quadratum vt B H C rectangulum, ad rectangulum B L C, est autem vt B H C rectangulum ad B L C rectangulum, ita rectangulum D M F ad D N F rectangulum, cùm ex ijsdem rationibus composita sint; igitur quadratum M E est ad N K quadratum, vt rectangulum D M F ad D N F, rectangulũ. Iam verò D M est ad B H, vt A M ad A H, hoc est vt M E ad H G. ergo permutando D M est ad M E, vt B H ad H G. sed B H, H G sunt æquales, ergo & D M, M E æquales sunt. Igitur quadratum D M, hoc est rectangulum D M F (nam cùm B C sit bisecta in H, erit & D F in M) æquatur quadrato M E. Quare cùm quadratum M E, vt suprà ostendimus, sit ad quadratum N K, vt rectangulum D M F, ad rectangulum D N F, etiam rectangulum D N F, æquabitur quadrato N K. Denique cùm D F, B C sint parallelæ itemque G H, E M, & vnà G H sit normalis ad vnam B C, erit altera E M normalis ad alteram D F; similiter ostendam K N normalem esse ad D F. Itaque cum normalium E M, K N quadrata æqualia sint rectangulis D M F, D N F, sectio D E, E F circulus est. Quod fuit demonstrandum.

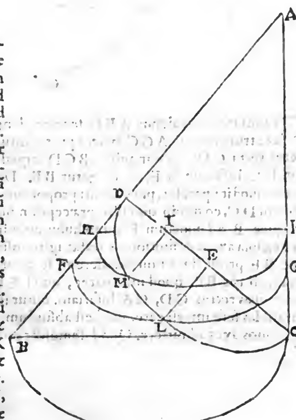
Corollarium.

Ex discursu demonstrationis liquet centrum circuli D E F esse in axis puncto E, in quo nimirum axis occurrit rectæ D F, quæ est communis sectio trianguli per axem & circuli D E F.

PROPOSITIO XVII.

In cono scaleno circulum exhibere qui basi æquidistans non sit.

Constructio & demonstratio.



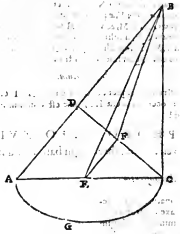
Scalenus conus ponatur A B C sectus plano per axem proferente triangulum A B C minimum illorum quæ per axem fieri possunt erit illud scalenũ, cùm omne scalenum sit quod per axem fit præter maximum per cor. 2. octauæ; angulus igitur A B C minor ponatur angulo A B C: quare fiat angulo A B C æqualis A C D & per rectã D C duc planum rectum ad triangulũ A B C: Dico sectionem inde natam D L C esse circulum. Ducantur enim duo alia plana basi parallela F L G, H M K, quorum communes sectiones cum plano D L C sint rectæ E L, I M. ex 7. huius patet basim coni ad minimũ triangulum A B C rectum esse. ergo & alia plana parallela F L H, H M K triangulo A B C recta erunt: sed & planum D L C triangulo rectum est. ergo communes sectiones L E, M I, rectæ sunt triangulo, adeoque & lineæ D C. Quoniam autem F L G, H M K, circuli sunt per præcedentem, & E L, I M normales D C, erit tam rectangulum F E G æquale quadrato E L, quàm rectangulum H I K, quadrato I M, quia verò similia sunt triangula D I H, & I K C, cum angulo A C D, sit ex constructione æqualis A B C hoc est D H I: erunt puncta H D K C in eodem circulo: similiter ostendam

ostendam puncta quoque F D, G C esse ad circulum: quare rectangula D I C, H I K æqualia sunt, uti & rectangula F E G, & D E C: ac proinde æqualia etiam quadratis I M & E L perpendicularium ad D C. Igitur puncta D M L C, circulus est cuius recta D C est diameter: igitur, &c.

PROPOSITIO XVIII.

OStendendum modò est in quouis cono scaleno duos axes esse.

Demonstratio.



COnus itaque scalenus A B C secetur plano per axem B E, quæ ex vertice B ad centrum circuli A G C baseos protenditur: triangulum productum A B C secetur recta C D, quæ angulum B C D æqualem exhibeat angulo B A C: & diuidatur D C bifariam in F, & iungatur B F. Dico illam esse axem secundum huius coni: quod ita patebit, præcedenti propositione ostensum est sectionem factam per rectam D C, eo modo quo illic præceptum fuit, circulum producere: igitur recta ex apice B ad punctum F quod huius circuli est demissa axis nomen obtinere debet ex ipsa axeos definitione; restat igitur ostendere B F E rectam non esse lineam, sine B F productam non incidere in E centrum basis, ac proinde B F axem esse alium ab axe B E. quod inde patet, quod E F recta sit æquidistans lineæ A B, cùm secet duas rectas C D, C A bifariam. Igitur si recta est linea E F B, sequetur duas parallelas sese intersecare, quod est absurdum. Constat igitur omnem conum scalenum duos axes admittere. Quod demonstrandum fuit.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI
LIBER QVARTVS
DE
ELLIPSI.

ARGVMENTVM.

Ellipsis proprietates illiusque naturam methodicè propositurì, rem totam in sex partes diuidere placuit. Ac prima quidem è cono sectionem educit, affectionesque illius essentiales, dein accidentales, reliquis necessarias & fundamentales.

Secunda ellipsim diuidit illiusque sectores & segmenta comparat.

Tertia, axium ac diametrorum coniugatarum tam æqualium quàm inæqualium ampliorem continet considerationem. Ac illarum primò quidem contemplatur potentiam: deinde lineas, quæ extrema diametrorum coniungunt.

Quarta sectionis polos eorumque passiones ac lineam breuissimam à puncto in axe dato ad peripheriam designat.

Quinta varias ellipsis geneses quæ tum ex lineis, tum è circulo, tum ex ipsa ellipsi oriuntur continet.

Sexta ellipsim cum circulo comparat, in qua hic etiam ordo tenetur, vt primò linearum proportiones ac potentiæ, secundò segmenta & ipsæ sectiones, dein figuræ vtriq; inscriptæ inter se conferantur.

Cæterùm propositiones nonnullæ huius libri ac sequentium duorum sunt Apollonij, sed viâ longè aliâ à me demonstratæ, paucis exceptis, quas nihilominus cæteris apponere visum fuit, ne quid hoc in opere quod ad conicam doctrinam pertineat, studiosus Geometriæ lector desideraret. Cætera omnia, quæ longè maximam atque præcipuam operis partem constituunt, à nobis & inuenta sunt & demonstrata. Quare si quis in recentium quorundam Geometrarum libris theoremata quædam reperiat quæ cum nostris conueniant, is velim intelligat, ea ab annis iam plurimis ac multò ante fuisse à me reperta, quàm authorum illorum libri in lucem prodierint. Quæ paucis lectorem meum docere volui, non vt cuiusquam inuentis detraham, sed vt plagij suspicionem à me remoueam.

DEFINITIONES.

I.

Diameter ellipseos est, recta linea intra ellipsim ducta, quæ omnes lineas, rectæ cuidam æquidistantes bifariam diuidit. & si quidem ad rectos illas secet angulos, axis dicetur: in quauis autem ellipsi binos esse axes, & quidem coniugatos (qui extremæ dicuntur diametri) hoc est qui mutuas parallelas bisecent ad angulos rectos, suo loco patebit.

I I.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur vnaquæque linearum æquidistantium, ac bifariam diuisarum.

I I I.

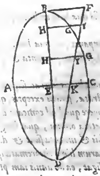
Centrum ellipseos est punctum quod diametrum bifariam diuidit. Quod autem lineæ in ellipsi per centrum ductæ bifariam secentur, propos. septimâ huius libri demonstrabimus.

I V.

Diametri coniugatæ dicuntur quæ mutuas parallelas bifariam secant.

V.

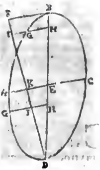
Latus rectum voco lineam, iuxta quam possunt ordinatim ad diametrum applicatæ. siue, latus rectum est mensura iuxta quam comparantur potentiæ linearum ordinatim ad diametrum positarum.



Res in exemplo erit clarior: sit A B C ellipseos diameter B D, illiusque latus rectum repræsentet F B: iunctisque F D, sumantur in diametro puncta quæuis H, ponanturque H G normales diametro B D, occurrentes F D in I: singula igitur quadrata ordinatim positarum æqualia erunt singulis rectangulis B H I, (vt propositione vndecimâ huius demonstrabimus) quæ deficiant à rectangulis F B H, rectangulo simili, ipsi F B D.

Atque

Atque ita quidem latus rectum tum Apollonius, tum cæteri illum hactenus secuti exposuere. Verùm mihi minimè videtur necessarium vt latus rectum diametro ad rectos applicetur angulos: & quadratorum ac rectangulorum loco possunt Rhombi ac Rhomboides inter se comparari, itaque ad veterem lateris recti acceptionem, nouam aliam adiicio eiusmodi. ad ellipseos diametrum sint ordinatim positæ quotuis rectæ GH: & quædam BF latus rectum, æquidistans ponatur ordinatim applicatis: singuli ordinatim positarum Rhombi HG in angulis IHB æquales erunt singulis IHB Rhomboidibus in iisdem angulis, qui deficiunt à Rhomboidibus FBH per Rhomboides similes Rhomboidi FBD. Demonstrationem huius vide propos. 12. huius libri.



Porro latus rectū eo ab antiquis consilio inuentum est, vt certi aliquid & noti haberent, per quod reliquas sectionum proprietates intelligere ac notas sibi reddere faciliùs possent: & vt in singulis coni sectionibus illæ planè diuersæ sunt, ita & latera recta diuersas in singulis obtinent passiones; & rectangula lateribus rectis ac diametrorum partibus inter verticem earundem & puncta quibus ab ordinatim positis secantur interceptis contenta longè diuersam in singulis, ad quadrata ordinatim positarum habent proportionem; in ellipsi quidem quadrata illa deficiunt figura simili illi quæ latere recto & transuerso continetur à rectangulis prædictis; in parabola iisdem æquantur; in hyperbola verò excedunt figura simili illi, &c. Vnde & nomenclaturam singulæ suam sortitæ sunt.

Cæterùm vti potentiæ ordinatim positarum ad diuersas diametros, diuersæ quoque sunt, ita & diametris singulis, proprium & vnicum latus rectum assignatur: quæ omnia, vti & lateris recti inuentionem, suis locis demonstrata inuenies.

V I.

Figura est rectangulum quod latere recto & transuerso (id est diametro, nam illa quoque transuersa vocari solet) continetur.

V I I.

Poli seu foci ellipseos, puncta sunt (quæ ex comparatione facta vocat Apollonius) in quibus axis diuisus rectangulum exhibet sub segmentis contentum æquale quartæ parti figuræ: de quo suo loco agendum.

V I I I.

Sectio subcontraria est quando conus plano per axem sectus triangulum producente, alio rursum secatur plano, quod abscindat (triangulo producto) triangulum simile quidem, sed ita positum vt anguli qui in vtroque triangulo sunt æquales ad diuersa sint latera.

ELLIPSIS

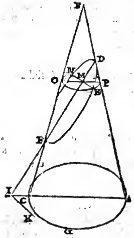
PARS PRIMA

Sectionem è cono educit, primasq; ac essentiales eiusdem exhibet proprietates.

PROPOSITIO PRIMA.

CONus rectus AGCB sectus sit plano per axem faciente triangulum ABC. Secetur alio deinde plano basi coni AGC non parallelo, cum vtroque trianguli latere conueniente in D & F: ex qua (sectione productâ) fit in cono figura DEFN, communis autem sectio illius plani secantis cum triangulo ABC sit DFI; eiusdem verò sectio communis cum plano in quo est coni basis AGC, sit recta IK, quam perpendicularem esse oportet ad AC diametrum basis coni, vel ad rectam quæ diametro AC in directum constituitur.

Dico figuram DEFN circulum non esse.



a 15. undecimi
16 prolegom.

c 34. de linea.

d 35. tertij.

Demonstratio.

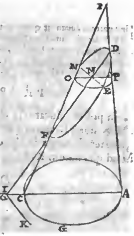
PEr punctum aliquod M rectæ DF ducatur NE parallela ad IK, in plano figuræ DEFN: & per idem illud punctum M ducatur in plano trianguli ABC recta OP parallela ad ACI, per lineas autem NE, OP agatur planum. Erit hoc a parallelum basi AGC, ac proinde b producet circulum OEPN, cuius diameter erit OP.

Quoniam igitur OP est parallela ad AC, triangula BOP, BCA similia sunt. sed BCA isosceles est, ergo & BOP isosceles est. Ergo c rectangulum FMD maius est rectangulo OMP; sed rectangulum OMP d æquale est rectangulo NME ergo rectangulum FMD maius est rectangulo NME patet igitur ex 35. tertij figuram DEFN circulum non esse. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

DAtus iam sit conus scalenus ABC, & planum secans quod producit in cono figuram DEFN, neque sit parallelum basi coni AGC, neque subcontrariè positum Cætera verò omnia ponantur & fiant eadem quę propositione prima.

Dico rursum figuram DEFN circulum non esse.



Demonstratio.

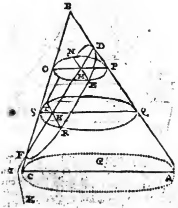
QVoniam OP est parallela ad AC eamque secat FD in M non subcontrariè, hoc est angulum BFD non constituens æqualem angulo BAC, patet ex 36. libri nostri primi rectangulum FMD inæquale esse rectangulo OMP. sed rectangulum OMP æquatur rectangulo NME. ergo rectangulum FMD rectangulo etiam NME inæquale est; liquet igitur ex 35. tertij figuram DEFN non esse circulum. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

DAtus sit conus quicunque siue rectus siue scalenus, & cætera ponantur & fiant eadem quę suprà:

Dico rectam NE à recta DF secari bifariam in M.

Demonstratio.



REcta PM ex hypothesi est parallela ad rectam AC, & ME parallela ad IK. Quare PM, EM angulos comprehendunt æquales; atqui angulus AIK ex hypothesi rectus est, communis enim sectio IK posita fuit perpendicularis ad ACI, propositione prima; ergo etiam PMB rectus est. Itaque cùm [a] sectio ONPE sit circulus, eiusque diameter OP, manifestum est [b] EMN, à diametro circuli OP, ad quam normalis est, bisecari in M. sed ex hypothesi punctum M tribus rectis OP, NE, DF communis est. ergo NE à DF, bisecatur in M. Quod erat demonstrandum.

[a] 16. prob. [b] 3. tertij.

 Corol-

Corollarium.

Hinc patet, si ducantur quotcunque rectæ ad IK siue NE parallelæ, omnes à DF bifariam diuidi: eadem enim est in omnibus demonstratio. Ex quo vlteriùs fit manifestum sectionis DEFN, (quam ellipsim deinceps nominabimus) diametrum [a] esse lineam DF, rectam verò NE [b] cæterasque huic parallelas ordinatim esse ad diametrum DF applicatas.

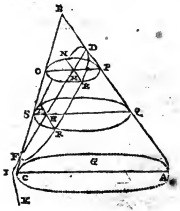
a Defin. 1. b Defin. 2.

PROPOSITIO IV.

Iisdem positis, ducatur in ellipsi DEFN linea quæuis RT, parallela ad EN siue IK, secans diametrum DF in puncto H.

Dico rectangulum DMF esse ad rectangulum DHF vt quadratum EM ad quadratum RH.

Demonstratio.



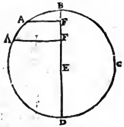
Per punctum H ducatur recta QHS parallela rectæ OP occurrens lateribus trianguli ABC in Q & S. tum per rectas QS, TR agatur planum, erit hoc [c] parallelum basi AGC ac [d] proinde sectionem producet circulum QRS, iam verò ratio rectanguli DMF ad rectangulum DHF componitur ex ratione DM ad DH, (hoc est, quia PM, QH sunt parallelæ ex const. ex ratione PM ad QH) & ex ratione MF ad HF (hoc est, quia MO, HS ex construct. sunt parallelæ, ex ratione MO ad HS.) Atqui ratio rectanguli PMO ad rectangulum QHS componitur etiam ex rationibus PM ad QH, & MO ad HS. ergo rectangulum DMF est ad rectangulum DHF vt rectangulum PMO ad rectangulum QHS; hoc est quoniam sectiones PEO, QRS circuli sunt, vt rectangulum EMN ad rectangulum RHT, hoc est, quia [e] EN, RT bisectæ sunt à diametro DF in M & H, vt quadratum EM ad quadratum RH. Quod erat demonstrandum.

c 15. vndecimi. d 16. prolegom. e 3. huius.

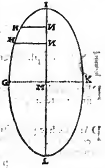
Scholion.

Scholion.

Exhibuimus prapasitiane hac praportionem rectangulorum que à segmentis diametri ellipseos constituuntur ad quadrata, ardinatim ad eandem diametrum applicatarum: qua quidem praprietas ellipseos est primaria, & essentialis: verùm quia hac ita ellipsi inest, vt etiam in circulo sua modo reperiatur, apera pretium facturum me existimaui, si differentiam, illum inter & ellipsim, breuiter in scemate apposita astendam.



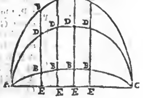
Esto circuli ABC diameter BD: centrum E: & narmales ad diametrum AF: sit autem & ellipsis HIK diameter quecunque IL, quam ardinatim secent HN: centrum verò sectionis M. Quoniam igitur in circulo, AF, recta sunt narmales ad diametrum BD, erunt rectangula BFD aqualia quadratis AF, proindeq; AF quadratum est ad quadratum AF vt BFD rectangulum ad rectangulum BFD: eadem moda cum HN recta in ellipsi ordinatim posita sint ad diametrum IL, erit HN quadratum ad quadratum HN, vt INL rectangulum ad rectangulum INL: illud igitur vtrique sectiani conuenit; eam esse proportionem inter quadrata ardinatim pasitarum, qua rectangulorum est, sub segmentis diametri ad quam ordinatim sunt posita: in hoc vero differunt, quod in circulo proportia rectangulorum sub segmentis diametri, ad quadrata ordinatim positarum sit aqualitatis; in ellipsi verà (si casum diametrorum coniugatarũ aqualium excipias, de qua plura suo loca) inaqualitatis, quod primâ & secundâ huius planum fecimus.



Ex quo sequitur primò: in ellipsi axem vnum altera maiorem esse. quad sic astendo: sit in HIK ellipsi axis aliquis IL quem ordinatim secent HN. agatur per M centrum recta GK aquidistans ipsi HN: dico illos axes esse inaquales: est enim vt INL rectangulum ad rectangulum IML sic quadratum HN ad quadratum GM. & permutando vt INL rectangulum ad quadratum HN sic IML rectangulum ad quadratum GM; sed rectangulum INL quadrato HN, a est inaquale; ergo & rectangulum IML, (hoc est a 1. & 2. huius.
quadratum IM) quadrato GM inaquale est: ergo recta IM recta GM est inaqualis, ergo tota IL, nempe axis, tota GK hoc est axi alteri, inaqualis est. Quod erat prapasitum.

Deinde si axes in ellipsi aquales essent, iam nan differret ellipsis a circulo: eo quad rectangula sub segmentis axeos, aqualia essent quadratis ordinatim positarum.

Sequitur secundò, si super axe AC ellipseas ABC, describatur semicirculus ADC, ducanturq; ordinatim linea BE accurrentes semicirculo in D: quod BE sit ad BE, vt DE est ad DE. est enim tam in ellipsi quàm in semicirculo, vt AEC rectangulum ad rectangulum AEC sic BC quadratum ad quadratum BE, & DE quadratum ad quadratum DE. vnde quoque est vt quadratum BE ad quadratum BE sic DE quadratum ad quadratum DE.

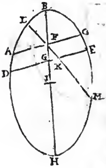


PRO-

PROPOSITIO V.

IN data ellipsi diametrum inuenire.

Constructio & demonstratio.



IN ea ellipsim ducantur parallelæ AC, DE, quas bifariam seca in punctis F, G; & per F ac G, ducatur recta BH.

Dico hanc esse diametrum.

Demonstratio est manifesta. si enim BH non est diameter, sit LFM, secans DE in K. Quoniam igitur LM ponitur esse diameter, & bisecat è parallelis vnam AC, in F, bisecat a alteram quoque DE in K. Quod fieri non potest cùm ex construct. DE bisecta sit G. Non igitur LM aut alia quęuis ducta per F est diameter præter eam, quæ etiam transit per G, hoc est præter ipsam BH. In data igitur ellipsi inuenimus diametrum, quod erat faciendum.

a defin. 1.

PROPOSITIO VI.

DAtæ ellipseos centrum reperire.

Constructio & demonstratio.

PEr præcedentem quære diametrum ellipseos BH, quam seca bifariam in I. Ex definitione tertia patet ellipseos centrum esse I.

Corollarium.

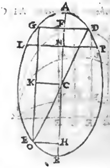
PAtet ex hac propositione omnem diametrum transire per centrum. Ex quo & conuersam facilè deduces, omnes nimirum lineas per centrum transeuntes esse diametros.

PROPOSITIO VII.

DAta sit ellipsis ADB, cuius diameter AB, recta verò LP, vna sit earum, quas propositione tertia huius demonstrauimus à diametro secari bifariam: centrum ellipseos sit C.

Dico omnes lineas per centrum ductas in centro diuidi bifariam.

Demonstratio.



DVcta sit enim quæcunque recta DO, per centrum C. ex D. ducantur DFG parallela ad LP, GE parallela ad AB, & EH, CK parallelæ ad GD, siue LP. Quoniam igitur FGEH parallelogrammum est, erunt GF, EH æquales: vnde & quadrata GF, EH æqualia sunt. Arqui b vt quadratum GF est ad quadratum EH, ita rectangulum AFB est ad rectangulum AHB, æquantur igitur rectangula AFB, AHB. ergo vt AF ad AH, sic BH ad BF: c ergo diuidendo vt AF ad FH, sic BH ad HF. æquantur igitur AF, BH. Quare cùm tota quoque diameter AB bisecta sit in C, vt patet d ex definitione centri, reliqua etiam FH, bisecta est in C. Quoniam igitur KC ipsis GD, EH est parallela, recta quoque GE bisecatur in K. est verò e & DG bisecta in F, vtpote ipsi LP parallela. Ergo est vt DG

b 4. huius.

c 14. sexti.

d definit. 3.

e 3. huius.

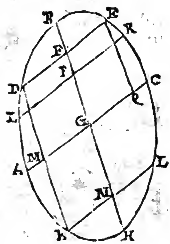
DG ad GF, hoc est vt DG ad CK, sic GE ad KE. ergo puncta DCE sunt in directum; sed etiam puncta DCO, sunt in directum, cùm ex hypothesi DCO sit linea recta. Vna igitur eademque recta sunt DCE, & DCO. Atqui DCE bisecta est in C, (cùm enim ex constr. GE, FC sint parallelæ, erit vt DF ad FG, sic DC ad CE.) Ergo etiam DCO bisecta est in C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

DAta sit ellipsis ABCH, cuius diameter sit BH; ordinatim verò ad diametrum applicata LPR: centrum ellipseos G. Ducta autem sit per centrum G, recta AGC ordinatim applicatæ parallela.

Dico BH, AC diametros esse coniugatas.

Demonstratio.



SVmatur in AG quoduis punctum M, per quod ducatur KD diametro BH parallela, occurrens ellipsi in punctis D & K; ex quibus ducantur DFE, KNL, ipsi LR parallelę. Quoniam igitur DK, NF parallelogrammum est, rectæ DF, KN, adeoque & quadrata DF, KN æquantur. Quare cùm [a] rectangulum BFH sit ad rectangulum BNH vt quadratum DF ad quadratum KN, rectangula BFH, BNH etiam sunt æqualia, ac proinde, vt ostensum in præcedenti, BF & NH æquantur. sunt verò & BG, HG æquales. Ergo & reliquę FG, NG æquales sunt, siue FN bisecta est in G. Ergo & KD parallela diametro BH bisecatur in M ab AC. similiter ostendam quasuis alias diametro BH parallelas bisecari ab AC. Quare cùm etiam [b] AB bisecet DE, LR ceterasque omnes quæ sunt ordinatim positæ ad BH. & parallelæ ex hypothesi ipsi AC; patet ex definitione [c] BH, AC diametros esse coniugatas.

a 4. huius.

b 3. huius.

c definit. 4.

Corollarium.

QVæ per centrum ad ellipseos axem datum perpendicularis ducitur, est axis dato axi coniugatus.

Ex discursu iam allato facile sibi lector demonstrationem huius rei eliciet.

PROPOSITIO IX.

DAta sit ellipsis eiusque diameter BH.

Oporteat diametro BH coniugatam diametrum exhibere.

Constructio & demonstratio.

DVcatur recta aliqua KD parallela ad BH, & vtraque DK, BH diuisâ bifariam in M & G, per M & G, ducatur AC.

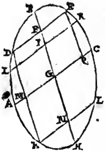
Dico AC, BH coniugatas esse diametros.

Ac primò quidem rectam AC esse diametrum patet ex 5. huius. & BH diameter est ex hypothesi; ambæ igitur sunt diametri. Quod autem sint coniugatæ sic ostendo. Quoniam AC diameter est & bisecat KD, erit [d] KD ad AC ordinatim applicata. ergo & reliquæ ipsi KD parallelæ, erunt ad AC, ordinatim applicatæ, hoc est [e] à diametro AC bifariam secabuntur. sed DK ex constructione cum sibi parallelis, parallela est ad diametrum BH. ergo diameter AC bisecat diametro BH parallelas. Ducantur deinde DE, parallela diametro AC & EQ, parallela rectæ DK.

d definit. 1.

e Ibid.

paral-



parallelogrammum igitur est MD Q, in quo quia FG ipsis DM, EQ ducta est parallela, erit DF ad FE, vt MG ad GQ, latera quoque parallelogrammi DM, EQ adeoque & quadrata BM, EQ, æqualia erunt. Iam verò quia DM, EQ, sunt ad diametrum AC, ordinatim positæ, ratio inter rectangula AMC, AQC erit eadem quæ inter quadrata DM, EQ, hoc est æqualitatis: ac proinde vt patet ex demõstratis in septima huius, æquales erunt AM, QC. Quare cùm [a] & totæ AG, CG æquales sint (est enim B centrum ellipseos; quia bisecat diametrum BH) etiam reliquæ MG, QC, æquales sunt. quoniam igitur est vt MG ad GQ, sic DF ad FE, etiam DF, FE æquantur, hoc est DE bisecta est in F. Ergo ex definit. [b] DE est ad diametrum BH ordinatim posita, ergo & reliquę ipsi parallelæ sunt ad BH ordinatim positæ, hoc est bisecantur à BH. Atqui DE ex constructione, cum sibi parallelis, est alteri diametro AC parallela. Ergo diameter BH bisecat parallelas diametro AC. Quare cùm etiam priùs ostenderim AC bisecare parallelas ad BH, erunt [c] BH, AB diametri coniugatæ. Factum igitur est quod petebatur.

a 6. huius.
b defin. 2.
c defin. 4.

Corollarium primum.

Dato ellipseos axi, axem coniugatum inuenies, si per centrum ellipseos duxeris rectam lineam dato axi perpendicularem. res patet ex corollario octauæ.

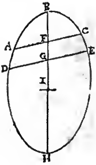
Corollarium secundum.

Ex hoc problemate fit manifestum qua ratione ex dato in ellipsi puncto D, ad diametrum BH, recta linea ordinatim debeat applicari. Inueniatur enim AC diameter coniugata diametro BH: & ex dato puncto D ducatur DFE ipsi AC parallela.

Dico DFE ordinatim esse positam ad diametrum BH. Demonstratio patet ex propositione.

PROPOSITIO X.

Ordinatim positarum (AC, DE, &c.) illa maior est quæ centro (I) vicinior.



Demonstratio.

Rectangulum BGH maius est rectangulo BFH, vt patet ex quinta secundi. Atqui quadratum EG est ad [d] quadratum CF vt rectangulum BGH ad rectangulum BFH. Ergo quadratum EG maius est quadrato CF. ergo & ordinatim posita EG maior est ordinatim positâ CF. Quod erat demonstrandum.

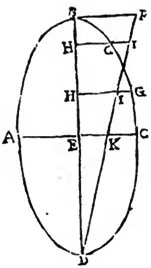
d 4. huius.

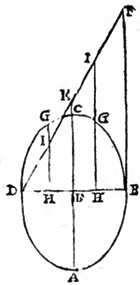
PROPOSITIO XI.

Esto ABC ellipsis axis BD. oportet illius latus rectum exhibere.

Con-

Constructio & demonstratio.





AXi BD per E centrum ducatur [a] coniugatus AC, fiantq; continuæ BD, AC, BF : dico FB esse latus rectum. æquidistet enim BF ipsi AC: ducanturque ordinatim lineæ GH quæ iunctæ FD occurrant in I: ipsa verò FD secet AC lineam in K. Quoniam EC, GH ordinatim positæ sunt ad axem BD, erit vt [b] quadratum GH ad quadratum EC, sic BHD rectangulum ad rectangulum BED: sed vt BHD rectangulum ad rectangulum BED, sic IHB rectangulum [c] est ad rectangulum KEB (quia ex ijsdem rationem habent compositam scilicet ex BH ad BE, & ex HD ad ED, hoc est HI ad EK.) igitur vt quadratum GH ad quadratum CE, sic IHB rectangulum est ad rectangulum KEB, & permutando inuertendo vt KEB rectangulum ad quadratum CE, sic IHB rectangulum est ad quadratum GH: sed cùm [d] AC quadratum sit æquale rectangulo super FB BD (cùm ex construct. BD, AC, BF sint tres continuæ) erit EC quadratum, (nimirum quarta pars quadrati AC est enim F, [e] AC bisecta in E) æquale rectangulo KEB quartæ parti rectanguli super FB BD. igitur & quadratum HG æquale est rectangulo IHB: ergo HG potest spatium quod adiacet ipsi FB latitudinem habens HB, deficiens ab FBH rectangulo, similis figuræ rectangulo, BFD: quare FB [f] latus rectum est. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

a coroll. 9. huius. b 4. huius. c 23. sexti. d 17. sexti. e 4. huius. f definit. 6.

Corollarium.

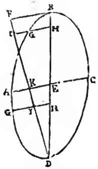
HInc sequitur primò quatuor lineas, nimirum latus rectum axis minoris, axem maiorem, axem minorem, & latus rectum axis maioris in continua esse analogia.

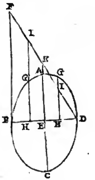
Sequitur secundò qui datis lateribus rectis axium, ellipsin exhibuerit, quod inter binas datas, duas medias inuenerit.

PROPOSITIO XII.

ESto ABC ellipsis diameter quæcunque BD, oportet illius latus rectum exhibere.

Constructio & demonstratio.



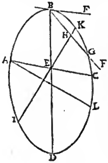


a 9. huius. DVcatur per E centrum diameter A C (a) coniugata ipsi B D, fiantque continuæ B D, A C, B F, ac B F quidem æquidistet diametro A C: ducaturque linea F D, quæ A C rectam secet in K, ducanturque ordinatim lineæ G H, quæ F D lineæ occurrant in I: Quoniam B D, A C, F B lineæ sunt continuæ, erit A C quadrato æquale rectangulum super F B, B D; igitur & quadrato A E (nimirum quartæ parti quadrati A C, est enim A C bisecta in E) æquale rectangulum super K E, E B, quarta pars rectanguli F B D: quare, vt in præcedenti ostendimus, ita etiam hic b 1. sexti. ostendemus H G quadrato æquale esse rectangulum I H H B. atqui Rhombus b I H in angulo I H B est ad Rhomboidem I H B in eodem angulo, vt quadratum I H ad rectangulum I H B, (rationes enim Rhombi ad Rhomboidem & quadrati ad rectangulum ex ijsdem rationibus componuntur nempe ex I H, ad I H & I H ad H B,) ergo cùm quadratum I H æquale sit rectangulo I H B, etiam Rhombus I H, Rhomboidi I H B æqualis erit; recta igitur I H potest Rhomboidem in angulo ordinatim applicatæ I H B. qui (quod demonstratu est facile) à Rhomboide F B H in eodem angulo, deficit Rhomboide simili ei qui in eodem angulo fit à diametro c defin. 7. D B & recta B F. igitur F B est latus c rectum. Quod petebatur.

PROPOSITIO XIII.

OMnis recta (B F,) quæ per terminum diametri (B D) ducitur ordinatim applicatæ (A C) æquidistans, ellipsim contingit.

Et quæ tangenti ducitur parallela, est ordinatim ad diametrũ applicata.



Demonstratio.

SI enim recta B F non contingat ellipsim, secet illam in G; diuisâque B G bifariam in H, agatur per H & E, K I occurrens vtrimque peripheriæ in I & K. Quoniam recta B G per constructionem æquidistat A C, vtramque autem bifariam secet recta I K d erit I K diameter & A C, B G lineæ ordinatim ad illam positæ; secat autem per constructionem recta A C ordinatim quoque diametrum B D, igitur vna eademque recta A C ordinatim secat duas diametros B D, I K. Quod fieri non potest; alias enim quę ipsi A C duceretur parallela, etiam ab vtraque diametro B D, K I ac proinde in duobus punctis bisecaretur; igitur patet F B lineam, sectionem

d patet ex 5 huius.

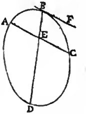
con-

contingere: quod erat primum. Quod si tangenti BF parallela ducatur quæuis AC, occurrens diametro in E; erit ordinatim ad diametrum posita. Si non ducatur ex A ordinatim AL: erit AL parallela contingenti BF. quare & ipsi AC æquidistat, quod fieri non potest, eùm eandem secet in A: igitur AL non est ordinatim posita nec quæuis alia præter AC, quod erat alterum. Patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO XIV.

PEr datum in peripheria punctum contingentem ducere.

Constructio & demonstratio.



ESto ABC ellipsis & punctum in peripheria datum B, oportet per B rectam ducere quę sectionem contingat in B. inueni [a] centrum, & per hoc ex dato puncto B duc diametrum BD, ad [b] quam ponatur ordinatim quæuis linea AC, cui per B agatur parallela BF. manifestum igitur est [c] BF esse tangentem; igitur per datum in peripheria punctum, &c. Quod erat faciendum.

a 6. huius.

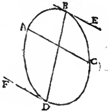
b 11. huius.

c 13. huius.

PROPOSITIO XV.

LIneæ quæ per extremitates diametri ductæ, ellipsim contingunt, inter se æquidistant.

Demonstratio.

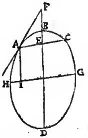


DVcatur enim quæuis AC ordinatim ad diametrũ: manifestum est ex 13. huius tam BC quàm DF lineas illi æquidistare, adeoque & inter se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

COntingentes ductæ per extremitates ordinatim positæ, conueniunt eum diametro extra sectionem.

Demonstratio.

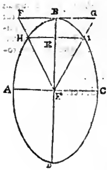


SIt ABC ellipsis diameter BD, & ordinatim posita AEC, agaturque per A tangens AF, dico illam eum diametro conuenire in F. Inuentâ enim HG [d] diametro coniugatâ ipsius BD, demittatur ex A linea AI æquidistans BD. quoniam igitur AI, BD æquidistant, & AF occurrat rectæ AI, patet productam quoque conuenire cum BD. Quod fuit demonstrandum.

d 13. huius.

PROPOSITIO XVII.

ELlipsim ABC cuius axis BD, contingat in B linea FG, sumptisq; in contingente æqualibus partibus FB, BG, demittantur ex F & G diametri duæ FE, GE occurrentes ellipsi in H & I. dico iunctam HI æquidistare ipsi FG.



Demonstratio.

a 4. huius.

POnatur HK parallela FG, quæ producta occurrat EG in I; erit itaque HK æqualis KI. Ergo, cùm rectangulum BKD ad BED, a eam habeat rationem, quam HK quadratum ad quadratum AE, erit quoque BKD rectangulum ad rectangulum BED, vt IK quadratum ad quadratum EC: vnde punctum I est ad ellipsim, & HI linea perimetrum BIC, & EG rectam in eodem puncto intersecat. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

EAdem manente figura, sint ABC ellipseos axes AC, BD, & HE diameter quæcunque, oportet ex E versus C diametrum educere, æqualem ipsi HE.

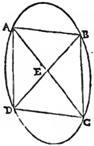
Constructio & demonstratio.

FIat angulo BEH æqualis angulus BEI, dico rectam EI satisfacere petitioni; productæ enim lineæ HE, EI, occurrant actæ per B contingenti in F & G. Iungantur puncta H, I. quoniam anguli BEH, BEI ponuntur æquales, sunt autem & EBF, EBG anguli recti, & BE linea communis, patet FBE, GBE triangula, adeoque & latera FB, BG inter se esse æqualia; vnde & HI b æquidistat FG, estque vt FE ad GE, sic HE ad IE, quare HE, IE lineæ æquales; igitur ex E diametrum eduximus, &c. Quod erat faciendum.

b per 17. huius.

PROPOSITIO XIX.

LIneæ in ellipsi coniungentes extrema quarumcunq; diametrorum inter se sunt æquales & parallelæ.



Demonstratio.

c 7. huius.

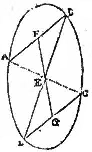
SEcent ABC ellipsim diametri duæ quæuis AC, BD. dico iunctas AB, CD, item AD, BC, esse inter se æquales & parallelas: cùm DB, AC bisectæ sint in E, erit vt DE ad EB, sic CE ad AE, & permutando vt DE ad CE, sic BE ad AE. sunt verò & anguli ad E æquales, similia igitur sunt triangula DEC, AEB; ergo vt DE ad EB, sic DC ad AB; quare cùm DE, EB æquentur, etiam AB, DC æquales erunt. similiter ostendemus AD, BC ęquales esse. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

LIneę quę ad extremitates diametri, intra sectionem ęquidistantes ponuntur, ęquales quoque erunt inter se.

Demon-

Demonstratio.



SEcet ABC ellipsim diameter quæcunque BD, ducanturque ex B & D, intra sectionem parallelæ AB, CD. dico illas inter se esse æquales. inuento centro E, & AB bisecta in F, iunge FE, & produc in G, & quoniam EF diameter bisecat AB, bisecat etiam DC ipsi AB, parallelam. Deinde quia similia sunt triangula FEB, DEG; erit DE ad DG, vt EB ad BF, & permutando vt DE ad EB, sic DG ad BF. sed DE, EB æquantur. ergo & BF, DG, quę sunt, vt iam ostendi, ipsarum AB, DC dimidię. Ergo & totę AB, DC æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

26 huius.

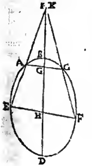
Corollarium.

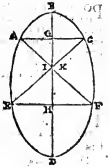
HInc sequitur iunctas AE, EC esse in directum: cùm enim latera AF, FE æqualia sint duobus lateribus CG, GE & anguli æqualibus lateribus contenti, æquales, patet AFE, CGE triangula esse inter se æqualia, & angulum AEF æqualem angulo CEG, adeoque AE, EC lineas in directum.

PROPOSITIO XXI.

LIneę per extremitates duarum parallelarum inęqualium in ellipsi ductę, conueniunt in eodem puncto cum diametro, ad quam ordinatim positæ sunt parallelę.

Demonstratio.





SEcent ECD ellipsim duę quęuis parallelæ inęquales AC, EF, ordinatim positam ad diametrum DB. dico iunctas EA, FC cum BD diametro quam secant ordinatim in eodem puncto conuenire. Quoniam ordinatim ponuntur lineæ AC, EF ad diametrum BD, ambæ bisecantur in G & H. vnde AG ad GC vt EH ad HF. & permutando vt AG ad EH, sic GC ad HF, concurrat iam EA cum diametro in I; altera verò FC in K. erit ergo vt IG ad IH, sic IA ad IE. sed etiam vt IG ad IH, sic KC ad KF, est enim KC ad KF, vt CG ad FH, hoc est, vt ante ostendi, vt AG ad EH, hoc est vt IG ad IH. ergo puncta I & K eadem sunt; ergo punctum I communis est intersectio rectarum EI, FI, HI. Quod erat demonstrandum.

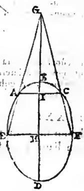
PRO-

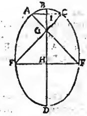
PROPOSITIO XXII.

SIt ABC ellipseos diameter BD ad quam ordinatim posita sit EF, ducanturque ex E & F lineæ occurrentes diametro in puncto G, ellipsi verò in A & C.

Dico iunctam AC, æquidistare EF.

Demonstratio.





POnatur AI parallela EF & producta occurrat FG lineæ in C. quoniam igitur EH æqualis est HF, erit & AI ipsi IC æqualis; sed quia AI æquidistat EF, erit BID rectangulum ad rectangulum BHD, vt AI quadratum ad quadratum EH. Ergo etiam, vt rectangulum BID ad rectangulum BHD, ita quadratum IC ad quadratum HF. vnde punctum C est ad ellipsim & communis intersectio rectarum FG, AI cum perimetro BCF; ac proinde AC iungens puncta A, C, æquidistat EF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

IN ellipsi ductæ sint parallelæ AC, EF, per quarum terminos ducantur EA, FC coeuntes in G. & per G ducta GIH bisecet parallelam AC.

Dico etiam alteram bisecari.

Demonstratio.

VT HG ad IG, sic EH ad AI, & vt HG ad IG, sic FH ad CI. ergo EH ad AI, vt HF ad IC. ergo permutando EH ad HF, vt AI ad IC. sed AI, IC æquantur. ergo & EH, HF æquantur, adeoque tam EF quàm AC sunt bisectæ. ergo GIH diameter est. quod erat demonstrandum.

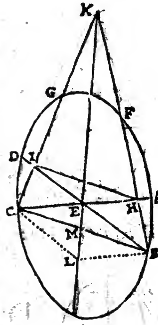
PRO-

PROPOSITIO XXIV.

SEcent ABC ellipsim diametri duæ AC, BD, iunctaque BC, agatur per E centrum diameter KL, secans BC bifariam in M, & ex B & C rectæ ducantur BF, CG, ad idem diametri punctum G secantes AC, BD lineas in H & I.

Dico rectangulum AHC esse ad rectangulum DIB vt quadratum AC ad quadratum DB.

Demonstratio.



POnatur ex C linea CL parallela BD, occurrens diametro KL in L, & iunge BL. quoniam CL æquidistat DE, erunt EMB, CML triangula inter se similia: quia verò CM, MB æquales sunt, æqualia quoq; erunt triangula CML, EMB & lateri EM, æquale latus LM; igitur in triangulis BML, CME, duo latera CM, ME, æqualia sunt duobus lateribus BM, ML. sed & anguli ijs contenti BML, EMC æquantur. Ergo ad bases anguli LBM, ECB æquantur. ergo BL, CEA sunt parallelæ. Ergo BH ad HK, vt LE ad EK, hoc est (quoniam ex constructione BI, CL sunt parallelæ) vt CI ad IK. Ergo IH æquidistat CB, & est vt HE ad EC, sic IE ad EB, & componendo ac permutando vt EC ad EB, sic HC ad BI, sed vt CE ad BE, sic AC est ad BD, cùm vtraque in centro [a] diuisa sit bifariam; igitur vt AC ad BD, sic HC ad BI. ergo etiam [b] vt AC ad DB, sic AH ad DI. Quare cùm rectangulum AHC ad rectangulum DIB rationem habeat compositam ex laterum rationibus AH, ad DI, & HC ad BI, quæ ambæ ostensæ sunt eædem esse cum ratione AC ad BD, erit rectangulorum ratio duplicata rationis AC ad BD, hoc est eadem quæ quadratorum AC, BD. Quod erat demonstrandum.

[a] 7. huius.
[b] 19. quinti.

PROPOSITIO XXV.

DVæ lineæ CG, BF intra ellipsim ductę occurrant diametro ellipseos MK in eodem puncto K. Ductæ sint deinde binæ aliæ diametri BD, CA quæ ita secentur à rectis CG, BF vt rectangula BID, CHA quadratis BD, AC proportionalia sint.

Dico iunctas IH, CB esse parallelas.

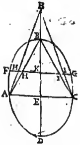
Demonstratio.

QVoniam est vt quadratum BD ad quadratum CA, hoc est vt quadratum ED ad quadratum EA, sic rectangulum BID ad rectangulum CHA; erit permutando vt quadratum ED, (hoc est rectangulum BID cum quadrato EI) ad rectangulum BID vt quadratum EA (hoc est rectangulum CHA cum quadrato EH) ad rectangulum CHA, ergo diuidendo, rectangulum BID est ad quadratū EI vt rectangulum CHA ad quadratū EH. Permutando igitur rectangulum BID est ad rectangulum CHA, vt quadratū EI ad quadratū EH. sed etiam est rectangulum BID ad rectangulum CHA vt quadratum BD ad quadratum CA, hoc est vt quadratum ED ad quadratum EA. Itaque quadratum EI est ad quadratū EH vt quadratum EH ad quadratum EA: adeoque recta EI ad rectam ED, hoc est EB, vt recta EH ad rectam EA hoc est EC, parallelæ sunt igitur IH, CB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVI.

Esto A B C ellipseos diameter B D, ad quam ordinatim posita sit recta A C: ductisq; ex A & C lineis quę diametrum in eodem puncto B secent, ducatur F G parallela A C, occurrens A B, C B in H & I, diametro verò B D in K.

Dico F H, G I lineas esse æquales.



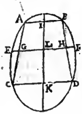
Demonstratio.

Quoniam F G æquidistat A C ordinatim positę ad B D, erit & F G, quoque ordinatim posita ad diametrum B D, adeoq; in K bifariam diuisa sed & H I in K diuisa est bifariam, vti A C in E, demptis igitur æqualibus H K, I K, reliquę F H, I G æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

Secent A B C ellipsim duę quęuis parallelæ A B, C D, iunctisque A C, B D, ducatur E F parallela A B, secans A C, B D lineas in G & H.

Dico E G, F H rectas esse ęquales.



Demonstratio.

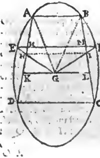
a 5. huius.

Diuisis A B, C D bifariam in I & K, agatur per I & K, linea I K; erit [a] illa diameter, & E F lineam, rectæ A B parallelam secabit bifariam in L. sed & H G in L secta est bifariam vt C D in K, vel A B in I, ablatis igitur ęqualibus G L, L H, manent E G, F H, reliquæ æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Secent A B C ellipsim duę quęuis parallelę A B, C D, iunctisque A D, B C ducatur E N M F parallela A B, & ex E & F, semidiametri ponantur E G, F G, quę A D, B C lineas secent in H & I.

Dico E G, F G in H & I proportionaliter esse diuisas.



Demonstratio.

b 17. huius.

Dvcatur per G, K L æquidistans A B, occurrens A D, B C, in K & L. Quoniam E F, K L æquidistant, erit vt E N ad K G, sic E H ad H G; & F I ad I G, vt F M ad L G; sed vt E N ad K G, sic F M est ad L G, (cùm E N, F M item [b] K G, L G, æquales sint,) igitur vt E H ad H G, sic F I ad I G. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

Hinc patet iunctam H I æquidistare D C, adeoque lineas A D, B C, in H & I proportionaliter esse diuisas.

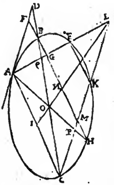
PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Ellipsim, cuius diameter B C centrum O, contingat A D occurrens diametro in D, ductâque ex puncto A ordinatim A O E, & iunctâ A C, per B ponatur recta F B G parallela rectæ A C.

Dico F B, B G æquales esse.

Demonstratio.



F G occurrat ellipsi in H, iunganturque H O, A O quæ [a] erunt in directum. Tum A C bisectâ in I, ducatur per I diameter I O L occurrens rectæ A E in L, & iungantur puncta L C, per rectam L C occurrentem ellipsi in K, & rectæ F H in M, rectæ verò H O in P.

Quoniam A C ex constructione ordinatim posita est ad diametrum I L, rectæque per A & C duplæ occurrunt diametro in eodem puncto L, erit [b] E K parallela A C. Est verò & B H parallela ipsi A C ex hypothesi: & semidiametri O B, O H secant A E, C K in Q & P, ergo Q P æquidistat [c] rectæ B H, tres igitur A C, Q P, E K sunt parallelæ. Quare cùm ex hypothesi A E bisecta sit in Q, erit & C K bisecta in P, ac proinde ordinatim posita ad diametrum A H. Itaque [d] C K æquidistat tangenti A D. est autem & F M ex hypothesi parallela ad A C, ergo [e] F M æqualis est A C, sed [f] etiam B H æqualis est A C. Igitur F M, B H æquales sunt. quare communi demptâ B M æquantur F B, H M. Atqui etiam [g] G B, H M æquales sunt. itaque F B, G B æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

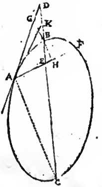
a 30. huius.
b 15. huius.
c 18. huius.
d 15. huius.
e 13. huius.
f 19. huius.
g 17. huius.

PROPOSITIO XXX.

Ellipsim A B C cuius diameter B C contingat in A recta A D conueniens cum diametro in D: ductâque ex A sit linea A F ordinatim ad diametrum B D.

Dico rectam D C in B & E diuisam esse extrema & media ratione proportionali, hoc est, vt C D est ad B D, sic C H est ad H B: & si diuisa fuerit in B & E extrema & media ratione proportionali agaturque per E ordinatim linea A F ad B C: dico iunctam A D, sectionem contingere.

Demonstratio.

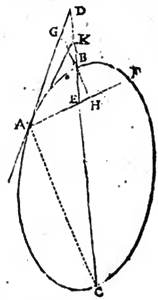


Iunctâ A C, agatur per B linea G H parallela rectæ A C occurrens A F lineæ in H & A D tangenti in G. Quoniam A C, B H lineæ æquidistant, erit vt A C ad B H, sic C E ad E B: sed vt A C ad B H, sic A C est ad G B, (quia G B, B H sunt [h] æquales) igitur vt A C ad G B, sic C E est ad B E: est autem vt A C ad G B, sic C D ad D B (quia G B, A C æquidistant) igitur vt C D ad D B, sic C E ad E B. Quod erat primum sit iam vt C D ad B D; sic C H ad H B; si per E ordinatim agatur A F: dico iunctam A D sectionem contingere in A. si enim A D non tangit, ponatur per A tangens quæ B D diametro occurrat in K, erit igitur vt C E ad E B, sic C K ad K B; sed est vt C E ad E B, sic C D ad D B, igitur vt C K ad K B, sic C D ad D B, & diuidendo vt C B ad B K, sic C B ad B D, quod fieri non potest, cùm punctum K supra vel infra D cadat. igitur A K non est tangens nec quæuis alia præter A D. Quod fuit demonstrandum.

h 15. huius.

Corollarium.

PRopositiones 29. & 30. etiam in circulo sunt veræ, quamuis autẽ sæpius contingat vt quæ hoc libro de ellipsi demonstramus locum etiam habeant in circulo, circuli tamen mentionem non facio nisi ad sequentes demonstrationes assumi debeat.



PROPOSITIO XXXI.

EAdem manente figurâ propositum sit à dato extra sectionem puncto D, tangentem ducere.

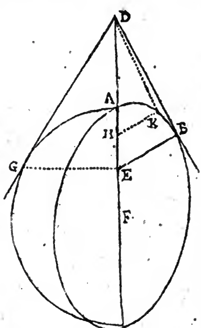
Constructio & demonstratio.

DVcatur ex D diameter DBC, fiatque vt CD ad DB, sic CE ad EB, & per E ad BC, ordinatim ponatur AF, iunganturque AD, patet per præcedentem AD lineam sectionem in A contingere; igitur à dato extra ellipsim puncto, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXXII.

ELlipsim ABC cuius diameter AC contingat recta BD in B, conueniens cum diametro in D: & ex B ducatur BE ordinatim ad diametrum AC: centrum autem sectionis sit F.

Dico FE, FA, FD lineas esse in continua ratione: & si FE, FA, FD fuerint continuæ proportionales, & per E ordinatim recta agatur EB, dico iunctam BD sectionem contingere. Est Apollonij.



Demonstratio.

CEntro F interuallo FA circulus describatur AGC, tum ex E puncto normalis educatur ad diametrum AC occurrens circulo in G: ducaturque recta GD. quoniam EB recta ponitur ordinatim ad diametrum AC, & per B acta tangens conuenit cum eadem diametro in D, erit [a] vt CD ad DA sic CE ad EA: est autem in circulo, recta EG normalis ad diametrum EG, igitur & [b] recta GD circulum contingit in G. quare in circulo [c] erunt FE, FA, FD lineæ continuæ proportionales: sunt autem eædem lineæ communes ellipsi, igitur & in ellipsi erunt FE, FA, FD in cõtinua analogia. Quod si FE, FA, FD continuæ proportionales sint, & per E ducatur ordinatim EB, dico iunctam BD ellipsim contingere in B. sin verò: ducatur ex D recta DK contingens ellipsim in K, & ex K ordinatim ponatur KH; igitur per primam partem huius FH ad FA, vt FA ad FD. sed etiam ex hypothesi, FE est ad FA, vt FA ad FD. ergo FE est ad FA, vt FH est ad FA, quod fieri non potest, cùm FH sit maior aut minor quàm FE. vnde DK non est contingens, sed DB. Quod fuit demonstrandum.

a 30. huius.

b 31. de circulo vel per coroll. 30. huius.

c 28. de circulo vel per coroll. 30. huius.

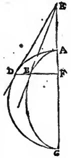
PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

ESto A B C ellipſeos axis A C, ſuper quo vt diametro ſemicirculus deſcribatur A D C, aſſumptoq; in axe puncto F quod non ſit centrum, erigatur ex F orthogona F D occurrens ellipſi in B.

Dico contingentes per B & D actas, axi A C in vno eodemque puncto occurrere.

Demonſtratio.



AGatur per B contingens B E, conueniens cum axe in E, iunganturque E D: quoniam F B ordinatim poſita eſt ad axem & B E ſectionem contingit, erit a C F ad F A, vt C E ad E A: vnde & iuncta E D circulum b continget: igitur contingentes per B & D actæ, conueniunt cum axe in vno eodemque puncto. Quod fuit demonſtrandum.

a 30. huius.

b de circulo vel per coroll. 30. huius.

Corollarium.

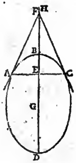
HInc facile etiam demonſtrabimus ſi duæ tangentes in eodem puncto diametro occurrant normalem F D, quæ ſi per vnum contactum D tranſeat, tranſire etiam per alterum.

PROPOSITIO XXXIV.

ESto A B C ellipſis diameter B D, ad quam ordinatim ponatur A C aganturq; per A & C contingentes.

Dico illas diametro in vno eodemq; puncto occurrere.

Demonſtratio.



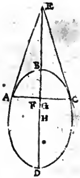
PEr 16. huius patet ſingulas contingentes per A & C ductas cum diametro conuenire: ſi igitur non conueniant in eodem puncto, occurrat A F contingens diametro in F, & C H in H: Quoniam tangens A F concurrit cum diametro in F, erit c vt D E ad E B, ſic D F ad F B. rurſum quoniam tangens C H concurrit cum diametro in H, erit vt D E ad E B, hoc eſt vt D F ad F B, ſic D H ad H B: & diuidendo vt D B ad B F, ſic D B ad B H, quod fieri non poteſt. quare tangentes non occurrunt diametro in diuerſis punctis. ergo in eodem. Quod erat demonſtrandum.

c 30. huius.

PROPOSITIO XXXV.

ESto A B C ellipſis, diameter B D producta vtcunque in E, & ex E demiſſæ E A, E C ſectionem contingant in A & C.

Dico iunctam A C, ordinatim eſſe poſitam ad diametrum B D.



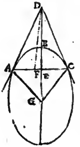
Demonstratio.

a 32. huius. b per eandē.

POnatur A F ordinatim ad B D sitque H centrum ellipseos; erit igitur [a] linea E H diuisa in B & F in tres continuè proportionales. demittatur quoque C G ordinatim ad B I [b] erit denuo E H diuisa in B, & G, in tres lineas in analogia continua; igitur F & G, puncta sunt eadem. quare recta A F C, est ordinatim posita ad diametrum B I. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

HInc sequitur si ellipsim A B C contingant in A & C, rectæ duæ A D, C D conuenientes in D; iunctàque A C, bifariam secetur in E, rectam D E transire per centrum siue iunctam D E esse diametrum sectionis, si enim E D non sit diameter, ducatur ex D diameter D F, occurrens A C lineæ in F. erit igitur per præcedentem A C linea in F, diuisa bifariam, adeoque punctum F, idem cum E. vnde D F recta eadem cum linea D E. quod est contra suppositum, quare D E sectionis est diameter. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO XXXVI.

SI ellipsim tangant binæ rectæ coeuntes in D, & ex centro ducantur G A, G C, G D.

Dico triangula G C D, G A D esse æqualia.

Demonstratio.

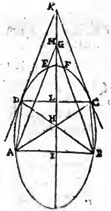
c 35. huius. PVncta contactuum iungantur recta A C. quoniam [c] A C bisecta est in E. triangula G A E, G E C, item D E C, D E A æqualia erunt : duo itaque triangula D E C, D E A, hoc est totum D C G, æquabuntur duobus triangulis D E A, E A G, hoc est toti G A D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

ELlipsim A B C secent A C, D B: diametri quæuis agantur per C & D tangentes, quæ per 34. huius conueniunt cum diametro H K in eodem puncto.

Dico lineas A G, B G ex A & B ductas, ipsis D K, C K æquidistantes, diametrum H K, in vno eodemque puncto intersecare.

Demon-



Demonstratio.

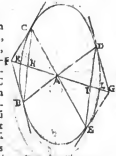
POnatur A E occurrere diametro in G: & B F in M; junganturque D C, A B, D A, C B. Quoniam D C iungit tangentes D K, C K, bisecatur a[a] diametro H K in L, est verò[b] A B parallela ad D C, ergo & hæc à diametro bisecatur in I. quare cũ totæ D C, A B sint[c] æquales, erunt & earum dimidiæ D L, A I æquales. cùm igitur etiam D L, A I, sint[d] parallelæ, quæ eas iungunt D A, I L parallelæ erunt. ergo figura A G K D parallelogrammum est, proindeque D A æqualis est G K. simili modo ostendemus B C æqualem esse M K. Quare cùm D A, B C, sint[e] æquales, etiam K G, K M æquales erunt, vnum igitur idemque punctum sunt G & M, in quo parallelę tangentibus D C, C K, ductæ è punctis A, B, occurrunt diametro. Quod fuit demonstrandum.

a 35. huius. b 19. huius. c Ibid. d Ibid. e Ibid.

PROPOSITIO XXXVIII.

ELlipsim cuius centrum A secent quæuis duæ diametri B D, C E, iunctisque B C, D E ponatur F G diameter, quæ B C bifariam diuidat in H, ipsi autem E D occurrat in I, tum per C & B, item D & E, contingentes agantur, quę[f] F G diametro occurrent in ijsdem punctis F & G. f 14. huius.

Dico æqualia esse inter se, primò triangula A C F, A B F, secundò triangula A C F, A D G, tertiò triangula C B F, D E G.



Demonstratio.

OCcurrat F G diameter ellipsi in K & L. Quoniam igitur B C ex hypothesi in H diuisa est bifariam, erit tam A C H triangulum æquale triangulo A H B, quàm H C F æquale triangulo H F B, vnde totum triangulum A C F, æquale est toti triangulo A F B, quod erat primum. Rursum cùm[g] B C, D E æquidistent & B C in H diuisa sit bifariam à diametro F G, erit & E D in I bifariam diuisa. quare cùm[h] totæ C B, D E sint æquales, erunt & harum dimidiæ K C, D I æquales; quare cũ[i] etiam sint parallelę, rectę C D, H I, quæ illas iungũt, sunt parallelæ; triangula igitur A C H, A D I sunt inter easdem parallelas. Sunt autem & bases A H, A I æquales (est enim A K æqualis A L, &[k] K H ipsi I L.) ergo triangulum A C H æquatur triangulo A D I. Iamverò A H, A K, A F, itemque A I, A L, A G sunt[l] continuę, quare ratio A H ad A F, duplicata est rationis A H ad A K; & ratio A I ad A G, duplicata rationis A I ad A L. Cùm igitur rationes A H, ad A K; A I ad A L, eædem sint (A H enim ipsi A I, & A K ipsi A L æquale est) erunt & rationes A H ad A F, A I ad A G, earundem rationum duplicatæ, eædem inter se: ac proinde[m] triangulum quoque A H C est ad triangulum A F C, vt triangulum A I D ad triangulum A G D. Quare cùm triangula A C H, A D I ostensa sint æqualia, etiam A F C, A G D æqualia erunt. quod erat alterum. Ex quo iam patet etiam F C H, G D I æqualia esse, quibus si addas F B H, G E I, quæ eodem planè discursu ostendemus æqualia, erunt tota triangula C B F, D E G, æqualia. Quod erat tertio loco demonstrandum.

g 19. huius. h Ibid. i Ibid. k 17. huius. l 32. huius. m 1. sexti.

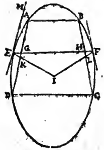
Corol-

Corollarium.

HInc patet quadrilatera CFBA, DGEA, ęqualia esse, eodem enim discursu probabimus ęqualia esse triangula ABF, AEG, quo probauimus æquari ACF, ADG.

PROPOSITIO XXXIX.

SEcent ABC ellipsim duę quęuis parallelæ AB, CD, iunctisque AD, CB, recta EM parallela ipsi AD, contingat sectionem in E, & ex E ducatur EF, æquidistans AB, secans AD, CB lineas in G & H. Dico contingentem per F ductam æquidistare ipsi BC.



Demonstratio.

DVcantur ex I centro lineæ IE, IF occurrentes AD, CB in K & L: quoniam igitur EM contingens, æquidistat AD & IF diameter ad contingentem ducta, secet AD lineam in K, erit [a] AD in K diuisa bifariam; est autem recta BC in L diuisa sicut AD in K, recta enim KL iungens puncta K, L parallela est [b] ipsis AB, DC. igitur & BC in L secta est bifariam à diametro IF; vnde & tangenti per F ductæ [c] æquidistat. Quod fuit demonstrandum.

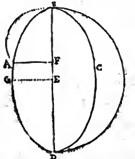
a Coroll. 13. huius.

b Coroll. 18. huius.

c 13. huius.

PROPOSITIO XL.

CIrculus super axe maiore vt diametro descriptus ellipsi exterius in duobus tantum punctis occurrit.



Demonstratio.

SIt ABC ellipseos axis maior BD, centroque illius E interuallo EB circulus describatur, dico illum ellipsi in duobus tantùm punctis B & D occurrere, occurrat enim si fieri possit insuper in puncto A, & per A ordinatim ad axem agatur AF, ducaturque axis minor GE. erit igitur vt BFD rectangulum ad quadratum FA sic BED rectangulum ad quadratum EG: sed BFD rectangulum in circulo est æquale quadrato FA: igitur & rectangulum BED, id est quadratum BE æquale est quadrato GE, quod fieri non potest cum BE linea maior sit quàm GE. igitur circulus ellipsi non occurrit in A: nec in alio quouis puncto, præter B & D. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

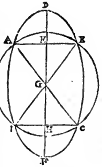
SImili discursu demonstrabimus circulum circa minorem ellipseos axem descriptum in duobus tantùm punctis extremis axeos ellipsi occurrere, & totum intra ellipsim existere.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Circulus centro ellipſeos deſcriptus, ſi ellipſim ſecat, in quatuor punctis ſecabit.

Demonſtratio.



Sit enim ellipſeos centro G deſcriptus circulus ſecãs ellipſim in B, ducatur axis F D, & recta B G I; tum ordinatim applicetur B K A occurrens ellipſi in A, ducantur item recta A G C, I C; in triangulis B K G, A K G, B K, A K, æquantur, & K G eſt communis, anguliq́ue ad K recti; ergo G B, G A ęquales. quare cùm punctum B ſit ad circulum, erit & punctum A. eſt autem idem punctum etiam ad ellipſim, ergo circulus ellipſim ſecat in A. Deinde A B, I C ſunt [a] parallelæ, adeoq; cùm angulus A K H rectus ſit, erit etiam rectus I H K; ac proinde I C ordinatim eſt poſita ad axem D F, ac biſecta in H. ſunt autem totę A B, I C [b] æquales, ergo A K, I H earum dimidiæ etiam ſunt ęquales. In triangulis igitur G K A, G H I, A K ipſi I H, & K G ipſi H G eſt æqualis, anguli verò A K G, I H G etiam æquales ſunt; ergo G A, G I æquantur, quare cùm punctum A ſit ad circulum, erit & punctum I. atqui etiam punctum I eſt ad ellipſim. ergo circulus ellipſim ſecat in I. ſimiliter oſtendemus circulum ellipſi occurrere in C. In quatuor igitur punctis ſecat. Quod erat demonſtrandum.

a 19. huius.

b ibid.

Corollarium.

Quod autem non ſecet ellipſim circulus in pluribus punctis quàm quatuor, facilè colligetur ex demonſtratione iam poſita.

ELLIPSIS

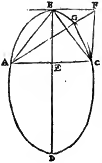
PARS SECVNDA

De sectoribus & segmentis Ellipseos.

PROPOSITIO XLII.

Sit ABC ellipseos diameter BD, ad quam ordinatim ponatur AEC; iunganturque ABC.

Dico ABC triangulum maximum esse illorum quæ segmento ABC inscribi possunt.



Demonstratio.

Acta per B contingente BF, ex A recta ducatur quæuis AF, occurrens ellipsi in G & contingenti in F. iunganturque GC, FC: Quoniam FG contingens cadit supra G, igitur triangulum AFC maius est triangulo AGC: sed AFC triangulo æquale est triangulum ABC ob AC, BF æquidistantes; igitur & ABC triangulum maius est triangulo AGC: vnde cùm idem de alijs omnibus triangulis ostendatur, patet ABC triangulum, maximum eorum esse quæ segmento ABC inscribi possunt. Quod erat demonstrandum.

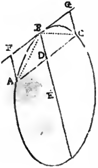
213. huius.

Corollarium.

Hinc facilis praxis elicitur ad inscribendum cuiuis segmento triangulum maximum: erigendo nimirum diametrum BD, iungendoque AB, BC puncta. demonstratio patet ex priori.

PROPOSITIO XLIII.

Triangulum maximum segmento cuiuis non maiori semiellipsi inscriptum, maius est dimidio eiusdem segmenti.



Demonstratio.

Esto ABC segmento, non maiori semiellipsi inscriptum triangulum maximum ABC. Dico illud maius esse dimidio segmenti ABC: ductâ enim diametro BE, quæ AC subtensam diuidat bifariam in D, erigãtur ex A & C lineæ AF, CG parallelæ diametro BE, quæ FG contingenti per B actæ occurrant in F & G, iunganturque AB, CB: triangulum ABC b dimidium est parallelogrammi AG. Atqui AG parallelogrammum maius est segmento ABC, cùm AF, CG, FG lineæ cadant extra ellipsim: igitur & triangulum ABC, maius est dimidio eiusdem segmenti. Quod fuit demonstrandum.

b 41. primi.

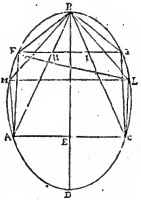
PRO-

PROPOSITIO XLIV.

Ellipsim ABC secet diameter BD, ad quam ordinatim posita sit AEC: iunctis AB, CB inscribatur segmento AFB triangulum maximũ AFB, & ex F ponatur FG parallela AC, iunganturq; BG, GC.

Dico BGC triangulum esse maximum eorum quæ segmento BGC inscribi possunt, & si triangula fuerint maxima, dico FG esse parallelam ad AC.

Demonstratio.



Quoniam [a] FH, GI lineæ sunt æquales, triangula FBH, GBL eandem habentia altitudinem, æqualia erunt. similiter triangula FAH, GIC inter parallelas EG, AC constituta erunt æqualia ac proinde æquabuntur tota triangula BFA, BGC: si igitur BGC non sit maximum, ponatur aliud BLC, maius triangulo BGC, & ex L ducatur LM æquidistans AC; erit igitur vt priùs triangulum BLC, æquale triangulo AMB, adeoque & AMB triangulum, maius triangulo BGC id est AFB, quod est contra suppositum, cũ BFA maximum ponatur; igitur BGC triangulum maximum est eorũ quæ segmento BGC inscribi possunt, quod erat primum. sint deinde triangula BFA, BGC maxima, demonstrabimus iunctam FG parallelam esse AC. si enim non est parallela, sit alia supra vel infra ipsam FG parallela ad AC, nimirum recta FL; iunganturque BL, CL. ergo per primam partem huius triangulum BLC erit maximum, quod fieri non potest cùm FGC ex hypothesi sit maximum. Non igitur FL, aut alia vlla præter FG est parallela ad AC. Quod erat secundo loco demonstrandum. [a] 16. huius.

Corollarium primum.

Hinc sequitur si triangula BFA, BGC maxima sint eorum quæ segmentis inscribi possunt, esse æqualia. Nam per secundam partem huius FG est parallela ad AC. Vnde [b] FH, GI æquales sunt, ac proinde triangula FBH, BIG, & FAK, GCI; adeoque & tota BFA, BGC æqualia sunt. [b] ibid.

Corollarium secundum.

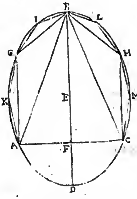
QVod si fuerint binæ A C,F G ad diametrum ordinatim positæ, iunganturque F A, C G, triangula quæ segmentis A F, C G inscribuntur maxima, inter se quoque æqualia esse, eodem planè discursu demonstrabimus, quo vsi sumus in propositione & corollario primo, nullo alio immutato, quàm quod loco 26. huius assumenda sit vigesima septima.

PROPOSITIO XLV.

SIt A B C ellipsis diameter quæcunque B D ad quam ordinatim po natur A F C.

Dico A G B F segmentum æquari segmento C H B F.

Demonstratio.



a 41. huius.
b 43. huius.
c 116. progressionis.

IVnctis A B, C B, inscribantur [a] segmentis reliquis triangula maxima A G B, C H B erunt illa per primum Coroll. præcedentis propositionis inter se æqualia & [b] maiora dimidio segmentorum A B G, C B H: dein & residuis vtrimque segmentis triangula inscribantur maxima A K G, G I B, C M H, B L H erunt vt prius triangula A K G, G I B partim per corollar. primum, partim per secundum æqualia triangulis C M H, B L H, & maiora dimidijs segmentorum: igitur cùm ea inscriptio semper possit continuari in vtroque segmento A G B, B H C, & vtrimque partes ablatæ sint inter se æquales, & maiores dimidio, segmentorũ à quibus anferuntur, constat [c] A G B segmentum æquale esse segmento C H B. Quare additis æqualibus triangulis A B F, C B F erunt tota segmenta A G B F, C H B F æqualia. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

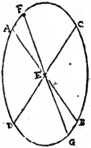
HInc sequitur à quâuis diametro ellipsim bifariam secari: sit enim diameter quæuis B D, & ducatur per quoduis illius punctum ordinatim A F C, per propositionem iam demonstratam segmentum A B F, segmento B C F, æquatur. rursum per eandem propositionẽ segmentum A D F, segmento C D F æquale est. ergo segmenta A B F, A D F, hoc est totum segmentum D A B, æquantur segmentis B C F, C D F, hoc est toti segmento D C B; bifariam igitur diuisa est ellipsis à diametro B D.

PROPOSITIO XLVI.

DIametri duæ coniugatæ ellipsim quadrifariam diuidunt, & diametri ellipsim quadrifariam diuidentes, sunt inter se coniugatæ.

Demon-

Demonſtratio.



SInt in ABC ellipſi diametri duæ coniugatæ AB, CD. dico illas ellipſim quadrifariam diuidere; & ſi AB, CD diametri ellipſim quadrifariam diuidant, dico illas eſſe coniugatas. Quoniam AB, CD diametri ſunt coniugatæ, erit AB ordinatim poſita ad diametrum DC, vnde a tam AEC, CEB quàm AED, BED ſectores ſunt æquales; ſunt autem & AEC, AED ſectores ob eandem rationem æquales; ſectores igitur quatuor AEC, CEB, BED, DEA, ſunt inter ſe æquales, & AB, CD lineæ quadrifariam diuidunt ellipſim: Quod erat primum. a 45. huius.

Sit iam ellipſis quadrifariam diuiſa, dico AB, CD diametros eſſe coniugatas. ſin verò ducatur ipſi CD, coniugata FG, igitur FEC, ſector quadrans ellipſeos eſt per priorem partem huius. Atqui ſector AEC ex hypotheſi etiam quarta ellipſeos pars eſt, ergo ſectores FEC, AEC æquales ſunt, pars & totum, quod fieri nequit; igitur FG diameter non eſt coniugata ipſius CD, nec quæuis alia præter AB. Quod erat demonſtrandum.

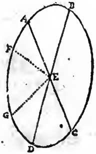
Corollarium.

HInc patet ſectores quarumcumque coniugatarum, æquales eſſe ſectoribus cuiuſcunque alterius coniugationis ſingulos ſingulis: ſinguli enim quadrantes ſunt ellipſeos, & ſi ſectores ſint æquales ac latera vnius ſint coniugatæ, alterius etiam latera eſſe coniugatas.

PROPOSITIO XLVII.

SEctores ad verticem oppoſiti ſunt inter ſe æquales.

Demonſtratio.

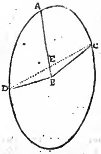


SEcent ABC ellipſim diametri quæcunque AC, BD. dico ſectores ad verticem oppoſitos eſſe inter ſe æquales. ducantur enim ex E centro diametri duæ EF, EG: & EF quidem coniugata ipſi EB: EG verò coniugata ipſi AE. Quoniam igitur ſectores BEF, AEG, b æquales ſunt, dempto communi AEF, erit ſector AEB, æqualis ſectori FEG: rurſum cùm ſectores FED, GEC c ſint æquales, dempto communi DEG, erit ſector DEC æqualis ſectori FEG, id eſt AEB ad verticem oppoſito. eodem modo oſtenduntur AED, BEC ſectores æquales. igitur, &c. Quod fuit demonſtrandum. b 46. huius. c Ibid.

PROPOSITIO XLVIII.

SIt in ADC ellipſi ſector quicunque ABC, oportet ex B rectam ad peripheriam ducere, quæ cum AB linea ſectorem conſtituat dato ABC æqualem.

Constructio & demonstratio.



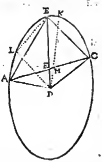
a 45 huius.

DVcatur ex C ordinatim ad diametrum A B, recta C E D, iungaturque B D. dico factum esse quod petitur. est enim segmentum A E D a æquale segmento A E C, & cùm æquales sint C E, E D, triangulum D E B æquale est triangulo C E B, igitur & sector A B D æqualis sectori A B C. eduximus igitur, &c. Quod fuit faciendum.

PROPOSITIO XLIX.

HAbeant A D B, C D B sectores æquales commune latus B D, iunganturque A B, C B. Dico segmenta lineis A B, C B ablata esse inter se æqualia, & si segmenta fuerint æqualia, dico & sectores æquari.

Demonstratio.



IVngantur A, C occurratque A C, linea diametro B D in E, tum si A C non sit diuisa bifariam in E: diuidatur bifariam in H, agaturque per H diameter D K. Quoniam A C, linea ordinatim ducta est ad diametrum D K, erunt A H K, C H K b segmenta æqualia. sunt autem & A H D, C H D triangula æqualia, sectores igitur A D K, C D K inter se æquales sunt, sed ex hypothesi quoque sectores A D B, C D B æquales sunt, igitur sector C D K, æqualis est sectori C D B pars toti. Quod absurdum. quare A H linea non diuiditur in H bifariam; nec in alio puncto quàm in E: adeoque igitur A C, linea posita est ordinatim ad diametrum B D. vnde A E B segmentum c est æquale segmento C E B. sunt autem A E B, C E B triangula æqualia, ergo reliquum segmentum A B, æquale est segmento C B quod erat primum.

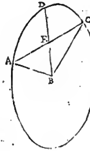
b Ibid.

c Ibid.

Sint iam A B, C B segmenta æqualia & ex A, B, C punctis diametri ponatur A D, B D, C D, dico sectores A D B, C D B, esse inter se æquales. sin verò; fiat C D B sectori æqualis sector d B D L, iunganturque puncta L B. erit igitur L B segmentum æquale segmento C B hoc est A B per hypothesin, adeoque pars æqualis toti. Quod fieri non potest. igitur sector B D L non est æqualis sectori C D B: nec alius quisquam præter A D B sectorem. Quod erat demonstrandum.

d 48 huius.

PROPOSITIO L.



SIt A B C sector quicunque.
Dico lineam ex centro ductam, quæ A C subtensam diuidit bifariam, sectorem quoque bifariam secare.

Demonstratio.

DVcatur ex B centro diameter B D, secans bifariam A C lineam in E: dico A B D, C B D sectores esse æquales: Cùm enim A C in E diuisa sit bifariam, erunt A B E, C B E triangula æqualia, sed, quia A C est ordinatim posita ad diametrum B D, etiam segmenta e A E D, C E D sunt æqualia, igitur totus sector A B D, sectori C B D æquale est. Quod erat demonstrandum.

e 45. huius.

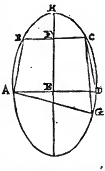
P R O-

PROPOSITIO LI.

ELlipsim ABC secent duæ quæuis parallelæ AD, BC, iunganturq; AB, CD.

Dico AB, CG segmenta esse æqualia, & si segmenta fuerint æqualia, dico BC, AD lineas æquidistare.

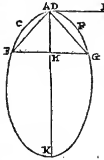
Demonstratio.



DIuisis AD, BC bifariam in F & E agatur per F & E linea FE, occurrens ellipsi in H, erit illa diameter, quare BFH, CFH segmenta a sunt æqualia, rursum quoniam AE, DE æquales sunt, & segmenta AHE, DHE æqualia erunt: ablatis igitur æqualibus segmentis BHF, CHF remanent segmenta AB, FE, DC, FE æqualia. Deinde quoniam AE, ED sunt æquales, & altitudo communis parallelarum BC, AD, erunt AEFB, DEFC trapezia æqualia, igitur ab æqualibus segmentis ABFE, DCFE, trapezijs, ablatis æqualibus, manent AB, CD reliqua segmenta inter se æqualia. Quod erat primum. a 45. huius.

Sint iam AB, CD segmenta æqualia, iunganturque BC, AD; dico AD, BC lineas æquidistare: sin verò, ducatur ipsi BC parallela AG, iunganturque CG: erit igitur per primam partem huius segmentum AB æquale segmento CG: sed & CD segmentum ex hypothesi æquale est segmento AB: segmenta igitur CD, CG sunt æqualia, quod fieri non potest, cùm punctum G cadat supra vel infra D, adeoque CG segmentum maius vel minus sit segmento CD: igitur AG linea non æquidistat ipsi BC, sed sola AD. Quod erat demonstrandum.

Quod si punctum datum D idem sit cum puncto A, ducatur AL tangens ellipsim in puncto A siue D, (sunt enim A & D iam ex hypothesi vnum idemque punctum) ductâque BG parallela ad AL iunge DG.



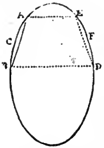
Dico hanc abscindere segmentum DFG æquale segmento ACB.

Ex contactu ducatur diameter AK: igitur BG quia tangenti æquidistat, est ordinatim b posita ad diametrum AK, adeoque bisecta in H, triangula igitur BAH, GAH æquantur; æquantur verò c & segmenta BCAH, GFAH. ergo reliqua etiam segmenta BCA, GFA siue GFB æquantur. Factum igitur est quod petebatur. b 13. huius. c 45. huius.

PROPOSITIO LII.

SEcet ellipsim recta quæuis AB: auferens ACB segmentum, & detur in peripheria punctum quoduis D, oportet ex D rectam ducere DE, quæ auferat segmentum DEF, æquale segmento ABC.

Con-



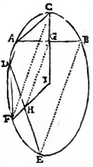
Constructio & demonstratio.

IVngantur B D, & ex A ponatur A E æquidistans B D, iunganturque E D. patet per præcedentem D E F segmentum æquale esse segmento A B C. Igitur ex puncto dato, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LIII.

SEcent A B C ellipsim duæ quæuis lineæ A B, D E segmenta auferentes æqualia: diuisis autem A B, D E rectis bifariam in G & H, ducantur per G & H diametri I G C, I H F.

Dico illas in G & H proportionaliter esse diuisas. Et si diametri sint proportionaliter diuisæ: dico segmenta esse æqualia.



Demonstratio.

IVngantur A D, B E, A C, D F, G H, C B, F E, C F. Quoniam A C B, D F E segmenta ponuntur æqualia, A D, E B lineæ [a] parallelæ sunt: est autem vt A G ad G B, sic D H ad H E, cùm A B, D E lineæ in G & H diuisæ sint bifariam, igitur & G H linea æquidistat A D, B E. Iam verò cùm A B sit ad diametrum I C ordinatim posita, erunt segmenta A G C, B G C [b] æqualia, adeoque segmentum A G C dimidium segmenti A C B. simili de causa segmentum D F H dimidium est segmenti D F E. Quare cùm tota segmenta A C B, D F E ponantur æqualia, erunt etiam segmenta A G C, D F H, eorum dimidia inter se æqualia. Deinde [c] triangula A C B, D F E maxima sunt eorum quæ segmentis inscribi possunt, & quoniam A D, B E ostensæ sunt parallelæ, etiam [d] inter se æqualia erunt: æquabuntur igitur & eorum dimidia triangula A G C, D F H: quæ si auferas à segmentis æqualibus A G C, D F H, remanent segmenta æqualia A C, D C, ergo C F linea [e] æquidistat rectæ A D hoc est G H: quare vt C G ad G I, sic F H ad H I. Quod erat demonstrandum. Hinc iam veritas conuersæ fit manifesta.

a 51. huius.
b 45. huius.
c 42. huius.
d Coroll. 2. 44. huius.
e 51. huius.

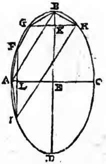
PROPOSITIO LIV.

SIt in A B C ellipsi quæuis diametrorum coniugatio A C, B D, iunctaque A B, ducatur quæuis F G parallela A B; & ex F & G, rectæ ponantur G H, F I ordinatim ad diametros B D, A C.

Dico A C, B D diametros in K & L proportionaliter esse diuisas.

Demon-

Demonſtratio.



IVngantur GB, BH, FA, AI, HI. Quoniam AB, GF lineæ æquidiſtant, erunt GB, a FA ſegmenta æqualia: ſed GB ſegmento eſt æquale ſegmentum HB. (nam ſegmentũ lineæ GKB æquatur ſegmento HKB, & triangulum GBK triangulo HBK) & FA ſegmento ob eandem cauſam æquatur ſegmentum AI; igitur & HB ſegmentum eſt æquale ſegmento AI, & HI æquidiſtat b lineæ AB, hoc eſt FG. quare totum ſegmentum GBH, ęquale eſt toti ſegmento FAI: adeoque per præcedentem AC, BD diametri in K & L ſimiliter ſunt diuiſæ. Quod erat demonſtrandum.

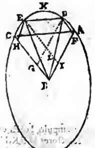
a 51. huius.
b 45. huius.
c 41. huius.
d 51. huius.

PROPOSITIO LV.

IN ellipſi data ſit quæcunque diametrorum coniugatio AB, CB, & iungatur AC, cui parallela ſit quæuis ED, ex punctis autem D, & E ducantur ordinatim ad diametros DF, EH, DG, EI, erunt igitur figuræ DFBG, EIBH parallelogramma.

Dico parallelogramma illa æqualia eſſe.

Demonſtratio.



QVia per præcedentem BA, BC proportionaliter ſunt diuiſæ, erit AB ad BF, vt CB ad BH: & permutando vt AB ad CB, ſic BF ad BH. ſimiliter AB per præcedentem eſt ad BI vt CB ad BG, & permutando vt AB ad CB, ſic BI ad BG. ergo BF eſt ad BH, vt BI ad BG. ergo e parallelogramma AG, HI æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

e 14. ſext.

PROPOSITIO LVI.

SInt AB, BC diametri coniugatę; iunctis punctis AC, ducatur ED parallela rectæ AC, tum ex D & E rectę ponantur EI, DF, DG, EH ordinatim ad diametros AB, CB, iunganturque EB, DB.

Dico EBD ſectorem, æquari figuræ EIFDKE.

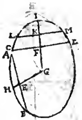
Demonſtratio.

PEr præcedentem parallelogramma FG, HI: & illorum dimidia, triangula DFB, EIB inter ſe ſunt æqualia; ablato igitur communi LIB, erit ELB triangulum æquale trapezio DFIL. quare addita figura communi ELDKE, ſector EBD æqualis eſt figuræ EIFDKE. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVII.

SEcent ABC ellipſim duæ quęuis lineę AB, CD, oportet CD lineę parallelam ducere, quę ſegmentum auferat æquale ſegmento AHB.

Constructio & demonstratio.



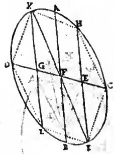
Diuisis AB, CD bifariam in E & F, agantur ex G centro per E & F diametri GH, GI; tum GI diuidatur in K, ficut HG diuifa eft in E, ponaturque per K ordinatim LM, patet per 53. huius LIM, AHB fegmenta effe æqualia; eft autem LM parallela datę CD, igitur dato in ellipfi fegmento, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LVIII.

Secent ABC ellipfim coniugatæ duæ diametri AB, CD. diuifaque CD illarum altera quadrifariam in EG, agantur per E & G rectæ HI, KL æquidiftantes diametro AB, iunganturq; puncta D, K, H, C, I, L, D.

Dico, LD, DK, KH, HC, CI, IL lineas fegmenta auferre æqualia.

Demonftratio.



Quoniam KL, HI, funt parallelæ rectæ AB, quæ eft diameter coniugata ipfi DC, erunt KL, HI ordinatim pofitæ ad DC. ergo vt rectangulum DGC, ad rectangulum DEC, ita quadratum KG, ad quadratum HE, adeoque cùm rectangula fint æqualia, etiam quadrata erunt æqualia, vnde & rectæ KG, HE æquales funt. funt verò & GF, EF æquales & anguli KGF, FEI (quòd HI, KL fint parallelæ) æquales funt: igitur KGF triangulum æquale eft triangulo FEI, angulufque IFE equalis angulo GFK. & quia GFE, linea recta eft, anguli IFE, KFG ad verticem conftituti funt æquales: vnde KFI, puncta funt in directum, adeoq; fectores KFD, CFI, funt ad verticem conftituti: quia autem oftendi triangulum KFG, æquari triangulo IFE, & fimili difcurfu oftendi poffit triangulum quoq; DKG æquari triangulo ICE, erit triangulum totum DKF, æquale toti triangulo ICF, Atqui & fectores DFK, IFC ad verticem pofiti [a] funt æquales. Igitur reliqua etiam fegmenta DK, IC inter fe æqualia erunt. eodē modo oftenduntur DL, HC fegmenta æqualia. Iterum cùm duo latera KG, GF fint duobus lateribus DG, GL æqualia, & anguli lateribus ęqualibus contenti ad verticē æquales; erunt triangula GKF, DGL inter fe æqualia, & angulus GKF æqualis angulo altero GLD; adeoque KFI, DL lineæ parallelæ. quare [b] DK, LI fegmenta funt inter fe æqualia: eft verò iam oftenfum fegmenta quoque CI, DK æqualia effe, æquantur igitur tria fegmenta DK, LI, CI. vlterius quia DC, LI iungunt equales & parallelas GL, FEI, ipfæ etiam erunt parallelæ; vnde rurfum [c] fegmenta CI, DL æqualia funt: æquantur igitur quatuor fegmenta DL, CI, LI, DK. Rurfum quia KH, LI, iungunt KL, HI æquales & parallelas, funt ipfę etiam parallelæ: erunt ergo æqualia etiam fegmenta KH, LI. æquantur igitur quinque fegmenta KH, LI, KD, DL, CI. Atqui etiam oftenfum eft æqualia effe fegmenta HC, DL; æquantur igitur omnia fex fegmenta. Quod fuerat demonftrandum.

[a] 47. huius. [b] 51. huius. [c] Ibid. [d] Ibid.

Vocetur autem figura DKHCIL, ellipfi infcripta, polygonum regulare.

PRO-

PROPOSITIO LIX.

EAdem manente figura propositum sit ellipsi hexagonum regulare inscribere.

Constructio & demonstratio.

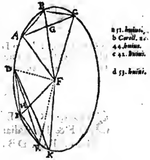
SVmantur duæ quæuis diametri coniugatæ AB, CD, diuisaque CD quadrifariam in E & G, agantur per E & G lineæ HI, KL æquidistantes AB: ducanturque DK, KH, HC, CI, IL, LD: patet per præcedentem: rectas illas segmenta auferre æqualia, adeoque figuram hexagonam DK, HC, ILD, esse regularem; igitur ellipsi hexagonum inscripsimus regulare. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LX.

SEcent ABC ellipsim duæ quæuis lineę AC, DE auferentes segmenta ęqualia, ducanturque ad illarum extremitates semidiametri FA, FC, FD, FE.

Dico sectores AFC, DFE, esse ęquales, & si sectores fuerint ęquales, dico segmenta esse æqualia.

Demonstratio.



DIuisis AC, DE bifariam in G & H agantur per G & H, diametri FB, FI, iunganturque AB, BC, DI, EI. quoniam segmenta AC, DE ex hypothesi sunt æqualia, ergo rectæ, quæ puncta C & E, A & D iungerent, forent a parallelæ. ergo b triangula segmentis AC, DE inscriptorum maxima, sunt æqualia, sed ABC, DIE, c sunt inscriptorum maxima. erunt igitur triangula ABC, DIE, æqualia: quia autem FB, FI diametri in G & H, sunt proportionaliter d diuisæ: igitur vt ABC triangulum est ad triangulũ AFC, sic DIE triangulum est ad triangulum DFE, & permutando vt ABC triangulum est ad triangulũ DIE, sic AFC triangulum est ad triangulum DFE. Cùm igitur triangula ABC, DIE æqualia sint, etiam triangula AFC, DFE æqualia erunt. Quare additis ęqualibus segmentis AC, DE, erunt sectores FAC, FDE æquales.

a 51. huius.
b Coroll. 2. 44. huius.
c 42. huius.
d 53. huius.

Sint iam sectores AFC, DFE æquales, iunganturque AC, DE. Dico ABC, DIE segmenta quoque esse æqualia; sin verò: sit alterutrum (puta) DIE minus altero, ducaturque e ex D linea DK, segmentum auferens æquale segmento ABC: & iungantur F, K. Quoniam igitur segmentum DIK æquale est segmento ABC, sector DFK, æqualis est sectori AFC, id est sectori DFE quod fieri non potest, segmenta ergo AC, DE non inæqualia sunt, sed æqualia. Quod erat demonstrandũ.

e 52. huius.

Corollarium.

EX hac & ex 53. huius sequitur primò, si AFC, DFE sectores quiuis fuerint æquales, eorumque subtensę in G & H diuisæ bifariam. quod diametri per G & H ductæ, iisdem punctis proportionaliter diuidantur.

Secundò si sectores duo AFC, DFE fuerint æquales, subtendanturque ipsorum anguli rectis AC, DE: quod triangula AFC, DFE sint ęqualia.

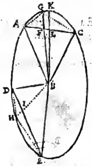
Tertiò hinc tale problema soluitur, dato AFB sectore quocunque, oportet ex F

a Ibid. duas educere semidiametros quæ sectorem constituant æqualem sectori AFB: pro constructione iuncta AB, ducatur ex F semidiameter quæcunque FD: tum a ex D recta ducatur DI segmentum auferens segmento AB æquale iungaturque IE, patet IFD sectorem æquari sectori AFB.

PROPOSITIO LXI.

SInt ABC, DBE sectores æquales: iunctisque AC, DE ducatur ex B quæuis linea BG secans AC lineam in F: dein sectori ABG fiat æqualis sector DBH secetque HB linea, rectam ED in I.

Dico tam AC, DE lineas quàm BG, HB in F & I proportionaliter esse diuisas.



Demonstratio.

IVngantur AG, GC, DH, HE. Quoniam ex hypothesi sectores tam ABG, DBH, quàm ABC, DBE sunt æquales, erunt & reliqui GBC, HBE æquales: quare AGB triangulum æquale triangulo DHB, & triangulum CGB æquale triangulo HEB, quare vt triangulum BAG ad triangulum GCB, sic BDH triangulum ad triangulum BHE, sed (quod facile ex 1.6. est demonstratu) rationes rectarum AF, FC, & DI, IE, eædem sunt cum rationibus triangulorum BAG, GCB, & BDH, BHE. Ergo etiam, AF est ad FC, vt DI ad IE. Deinde cùm trapezia GABC, BDHE æqualia sint (est enim c triangulum BAG, triangulo BDH, & triangulū BGC, triangulo BHE, æquale) sit autem & ACB triangulum d æquale triangulo DEB, erit reliquum triangulū AGC æquale reliquo DHE: igitur vt AGC triangulum ad triangulum ACB; id est e vt GF ad FB sic DHE triangulum ad triangulum DEB id est HI ad IB. Quod erat demonstrandum.

b Corol. 60. huius.

c Ibid.

d Ibid.

e Facile demonstrat. ex 1.6.

PROPOSITIO LXII.

SInt iam AC, DE lineæ in F & I proportionaliter diuisæ: aganturque per F & I semidiametri BG, BH.

Dico ABG, DBH sectores esse æquales.

Demonstratio.

SIn verò: sit alteruter vt ABG minor altero; fiat ABK sector æqualis sectori DBH, seceturque BK linea rectam AC in L; quoniam ABK, DBH sectores sunt æquales: erit per primam partem huius AL ad LC, vt DI ad IE. Atqui etiam AF est ad FC, vt DI ad IE, igitur vt AF ad FC, sic AL ad LC, quod fieri non potest: quia punctum L cadit vltra aut citra F, quare sector ABK non est æqualis sectori DBH nec alius quisquam præter ABG. Quod erat demonstrandum.

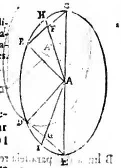
PRO-

PROPOSITIO LXIII.

Sint duę quæuis diametri A B, A C, iunctiſque illarum extremitatibus, ducantur duę quæuis aliæ diametri A D, A E ſic vt iunctâ D E, ſint A B C, A D E triangula æqualia: diuiſis autem B C, D E biſariam in F & G, agantur per F & G, diametri A H, A I: quę ſi in F & G, proportionaliter ſint diuiſę,

Dico B A C, D A E ſectores eſſe æquales.

Demonſtratio.



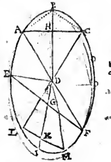
Quoniam A H, A I diametri in F & G proportionaliter ſunt diuiſę, erunt B H C, D I E ſegmenta [a] æqualia: ſunt autem ex hypotheſi triangula A B C, A D E æqualia; ſectores igitur B A C, D A E ſunt inter ſe æquales. Quod erat demonſtrandum. — a 53. huius.

PROPOSITIO LXIV.

Sint duo ſectores D A B C, D E I F, ductiſque rectis A C, L M, & biſectis in H & G, ducantur diametri D H B, D G I. Sit autem ratio D G ad D I minor ratione D H ad D B.

Dico ſectorem D E I F maiorem eſſe ſectore D A B C.

Constructio & demonſtratio.



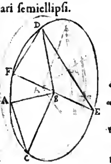
Quoniam D G eſt ad D I in minori proportione quàm D H ad D B. Fiat D K ad D I, vt D H ad D B: maior igitur erit D K quam D G, & punctum K cadet inter G ac I. per K ducatur ordinatim L K M, iunganturque D L, D M; ſegmenta igitur L I M, A B C [b] æqualia ſunt. Quare ſectores etiam [c] D L I M, D A B C ſunt æquales, ac proinde ſector D E I F maior eſt ſectore D A B C. Quod erat demonſtrandum. — b 57. huius. c 60. huius.

PROPOSITIO LXV.

Sint A B C, D B E ſectores duo inæquales, ſic vt A B C, D B E triangula ſint æqualia:

Dico A B C, D B E ſectores ſimul ſumptos æquari ſemiellipſi.

Demonſtratio.



Cvm ſectores ſint ex hypotheſi inæquales, ſit maior B D G E. quia ergo triangulum D B E ex hypotheſi æquatur triangulo B A C, erit [d] ſegmentum D G E maius ſegmento A C, abſcindatur [d] itaque E G ſegmentum ipſi A C æquale, iunganturque B G, G D, & E B producta in F ducatur F D. quia igitur ſegmenta G E, A C æqualia ſunt, [e] etiam ſectores æquales ſunt, adeoque & triangulum G E B, triangulo A C B, hoc eſt triangulo B D E [f] æquale erit. quare B E, D G ſunt parallelæ adeoque [g] ſegmentum G E, hoc eſt ſegmentum A C æquale eſt ſegmento D F; ſectores itaque B A C, B F D [g] æquantur. — d 51. huius. e 60. huius. f 51. huius. g 60. huius.

 Atqui

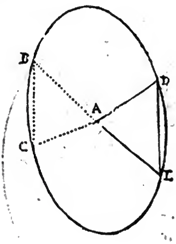
a Coroll. 45. huius.

Atqui sectores BFD, BDGE, [a] constituunt semiellipsim, ergo & sectores BCA, BDGE, semiellipsim constituunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVI.

SVmantur sectores duo BAC, DAE, sic vt triangula ABC, ADE sint æqualia: si sectores illi simul sumpti, maiores fuerint vel minores semiellipsi:

Dico illos inter se æquales esse.



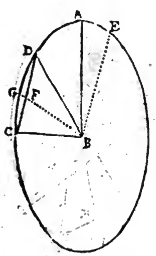
Demonstratio.

SI enim non sint æquales, sit BAC minor sectore DAE: cùm igitur triangula ABC, DAE sunt æqualia, erunt BAC, DAE sectores simul sumpti æquales semiellipsi: Quod est contra hypothesim. igitur sectores BAC, DAE non sunt inæquales sed æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVII.

SInt AB, BC diametri coniugatæ, ductaque ex C recta quauis CD, ducatur ex B linea BE parallela rectæ CD. iungaturque DB.

Dico DBC sectorem duplum esse sectoris ABE.



Demonstratio.

b Coroll. 46. huius.

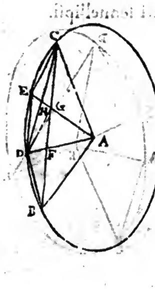
c 50. huius.

DIuisa CD bifariam in F, ducatur diameter BG, & quoniam BE æquidistat ordinatim positæ CD ad diametrum BG, ipsa etiam est posita ordinatim & quidem per centrum, sunt igitur coniugatæ diametri BG, BE. sunt autem ex hypothesi CB, BA etiam coniugatæ. Ergo [b] sector CBA par est sectori GBE, demptoque communi GBA, sectores CBG, ABE æquales erunt. Atqui sector CBD duplus est [c] sectoris CBG. ergo sector CBD duplus quoque est sectoris ABE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

SI sectores ABD, ADE, AEC sint æquales, ducanturque rectæ DE & BC, secans rectas AD, AE in F & G.

Dico BF, DE, EC esse æquales.



Demonstratio.

d Coroll. 62. huius.

e 60. huius.

f 51. huius.

DVcantur rectæ BD, EC, DC, DG. Quia sectores ADE, AEC sunt æquales, etiam triangula CHA, DHA [d] æqualia sunt. ergo æquales sunt rectæ DH, HC. Deinde quia sectores ADB, ACE æquales sunt, etiam segmenta [e] BD, EC sunt æqualia. Ergo CB, ED sunt [f] parallelæ. Anguli igitur GCH, EDH, æquantur: sunt verò anguli quoque GHC, DHE æquales

les, & iam ostendi æquales etiam esse rectas D H, H C; igitur a C G, E D, æquales sunt. similiter ostendemus B F, D E æquales esse. Constat ergo veritas propositionis. a 26. primi.

PROPOSITIO LXIX.

Iisdem positis producatur D G, donec A C lineæ occurrat in I. Dico A G I, A G C, A E C triangula in continua esse analogia.

Demonstratio.

EX superiori demonstratione, in triangulis C H G, E H D, patet omnia esse æqualia, adeoque latera etiam E H, H G sunt æqualia. considerentur modò triangula D H G, B H C, in quibus cùm duo latera D H, H E, duobus lateribus C H, H B æqualia sint, angulusque D H G æqualis angulo C H E, ad basim etiam æquales erunt anguli H G D, C E H. ac proinde D I, C E sunt parallelę: adeoque vt A I ad A C, sic A G ad A E. sed est vt A I ad A C, sic A G I triangulum ad triangulum A G C: & vt A G ad A E sic A G C triangulum ad triangulum A E C: igitur vt A G I triangulum ad triangulum A G C; sic A G C triangulum ad triangulum A E C. Quod erat demonstrandum.

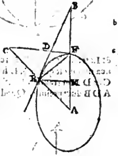
PROPOSITIO LXX.

ELlipsim secent binæ diametri A E, A F in punctis E & F, ex quibus ducantur F C, E B tangentes ellipsim, occurrentes diametris in C & B, junganturque E F.

Dico triangulum A C F triangulo A B E æquale esse.

Demonstratio.

EX puncto E ad A F duc ordinatim E K, erit hęc b tangenti F parallela, ideoque triangula A E K, A C F similia sunt, ac proinde duplicatam habent rationem rationis A K ad A F: hoc est quia c A K, A F, A B sunt tres continuè proportionales, rationem habent quam A K ad A B, sed etiam est vt A K ad A B, sic triangulum idem A E K ad triangulum A E B. ergo triangulum A E K ad triangula A C F, A E B eandem habet rationem; æquantur igitur triangula A C F, A E B: Quod erat demonstrandum. b 13. huius. c 32. huius.



E L-

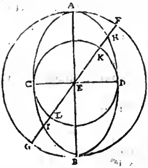
ELLIPSIS
PARS TERTIA

Considerat axium ac diametrorum coniugatarum tam æqualium quam inæqualium proprietates.

PROPOSITIO LXXI.

IN ellipsi diametrorum maxima & minima sunt axes.

Demonstratio.



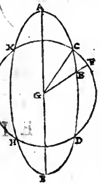
a 40. huius.

Sint A B C ellipseos axes A B, C D, & A B quidem maior, C D verò minor. dico A B, diametrorum esse maximam, C D verò minimam, centro ellipsis E: interuallo E A circulus describatur A F G: transilit is per B, & reliquo sui totus extra a ellipsim cadet: ducatur dein per E diameter quæcunque F G occurrens ellipsi in H & I. circulo autem in F & G. Quoniam circulus A F G totus cadit extra ellipsim, erit F G linea maior rectâ H I: igitur & A B maior est quàm H I. idem ostenditur de quauis aliâ diametro; igitur A B axis maximus est diametrorum ellipsis A B C. Quod erat primum.

Rursum centro E interuallo E D circulus describatur D K L occurrens F G lineæ in K & L. transilit is per C, & reliqua sui parte totus intra b sectionem cadet. igitur H I linea maior est quàm K L hoc est C D: Quare cùm idem de omni alia linea quæ per C & D non transit ostendatur, erit C D diameter omnium minima quæ in ellipsi A D B duci possunt. Quod erat demonstrandum.

b coroll. 40. huius.

Corollarium primum.



c coroll. 41. huius.

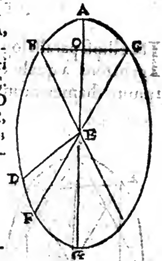
Diameter quæ maiori axi est propior, illa maior est; & quæ remotior, minor. sit A B C ellipseos axis A B, centrum G: ponaturque G C diameter propior axi quàm G E. dico G C maiorem esse ipsa G E. centro enim G interuallo G C circulus describatur, occurret is c ellipsi in quatuor tantùm punctis C K H D. quare G E ad peripheriam non pertingit. vnde minor est quàm G C. Quod erat demonstrandum.

Corollarium secundum.

POrrò diameter axi vicinior est, quæ cum axe minorem vel angulum facit vel sectorem. primum patet: alterum è primo sic ostendo. Ellipseos axis maior sit A G faciatque diameter B E cum axe sectorem

BEA

BEA minorem sectore DEG, quem cum axe facit diameter DE.



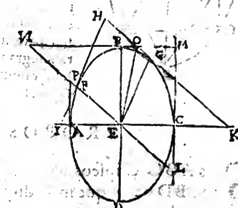
Quoniam igitur sector DEG maior est sectore BEA, fiat sector FEG æqualis sectori BEA; & FE occurrat ellipsi in C, ducaturque BOC, sector BEA æquatur sectori FEG ex constructione hoc est [a] sectori ad verticem AEC. Ergo [b] BC bisecta est in O ab axe AG. anguli ergo ad O recti sunt. patet ergo angulum BEA æquari angulo AEC, hoc est angulo FEG, hoc est minorem esse angulo DEG; liquet igitur ex primo BE quæ sectorem facit cum axe minorem, axi propiorem esse quàm DE, quæ maiorem.

a 19. huius.
b 6. huius.

PROPOSITIO LXXII.

Rectangulum sub dimidijs axibus æquale est parallelogrammo sub semidiametris coniugatis.

Demonstratio.



Sint ABC ellipsis axes AC, BD: centrum E, & quæuis semidiametri coniugatæ EF, EG. actisque per F & G tangentibus quæ conueniant in H, & axi AC occurrant in I & K: ducantur etiam per C & B lineæ quæ ellipsim contingant in C & B: conueniant autem in M: & HK, EF secent in O, L, N: tum iunctis punctis EO agatur per A tangens, secans EN lineam in P. Quoniam tam NO, KE [c] lineę quàm OK, NE sibi mutuo æquidistant; erit NOKE parallelogrammum, diametro OE diuisum bifariam: sunt autem triangula [d] EOB, EOG æqualia, igitur & reliqua triangula EBN, EGK inter se æquantur. Rursum cùm [e] AP, CL lineæ æquidistent, & AE, CE lineæ sint æquales, erit ECL triangulo æquale triangulum EAP hoc est [f] EIF. Quoniam igitur triangulum EGK æquatur triangulo EBN, & triangulũ IFE triangulo ECL, proportionalia erunt quatuor illa triangula; sunt verò etiam similia inter se, nimirum EGK ipsi IFE, & EBN ipsi ECL, ergo [g] rectæ KE, EI, NE, EL, proportionales sunt, quare cùm super proportionalibus indirectum positis constituta sunt triangula IFE, EGK, IHK inter se similia & triangula CLE, EBN, LMN inter se quoque similia, vt sunt duo triangula IFE, EGK ad duo triangula LEC, EBN, ita [h] triangulum EHK ad triangulum LHN. Atqui duo triangula IFE, EGK æquantur, vt ostendi supra, duobus LCE, EBN. ergo etiam triangulũ IHK triangulo LMN æquale est, ac proinde demptis æqualibus parallelogrammum GEPH sub semidiametris coniugatis, æquatur rectangulo BECH sub dimidijs axibus contento. Quod erat demonstrandum.

c 13. huius.
d 38. huius.
e 15. huius.
f 70. huius.
g 22. sexti.
h 60. de lineis.

Corollarium primum.

Hinc sequitur si in ellipsi duæ quæuis sint diametrorum coniugationes AE, EB, EF, EG. triangula super EA, EB, EF, EG in angulis AEB, FEG, esse inter se æqualia: sunt enim dimidia parallelogrammorum æqualium.

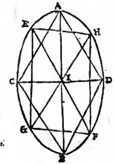
Corollarium secundum.

Sequitur secundò parallelogramma sub totis diametris coniugatis, inter se esse æqualia: cùm sint quadrupla eorum quę hac propositione ostensa sunt æqualia.

PROPOSITIO LXXIII.

IN ellipsi parallelogrammum quod fit à lineis extrema axium coniungentibus æquale est parallelogrammo contento lineis extrema quarumuis diametrorum coniugatarum coniungentibus.

Demonstratio.



Sint ABC ellipseos axes ABCD, & alia quæuis diametrorum coniugatio EFGH Iunganturque tam axium, quàm diametrorum extrema: dico CADB parallelogrammum æquari parallelogrammo EHFG, rectangulum ex AB & DI duplum est trianguli ADB: & rectangulum ex AB & CI, duplum est trianguli ACB. ergo rectangulum ex AB, CD, duplum est parallelogrammi ACBD, siue ACBD parallelogrammum, dimidium est rectanguli super AB, CD, similiter ostendam parallelogrammum EGFH dimidium esse parallelogrammi super EF, GH in angulo EIH: sed parallelogrammum super EF, GH, æquale est parallelogrammo super ABCD; igitur & ACBD parallelogrammum æquale est parallelogrammo EGFH. Quod fuit demonstrandum.

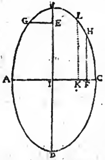
72. huius.

PROPOSITIO LXXIV.

SInt ABC ellipseos axes vel diametri coniugatæ, AC, BD. diuisaque BD vtcunque in E, diuidatur AC in F proportionaliter, & per E & F ordinatim ducantur lineæ EG, FH:

Dico rectangulum AFC æquari quadrato GE, & BED rectangulum quadrato HF, & si quadratum GE sit æquale rectangulo AFC. dico BD, AC proportionaliter esse diuisas in E & F.

Demonstratio.



CVm ex hypothesi DE sit ad EB vt AF ad FC, erit permutando DE ad AF, vt BE ad FC. quare & tota DB, ad totam AC, vt DE ad AF, & EB, ad FC. igitur rationes BE, ad FC, & DE ad AF, simul sumptę duplicatæ sunt rationis DB ad AC. Atqui ratio rectanguli BED ad rectangulum AFC, componitur ex rationibus BE ad FC, & DE ad AF. ergo ratio rectanguli BED ad rectangulum AFC duplicata est rationis BD ad AC, hoc est rationis BI ad AI. ergo rectangulum BED est ad rectangulum AFC, vt quadratum BI ad quadratum AI. sed idem quoque rectangulum BED est ad quadratum GE, vt rectangulũ BID, hoc est, quadratum BI, ad quadratum AI; æquantur igitur quadratum GE & rectangulum AFC. similiter ostendemus rectangulum BED & quadratum HF æqualia esse.

Sint iam æqualia quadratum GE & rectangulum AFC: dico BD, AC proportionaliter esse sectas: Nam si non est vt BE ad ED, sic AF ad FC, sit vt BE, ad ED, sic AK ad KC. Erit ergo quadratum GE æquale rectangulo AKC per primam

mam partem huius: Quod fieri non poteſt, cùm quadratum G E ex hypotheſi ſit æquale rectangulo A F C. Non igitur A C in K aut alibi quàm in F erit ſecta proportionaliter ad B D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXV.

SI axes aut diametri coniugatę ſint proportionaliter ſectæ in E & F, & ordinatim ducantur E G, F H.

Dico quadratum F H eſſe ad quadratum E G, vt quadratum B D, ad quadratum A C.

Demonſtratio.

QVadratum F H [a] æquatur rectangulo B E D, ſed rectangulum B E D eſt ad quadratum E G vt rectangulum B I D, hoc eſt quadratum B I, ad quadratum I A. ergo etiam quadratum F H eſt ad quadratum E G, vt quadratum B I ad quadratum I A, hoc eſt, vt quadratum B D ad quadratum A C. Quod erat demonſtrandum. [a 74. huius.]

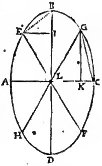
Quod ſi ad diametros coniugatas ordinatim poſitę ſint E G, F H, & ſit vt quadratum B D ad quadratum A C, ita quadratum F H ad quadratum E G: Dico B D, A C proportionaliter eſſe ſectas in E & F. ſi enim negas eſſe A F ad F C, vt D E ad E B, fiat A K ad K C, vt D E ad E B, & ſit ordinatim K L. ergo vt quadratum B D ad quadratum A C, ſic quadratum K L ad quadratum E G: quod fieri non poteſt, cùm ex hypotheſi quadratum F H ſit ad quadratum E G, vt quadratum B D ad quadratum A C. non igitur eſt vt quadratum B D ad quadratum A C, ita quadratum K L, aut quoduis aliud præter quadratum F H, ad quadratum E G. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXVI.

SInt in A B C ellipſi duæ quæuis diametrorum coniugationes A C, B D; E F, G H; ducanturque ex E & G lineæ E I, G K ordinatim ad diametros B D, A C.

Dico E I quadratum, æquari rectangulo A K C, & B I D, rectangulum æquale eſſe quadrato G K.

Demonſtratio.

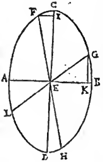


POnantur E B, G C. Quoniam igitur tàm A C, B D, quàm E F, G H diametri ſunt coniugatæ, erit [b] ſector B L C æqualis ſectori E L G, & dempto communi B L G, ſector E L B æqualis ſectori C L G. adeoque & L E B triangulum [c] æquale triangulo L G C: & quia B D eſt coniugata ipſi A C, erit B D parallela ad K G quæ eſt ordinatim poſita ad A C. ergo angulus G K L æqualis angulo B L A. ſimiliter quia A C eſt coniugata ipſi B D, erit A C parallela ipſi E I ordinatim poſitæ ad B D; angulus ergo E I B æqualis eſt angulo B L A, hoc eſt angulo G K L; igitur cum triangula ſint æqualia, erit (vt infra oſtendam) vt baſis L B ad baſim L C, ita K G ad E I, adeoque vt quadratum B L ad quadratum L C, hoc eſt vt quadratum B D, ad quadratum A C, ſic quadratum K G ad quadratum E I. vnde B D, A C lineæ in I & K [d] proportionaliter ſunt diuiſæ. quare E I quadratum [e] æquale rectangulo A K C, item B I D rectangulum æquale quadrato G K. Quod fuit demonſtrandum. [b Coroll. 46. huius.] [c Coroll. 60. huius.] [d 75. huius.] [e 74. huius.]

PROPOSITIO LXXVII.

AXium quadrata simul sumpta æqualia sunt quadratis cuiuscunque coniugationis simul sumptis.

Demonstratio.



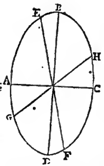
SInt ABC ellipseos axes AB, CD, & alia quæuis diametrorũ coniugatio FH, GL. dico AB, CD quadrata simul sumpta æquari quadratis FH, GL simul sumptis. ducantur ordinatim lineæ FI, GK quæ, quia ad axes ducuntur, perpendiculares erunt; centrum autem sectionis ponatur E. Quadratum EC[a] æquale est quadrato EI vnà cum CID rectangulo id est[b] quadrato GK: quadratum autem EB[c] æquale est quadrato EK vnà cum rectangulo AKB id est[d] quadrato FI: vnde quadrata duo EB, EC simul sumpta æqualia sunt quadratis FI, IE, EK, GK, simul sumptis. sed iisdem quadratis æqualia sunt quadrata FE, EG, quadratis igitur EF, EG æqualia sunt. quadrata EB, EC. quare cùm AB, CD quadrata simul sumpta[e] quadrupla sint quadratorum EB, EC & FH, GL quadrata quadrupla quadratorum EF, EG: patet AB, CD quadrata simul sumpta æquari quadratis FH, GL simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

a 5. secundi.
b 76. huius.
c 5. secundi.
d 76. huius.
e 4. secundi.

PROPOSITIO LXXVIII.

AXes ellipseos simul sumpti minimæ sunt omnium diametrorum coniugatarum simul sumptarum.

Demonstratio.



SInt axes AC, BD & quæuis diametrorum coniugatio, EF, GH: dico axes simul sumptos minores esse diametris coniugatis simul sumptis. Quoniam AC, BD quadrata simul sumpta, æqualia sunt quadratis EF, GH simul sumptis: sit autem & BD maxima diametrorum, AC verò minima, erunt[f] AC, BD simul sumptæ minores rectis EF, GH: igitur, &c. Quod fuit demonstrandum.

f Seren: l.2. prop.45.

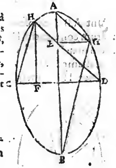
PROPOSITIO LXXIX.

SInt ABC ellipsis axes AB, CD, diuisi proportionaliter in E & F: ductisque ordinatim (quę hîc sunt perpendiculares) lineis EG, FH: iungantur AG, GB, CH, HD:

Dico quatuor quadrata AG, GB, CH, HD, simul sumpta, æquari duobus axium quadratis.

Demon-

Demonstratio.



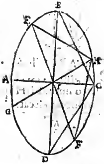
QVadratum AB æquale est [a] quadratis AE, EB vnà cum rectangulo AEB id est [b] quadrato HF bis sumpto; quadratum verò CD æquale est quadratis CF, FD, & CFD rectangulo id est quadrato EG bis sumpto, sed iisdem [c] quadratis æqualia sunt quadrata AG, GB, CH, HD, igitur axium quadrata simul sumpta æqualia sunt quadratis AG, GB, CH, HD. Quod erat demonstrandum.

a 4. secūdi. b 76. huius c 47 primi.

PROPOSITIO LXXX.

QVadrata linearum extrema axium coniungentium æqualia sunt quadratis linearum quæ extrema cuiusuis coniugationis coniungũt.

Demonstratio.



SInt ABC ellipseos axes AC, BD & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH. iunganturque BC, CD, EH, FH. dico quadrata BC, CD simul sumpta æquari quadratis EH, FH simul sumptis. quadrata BC, CD simul sumpta [d] æqualia sunt quadratis BI, IC bis sumptis; quadrata autem EH, HF æquantur quadratis EI, IH bis sumptis; sed quadrata EI, IH simul sumpta [e] sunt æqualia quadratis BI, IC simul sumptis; igitur quadrata BC, CD simul sumpta, æqualia sunt quadratis EH, HF simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

d 39. de li-neis.

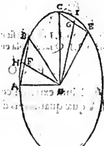
e 77. huius.

PROPOSITIO LXXXI.

SEcent ABC ellipsim, cuius centrum D duæ diametrorum coniugationes AD, DC, BD, DE, iunctisque punctis AB, CE diuidantur AB, CE lineæ bifariam in F & G, ducanturque DF, DG quæ productæ occurrant ellipsi in H & I.

Dico HD, ID diametros esse coniugatas.

Demonstratio.



QVoniam AD, DC, BD, DE, diametri sunt coniugatæ, erunt [f] ADC, BDE sectores æquales: ablato igitur communi BDC, erunt ADB; CDE reliqui æquales: rursum cùm AB lineam secet in F, bifariam diameter DH, erunt tam ADH, BDH [g] sectores; quã AFD, BFD triangula æqualia. eodem modo ostenditur EDI sector æqualis sectori CDI, sectores igitur ADH, EDI sunt æquales inter se: Addito igitur communi HDI, erit sector ADI æqualis sectori HDE, coniugatæ ergo [h] sunt DH, DI.

f Corol. 46. huius.

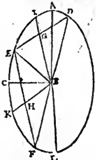
g 50. huius.

h Corol. 60 huius.

PROPOSITIO LXXXII.

Sint ABC ellipſeos axes AB, CD, ſit autem & alia quæuis diametrorum coniugatio, DF, EB; quas iungant DE, FE, DE quidem ſecans axem maiorem, EF verò minorem: ipſas deinde DE, FE bifariam ſecent diametri BGI, BHK.

Dico IB diametrum maiorem eſſe diametro KB.



Demonſtratio.

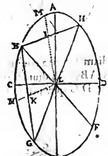
a 50. huius.
b 46. huius.
c Coroll. 2. 69. huius.

Quoniam diametri BI, BK biſecant rectas. ED, EF ſectores ambo a DBE, EBF biſecantur. Quare cùm b ipſi æquales ſint, etiam ipſorum ſectores dimidij IBD, KBF æquales erunt. ſector igitur IBD minor eſt ſectore KBL; ergo ſector IBA multò minor ſectore KBL. ergo IB c propior axi eſt quàm BK, ac proinde maior quàm BK. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIII.

Sint ABC ellipſeos axes AB, CD, & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH, iunganturque EH, EG.

Dico lineam EH quæ axem maiorem ſecat, minorem eſſe lineâ EG, quæ minorem ſecat.



Demonſtratio.

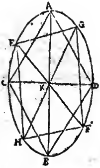
d 46. huius.
e 60. huius.
f 53. huius.
g 82. huius.
h 81. huius.

EH, EG diuidantur bifariam per diametros LM, LN, in I, & K. Quoniam GH, EF ſunt coniugatæ; d ſectores GLE, ELH æquales erunt, ac proinde e ſegmenta GNE, EMH æqualia ſunt. Quare LM, LN biſecantes ſubtenſas EH, EG, proportionaliter f ſunt diuiſæ. Ergo MI ad IL, vt NK ad KL: & cõponendo ac permutando vt LM ad LN, ſic LI ad LK. ſed LM g maior eſt quàm LN; ergo LI etiam maior quàm LK. Iam verò cùm LN, LM etiam h ſint coniugatæ, & EG ſit ordinatim ex conſtr. poſita ad LN, erit LM parallela ad EK. ob ſimilem cauſam LN, EI parallelæ erunt; parallelogrammum igitur eſt EI, LK, adeoque LI, KE, LK, EI, æquantur. Cùm ergo LI oſtenſa ſit maior eſſe quàm LK, erit & KE maior quàm LK, hoc eſt quàm EI. Quare dupla eius EG, maior duplâ EH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

Axium extrema coniungentes ſimul ſumptæ maximę ſunt omnium quæ quarumuis diametrorum coniugatarum conuertunt extrema.

Demonstratio.



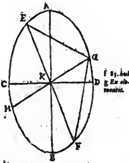
SInt axes AB, CD & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH : iunganturque extrema tam axium, quàm aliarum diametrorum. dico lineas CA, AD, DB, BC simul sumptas maiores esse lineis FG, GF, FH, HE simul sumptis. Quoniam CK ipsi HK æqualis est, EK verò communis, & EH ᵃ recta maior quàm EG, erit angulus EKH, maior angulo EKG: igitur & angulus EKH maior est recto AKC. sunt autem ᵇ AKC, EKH triangula æqualia, quare & EH ᶜ est maior quàm AC: eadem modo ostenditur AC linea maior esse recta EG. ergo EG minima est, & EH, maxima linearum EH, AC, AD, EG. igitur cùm ᵈ EH, EG quadrata simul sumpta sint æqualia quadratis AC, AD simul sumptis, erunt ᵉ EH, EG lineæ simul sumptæ minores lineis AC, CD simul sumptis. eodem modo ostenduntur lineæ GF, FH minores lineis CB, BD. ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 83. huius.
b sup. ex 73. huius
c Ex elem.
d 80. huius.
e Seren. l.1. prop. 43.

PROPOSITIO LXXXV.

IN nulla ellipsi est inuenire diametros coniugatas quæ sese ad rectos secent, præter axes.

Demonstratio.



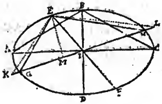
SInt axes, AB maior, CD minor & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: centrum autem ellipsis sit K. dico neutrum angulorum EKG, GKF rectum esse: iungantur enim puncta EG, GF: Quoniam EK, KG duabus rectis FK, KG æquales sunt, & EG ᶠ minor quàm FG, erit angulus EKG minor ᵍ angulo GKF: Quare cùm eorum summa sit duobus rectis æqualis, neuter illorũ rectus est: idem de alijs omnibus ostenditur: igitur in nulla ellipsi est inuenire, &c. Quod erat demonstrandum.

f 83. huius.
g Ex elementis.

PROPOSITIO LXXXVI.

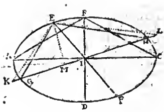
SInt ABC ellipsis axes AC, BD & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: iunctisque punctis AB, BG, rectæ ducantur EH, EG.

Dico angulum ABC qui circa minorem axem existit, maiorem esse angulo GEH, ac proinde maximum esse omnium angulorum qui continentur à lineis extrema diametrorum coniugatarum coniungentibus.



Demon-

Demonstratio.



a 73. huius.
b Ex elementis.
c Ex elementis.

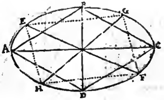
Cum GH linea minor sit axe AC, producatur vtrimque æqualiter in K & L vt LK, sit æqualis axi AC, iunganturque puncta EK, EL, & ex E demittatur EM normalis ad LK: erit igitur KEL triangulum maius triangulo GEH id est triangulo a ABC: quare cùm inæqualium triangulorũ bases AC, LK sint æquales, erit EM b altitudo trianguli KEL, maior IB altitudine trianguli ABC: adeoque c angulus KEL maior angulo ABC: angulus igitur GEH multò minor est angulo ABC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXVII.

Sint ABC ellipseos axes AC, BD: iunganturque illorum extrema AB, BC, CD, DA: sit autem & alia quæcunque diametrorum coniugatio EF, GH, quarum extrema quoque coniungantur.

Dico angulos ABC, EGF, HFG, BCD arithmeticè esse proportionales.

Demonstratio.



d 86. huius.

Quoniam tam AC quàm EF parallelogrammum est, erunt tam ABC, BCD anguli, quàm EGF, GFH duobus rectis æquales: quare & anguli ABC, BCD, simul sumpti æquantur angulis EGF, GFH simul sumptis: est autem angulus ABC, ostensus d maior angulo EGF, igitur & GFH maior est angulo BCD: & quia, vt iam ostendi, anguli B, & C simul sumpti æquantur angulis G, & F, simul sumptis quo excessu ABC angulus superat angulum EGF, eodem necesse est vt angulus GFH superet angulum BCD. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc patet angulum BCD qui circa axem maiorẽ existit, minimum esse omnium angulorum qui fiunt à lineis diametrorum coniugatarum extrema coniungentibus.

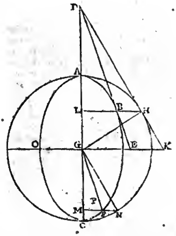
PROPOSITIO LXXXVIII.

Ellipsim ABC cuius axes AC, EG contingat in B recta quædam DE conueniens cum vtroque axe in D & E: ex centro verò G recta demittatur GF parallela lineæ DE.

Dico DB, GF, BE lineas esse in continua proportione.

Demon-

Demonstratio.



CEntro G, interuallo A G circulus describatur AHC: & ex D linea demittatur D K contingens circulum in A occurrens E G axi ellipseos in K, ductâque ex H linea H L normali ad axem quæ per Coroll. 33. huius transit etiam per B, agatur per F normalis alia FMN, iunganturque puncta N G, H G. Quoniam L H, M N lineæ æquidistant, erunt anguli L D B, M G F æquales: sunt autem & anguli B L D, F M G recti per constructionem igitur & reliquus L B D, reliquo M F G æqualis est, quare anguli D B H, G F N inter se æquantur. Quia autem triangula D L B, G M F sunt similia, erit vt L B ad M F, sic D B ad G F. sed ex demonstratis in scholio quartæ huius, vt L B ad M F, sic B H ad F N. ergo D B ad G F, vt B H ad F N. quare cùm anguli D B H, G F N iam ostensi sint æquales, [a] similia erunt triangula D B H, G F N. ergo H D est ad B D, hoc est H K est ad B E, vt G N ad G F. & permutando vt H K ad G N, sic B E ad G F. Deinde cùm in triangulo D G K angulus ad G rectus sit & G H ex centro ad contactum ducta, normalis ad D K, [b] erit H K ad G H, vt G H ad H D. sed G N, G H æquantur. ergo, vt K H ad G N, hoc est sicut ante ostendi, vt B E ad G F, sic G N ad D H. sed ob similitudinem triangulorum vt G N ad D H, sic G F ad D B. ergo, vt B E ad G F, sic G F ad D B. Quod erat demonstrandum.

[a] 6. sexti.
[b] 8. sexti.

PROPOSITIO LXXXIX.

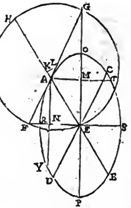
IIsdem positis si G F sit proportionalis media inter D B, B E. Dico punctum F esse ad ellipsim.

Demonstratio.

SI punctum F non est ad ellipsim, occurrat ergo ellipsis rectæ G F in P, supra vel infra F. Ergo per præcedentem D B, G P, B E sunt continuè proportionales; quod fieri non potest, cùm D B, G F, B E ponantur continuè. Non igitur aliud punctum rectæ G F ad ellipsim est, quàm F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XC.

DAta quauis diametrorum coniugatione, ellipseos axes reperire.



Constructio & demonstratio.

Sint datæ diametri coniugatæ A B, C D secantes se bifariam in E; actaque per A linea F G quę æquidistet C D, fiat vt A E ad E D, sic E D ad A H: tum E H diuisa bifariam in K, erigatur ex K normalis K L occurrens F G in L, dein centro L interuallo L E circulus describatur E F G, transibit hic per H secabitque F G lineam in punctis quibusdam F & G: iungantur demum puncta F F, E G. dico lineas E F, E G satisfacere petitioni. Quoniam enim rectæ A E, E D, A H sunt ex constructione in continua analogia, erit quadrato E D æquale rectangulum E A H, hoc est F A G rectangulum, itaque G A, D E, F A rectæ in continua etiam sunt analogia, ac [a] proinde, erit punctum D ad ellipsim cuius axes sunt in lineis E F, E G. sed & A in eadem est ellipsi, igitur & B, C puncta, in eadem erunt ellipsi.

a 89. huius.

Porrò termini axium ita inuenientur: ductis A M, A N normalibus ad E G lineam, inueniatur inter E M, E G media E O, & inter E N, E F media E R; describaturque per D, A, C puncta ellipsis; quoniam C D ipsi A B est coniugata, adeoque ad ipsam ordinatim posita & F G linea æquidistat ipsi C D, erit F G tangens [b] ellipsim A B C: sunt autem A M, A N normales ad lineas in quibus axes sectionis existunt; & tam E M, E O, E G, quàm E N, E R, E F continuæ, igitur [c] ellipsis A B C transit per puncta R O: quare R & O termini sunt axium, quos oportuit exhibere.

b 19. huius.
c Patet ex 51. huius.

Scholion.

Propositum est hoc problema à Pappo, lib. 8. Mathem. Collect. prop. 14. ac veram quidem eius constructionem eam nempe quam ex illo nos iam attulimus, sed non demonstrat. Fredericus Commandinus demonstrationem supplere conatus est, ita scribens:

Producatur A M vsque ad T ita vt T M ipsi M A, sit æqualis: producatur etiam A N vsque ad Y vt Y N sit æqualis N A: erunt puncta T Y in ellipsi, ex ijs quæ demonstrata sunt ab Apollonio in propos. 47. 2. lib. Conic. sed R S parallela est ipsi A T, est enim angulus in semicirculo rectus, quare & O P ipsi A Y parallela erit. Quoniam igitur C D ad A B ordinatim est applicata quę per A ipsi D C parallela ducitur, videlicet F G sectionem in puncto A continget, & cum F G sectionem contingens diametro occurrat in G & A M ordinatim applicetur, erit per 37. prim. Coni. Apollon. rectangulum G E M æquale quadrato ex E O vel E P. Eâdem quoque ratione cùm A N ordinatim applicetur rectangulum F E N quadrato ex E R vel E S æquale est; ergo O P, R S ellipsis coniugati axes erunt.

Hac Commandinus, quibus rectè ostendit O P *&* R S *coniugatos axes esse ellipsis, quæ per puncta* A T Y *incedit, & à linea* F G *in puncto tangitur: verùm hoc propositum non fuit. Nam ad inueniendum eiusmodi coniugatos axes non opus erat ad describendum circulum* F E G, *facere rectangulum* E A H *quadrata* E D *æquale, & secare* E H *bifariam in* K *indeque normalem excitare, quæ congrediens cum* F G *in* L, *centrum præberet* L *circuli* F E G, *sumpto siquidem in linea* F G *centro quocumque, si per* E *circulus circumducatur, qui secet lineam* F G: *non iam quidem in punctis* F *&* G *sed in alijs quæ ex* E *rectæ emittentur angulum rectum continebunt, non secus ac* E F *&* E G, *quare si ab* A *ad has ipsas postremo ductas lineas, normales ducantur, quales erant* A M *&* A N, *duplicenturque vt* A T *&* A Y, *erunt puncta quæ vices punctorum* T *&* Y *subibunt in ellipsi, quæ per* A *incedit, tangiturque ab* F G *in* A, *axesque habet in normalibus illis, quæ ex* E *ad communes insectiones circuli & lineæ* F G *infinitæ destinantur. At perspicuum est hanc ellipsin (quod fuerat demonstrandum)*

per

per puncta C & D minimè transire, propterea quod circuli centrum aliud ab L assumptum sit, nec sit quadratum ED rectangulo sub EA, & alia linea quàm AH contentum æquale. Itaque vt ostendatur OP & RS coniugatos axes esse ellipsis, quæ per terminos diametrorum coniugatarum AB, & CD incedit, alia ratio est ineunda, quàm in demonstratione nostra iam proposuimus.

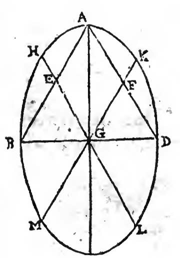
Hæc hactenus super Commandini demonstratione.

Cæterùm ipse Pappi textus temporum iniuriâ nescio quid infortunij passus videtur, ita enim habet: Facile autem est inuentis quibuscumque coniugationibus diametrorū ellipsis, axes eius organicè inuenire. quod quidem hac ratione fiet. *Quæ verba legitimum sensum non habent, cùm ea, quam adfert constructio non organica, sed omnino Geometrica sit, vti eam legenti satis patet: quare puto omissum verbum Geometricè, sicq; legendum:* Facile autem est inuentis quibuscumque coniugationibus diametrorum ellipsis, axes eius organicè inuenire. quod quidem Geometricè hac ratione fiet. *Deinde addita sunt in ipsa constructione illa verba:* cùm sit DE maior quàm EA: *cùm enim constructio vniuersalis sit, siue* DE *minor siue maior, siue ipsi* EA *æqualis ponatur, vt ex nostra demonstratione colligi potest, quodq; Pappum etiam latere nullo modo potuisse certum est, frustra assumitur* DE *maior ipsâ* EA. *Mirum proinde est hunc errorem Fredericum Commandinum non aduertisse, præsertim cùm illo assumpto in demonstratione sua, quam superiùs dedimus, vsus non fuerit: sed vniuersalem attulerit demonstrationem: vnde cùm & ipsa desit demonstratio, quam quin Pappus addiderit, dubium non est. satis manifestum est eorum errore id contigisse, in quorum manus venit hæc propositio (quæ pene tota, vt existimo, interciderat:) qui eam planè iam mutilam & imperfectam, frustra restituere conati sunt.*

PROPOSITIO XCI.

Datis axibus in ellipsi, æquales diametros coniugatas exhibere.

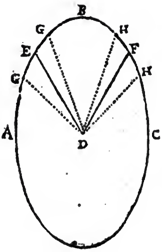
Constructio & demonstratio.



Sint ABC ellipsis axes AC, BD: oporteat autem exhibere diametros coniugatas æquales: iunctis AB, AD; diuidantur rectæ AB, AC bifariam in E & F; & per E & F ex G centro rectæ ducantur GH, GK, occurrentes ellipsi in H, K, L, M punctis. dico illas satisfacere propositioni. Quoniam enim rectæ duæ EB, BG, æquales sunt duabus lineis FD, DG (sunt autem & anguli, æqualibus lateribus contenti inter se æquales) erunt etiam anguli ad basim, EGB, FGD adeoque & reliqui AGE, AGF æquales. Rursùm cùm angulus AGB sit rectus & basis AB in E diuisa bifariam, si centro E interuallo EA describatur circulus, transibit is etiam per B, adeoque EA, EG lineæ erunt æquales. Quare & angulus EAG, æqualis angulo EGA, hoc est AGF. ergo AB, KM lineæ parallelæ: eodem modo ostenduntur rectæ AD, HL parallelæ: vnde cùm diametri HL, KM mutuas parallelas bisecent, erunt coniugatæ. quia verò angulus HGA est angulo AGK ostensus æqualis, erit quoque HG linea æqualis GK, vt patet ex 18. huius. ergo HL, KM diametri sunt coniugatæ & æquales. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XCII.

In vna ellipsi duas tantùm est reperire diametros coniugatas æquales.



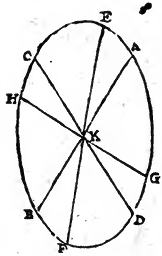
Demonstratio.

SIt ABC ellipsis centrum D & in ea æquales diametri coniugatæ ED, FD: dico alias diametros coniugatas & æquales in ea exhiberi non posse: sint enim, si potest fieri, præter ED, FD diametros, aliæ æquales & coniugatæ GD, HD: erit igitur [a] EDF sectori æqualis sector GDH. Quod fieri non potest, nam GD, HD diametri cùm sint æquales necesse est maiores vel minores illas esse diametris ED, FD, adeoq; ambas simul cadere supra vel infra diametros ED, FD. Igitur præter ED, FD diametros cöiugatas æquales, nullas alias æquales in ellipsi est exhibere. Quod erat demonstrandum.

a Coroll. 46. huius.

PROPOSITIO XCIII.

IN ellipsi æquales diametri coniugatæ simul sumptæ, maximæ sunt omnium diametrorum coniugatarum simul sumptarum.



Demonstratio.

SInt AB, CD diametri coniugatæ æquales, sit autem & alia quęuis diametrorum coniugatio EF, GH: dico diametros AB, CD simul sumptas maiores esse diametris EF, GH simul sumptis: cùm enim sectores AKC, GKE [b] sint inter se æquales, necesse est vnam coniugatarum inæqualium (sit EF) axi viciniorem esse vtrauis æqualium AB, CD: alteram verò HG, remotiorem. vnde [c] ex quatuor diametris EF maxima, & GH minima est. sunt autem EF, GH [d] quadrata simul sumpta æqualia quadratis AB, CD simul sumptis; igitur AB, CD lineæ simul sumptæ maiores [e] quoq; sunt lineis EF, GH simul sumptis: Quod erat demonstrandum.

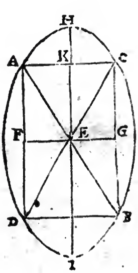
b Coroll. 46. huius.

c 71. huius.
d 77. huius.

e Seren. l. 1. prop. 45.

PROPOSITIO XCIV.

LIneæ quæ extrema diametrorum coniugatarum æqualium coniungunt, ab axibus bifariam secantur.



Demonstratio.

SInt AB, CD diametri coniugatę æquales, iunganturque illarum extrema AD, AC, CB, DB. Dico illas ab axibus bifariam secari, diuisa enim AD bifariam in F, agatur per E centrum FEG occurrens CB rectæ in G. Quandoquidem ergo AB, CD ponantur æquales, harum dimidiæ AE, DE, etiam sunt æquales. æquantur autem ex const. similiter AF, DF. Itaque in triangulis AEF, DEF cùm FE sit commune, omnia latera sibi inuicem æquantur. ergo anguli ad F ęquales, adeoque recti; & anguli quoque FEA, FED, æquales. Quare anguli etiam GEC, GEB prioribus ad verticem oppositi æquantur. sunt verò latera rursum CE, EB æqualia & EG commune vtrique triangulo GEC, GEB. Igitur

tur C G, B G æquales, & anguli ad G æquales adeoque recti. Cùm ergo F G rectas A D, C B, (quæ per 19. huius sunt parallelæ) bifariam & ad angulos rectos fecer, axis est. secantur igitur ab axe bifariam rectę A D, C B extrema coniugatarum æqualium connectentes. Eodem modo ostendemus reliquas duas A C, B D ab axe H I bisecari. constat ergo veritas propositionis.

PROPOSITIO XCV.

SI lineæ quæ extrema coniugatarum connectunt, ab axibus secentur bifariam:

Dico diametros illas esse inter se æquales.

Demonstratio.

POnatur eadem figura quæ priùs, sintque AD, CB, A C lineæ, extrema coniugatarum connectentes in F G & K bifariam & ad rectos diuisæ axibus HI, F G. dico AB, CD, diametros coniugatas esse inter se æquales: cùm enim AD, C B per 19. huius sint parallelæ & ex hypothesi ab axe in F & G bisecentur, anguli ad F, recti sunt, & latera duo AF, FE æqualia sunt lateribus DF, FE; reliqua igitur latera A E, E D quoque inter se æqualia. similiter ostendam C E, E B æquales, vnde & totę diametri A B, C D æquales. Quod fuit demonstrandum.

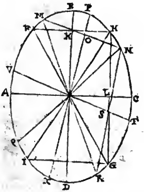
Corollarium.

HInc patet lineas, quæ inæqualium coniugatarum extrema coniungunt, nunquã ab axibus aut alia quauis diametro bifariam & ad rectos secari.

PROPOSITIO XCVI.

LInearum quę extrema coniugatarum quarumuis coniungunt, illa maxima est quæ coniugatas æquales connectens, axem minorem secat; minima, quæ maiorem.

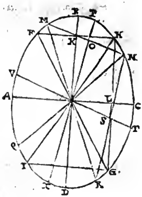
Demonstratio.



SInt AC, BD axes ellipseos ABC, coniugatæ verò æquales FG, HI iunctaque FH maiori axi occurrat in K: & HG minori in L. dico HG lineam maximam esse illarum quæ cuiuscunque coniugationis extrema coniungunt, & FH minimam. Fiat enim quæuis alia diametrorum coniugatio MR, NQ. quarum extrema iungant MN, NR, quibus in O & S bisectis ducantur per centrum XOP, VST. Quoniam ergo FG, HI sunt coniugatæ, sectores EFBH, [a] EHCG æquantur. Ergo [b] segmenta FBH, HCG æqualia sunt. Quare, cùm axes BD, AC etiam bisecent [c] rectas FH, HG, quæ æquales coniugatas iungunt, erunt axes ipsi [d] in K & L, proportionaliter secti. Ergo [e] rectangulum BKD æquale est quadrato LH. simili planè discursu ostendemus rectangulum POX æquari quadrato NS. Deinde quia [f] sectores MEN, FEH æquantur, adeoque [g] segmenta MPN,

a 46. huius.
b 60. huius.
c 94. huius.
d 55. huius.
e 74. huius.
f Coroll. 46. huius.
g 60. huius.

a 55. huius.



b 83. huius.

MPN, FBH, sumique ambæ FH, MN bisectæ in K & O, erunt a DB, XP proportionaliter sectæ in K & O; sed DB axis maior est quàm XP. Ergo rectangulũ BKD, hoc est, vt antè ostendi, quadratum HL, maius est rectangulo POX, hoc est quadrato NS. Ergo recta HL maior rectâ NS. sed HG dupla est ipsius HL, vt antè ostendi, & NR ex const. ipsius NS dupla est. ergo HG maior quàm NR: quia autem NR b maior est quàm MN; erit HG etiam maior quam MN. Eodem modo ostendemus HG maiorem esse quarumuis aliarum coniugatarum extrema connectentibus. ergo HG est omnium maxima. quod erat primum.

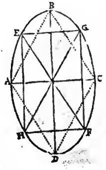
Quod autem FH sit omnium minima, discursu planè simili demonstrabimus. sumatur enim quæuis alia diametrorum coniugatio MR, NQ, & eadẽ, quæ suprà est adhibita, repetatur constructio. eodem modo ostendemus quadratum FK minus esse quadrato MO, & rectam FK minorem rectâ MO, ac proinde FH, minorem quàm MN. est autem c RN maior quàm MN. ergo FH etiam minor est quàm NR. Atque ita demonstrabimus FH minorem esse quarumuis coniugatarum extrema connectentibus. omnium igitur minima est. Quod erat secundo loco ostendendum.

c Ibid.

PROPOSITIO XCVII.

Coniugatarum æqualium extrema coniungentes simul sumptæ minimę sunt omnium quę quascunq; diametros coniugatas coniungunt.

Demonstratio.



d 80. huius.

e Ser. lib. 2. prop. 45.

Sint in ABC ellipsi coniugatæ æquales EF, GH. ponatur autem & alia quæuis diametrorum coniugatio, EF, GH. dico lineas quæ extrema coniugatarum æqualium coniungunt, simul sumptas minores esse lineis quæ extrema alterius coniugationis connectunt. sunt enim EG, GF quadrata æqualia quadratis AB, BC, insuper & EG linea connectentium minima, & FG maxima per præcedentem: igitur e EG, GF lineæ minores sunt lineis AB, BC: eodem modo ostenduntur EH, HF lineæ minores lineis AD, DC: igitur lineæ, &c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCVIII.

Sint ABC ellipseos axes AC, BD & EF vna ex diametris coniugatis æqualibus.

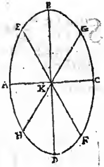
Dico quadrata AK, BK simul sumpta esse dupla quadrati EK.

Demon-

Demonstratio.

DVcatur GH altera diametrorum coniugatarum æqualium. Quoniam AC, BD quadrata [a] simul sumpta æqualia sunt quadratis EF, GH simul sumptis, erunt & quadrata AK, BK sub dimidijs axibus, æqualia quadratis EK, GK sub dimidijs diametris æqualibus; sunt autem EK, GK quadrata inter se æqualia, igitur quadrata AK, BK simul sumpta dupla sunt quadrati EK. Quod erat demonstrandum.

[a] 77. huius.



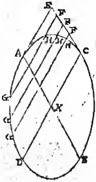
PROPOSITIO XCIX.

Apollonius l. 3. Conic. prop. 26. huiusmodi habet theorema: si ellipsim tangant AE, CE, conuenientes in E, & sumpto in sectione puncto G ducatur GHF tangentium vni parallela GHF. erit rectangulum GFH ad quadratum BC, vt quadratum AE ad quadratum CE.

Verùm non similitudo tantùm rationum sed spatiorum etiam æqualitas reperietur si tangentes à diametrorum coniugatarum æqualium ductæ fuerint.

ELlipseos diametri coniugatæ æquales sint AB, CD, in quarum terminis A, C, ellipsim tangant duæ rectæ conuenientes in E, si alterutri ducantur quotuis parallelæ GH erunt rectangula GFH quadratis FC æqualia.

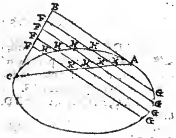
Demonstratio.



QVoniam CD est diameter coniugata diametri AB, erit ad ipsam ordinatim posita: ergo tangenti AE parallela est, Eodem modo AK tangenti BC parallela est, figura igitur KAEC est parallelogrammum. Quare cùm AK, KC ex hypothesi sint æquales, etiam AE, CE æquales sunt; æquantur igitur quadrata AE, EC. Atqui est vt quadratum AE ad quadratum EC, ita rectangulum GFH ad quadratum FC, ergo rectangulum GFH quadrato FC æquale est. Quod erat demonstrandum.

Et quoniam Theorema illud Apollonij iam habemus in manibus, etiam hoc addo quod similiter Apollonius non videtur obseruasse: nimirum si ductis tangentibus AE, CE, iungantur puncta contactuum A, C, rectangula GFH, quadratis KF æqualia esse.

Quoniam FK, AE sunt parallelæ, triangula AEC, KFC similia sunt, ergo vt AE ad EC, sic KF ad FC. ergo vt quadratum AE ad quadratum EC, sic quadratum KF ad quadratum FC. sed etiam vt quadratum AC ad quadratum EC sic rectangula GFH ad quadratum KF, Ergo quadratum KF & rectangulum GFH ad quadratum EC, eandem habent rationem; æquantur igitur. Quod erat demonstrandum.

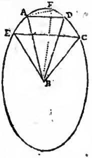


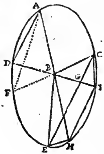
PRO-

PROPOSITIO C.

SInt AB, BC diametri coniugatæ inæquales, & ex A recta quæuis ducatur AD secans ellipsim in D; cui ex C parallela ducatur CE iunganturq́; EB, DB.

Dico EB, DB diametros esse coniugatas & contra.





Demonstratio.

PRimò cadant parallelæ ad eandem partem ellipseos. Ducantur rectæ lineæ BA, DC. Quoniam AD, EC lineæ sibi mutuo æquidistant, erunt [a] segmenta BA, DC inter se æqualia, adeoque [b] ABE, DBC sectores æquales. addito igitur communi ABD, erunt EBD, ABC sectores inter se æquales. quare cùm vnius sectoris latera BA, BC sint diametri coniugatæ, etiam alterius latera EB, BD sunt coniugatæ.

a 51. huius. b 59. huius.

Secundò cadant AD, CE parallelæ ad partes ellipsis oppositas: producantur semidiametri AB, DB in H & I, iunganturque puncta HI. Quoniam AB, BC sunt coniugatæ erit [c] sector ABC quarta pars ellipseos, sed AH diametro [d] bifecat ellipsim, adeoque portio ACH, dimidium est ellipseos. Ergo ABC sector dimidius est semiellipseos ACH. ac proinde æqualis sectori CBH. quia autem IH per 19. huius est parallela ad DA. cui ex hypothesi etiam CE est parallela, erunt IH, CE inter se parallelę. ergo segmenta [e] CI, EH adeoque & sectores [f] CBI, HBE æquantur. addito igitur communi IBH, sector IBE æqualis est sectori CBH, hoc est, vt iam ante ostendi, sectori ABC. quare cùm sector ABC [g] sit quarta pars ellipseos, siue dimidium semiellipseos, etiam sector IBE erit dimidium semiellipseos, hoc est portionis IED, quam esse semiellipsim patet ex Coroll. 45. huius. Ergo sector IBE hoc est sector ABC æqualis est sectori EBD. Quare cùm AB, BC sint coniugatæ, etiam DB, EB erunt coniugatæ.

c 46. huius. d Coroll. 45. huius.

e 51. huius. f 60. huius.

g Coroll. 46. huius.

Sint iam AB, CB, item, EB, DB diametri coniugatæ iunganturque AD, EC. dico AD, EC lineas esse parallelas. Sin verò; ducatur ex A ipsi EC parallela AF iunganturque FB: erit igitur FB diameter coniugata ipsi EB per secundam partem huius: sed DB per constructionem coniugata est diametro EB, ergo eidem EB plures diametri sunt coniugatæ. quod fieri non potest. igitur AF non æquidistat ipsi EC. idem ostenditur de quauis alia. ergo AD sola parallela est rectæ EC. Quod erat demonstrandum.

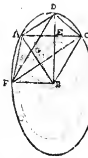
PROPOSITIO CI.

SIt in ADC ellipsi cuius centrum B quæuis diametrorum coniugatio AB, BC: iunctisque punctis AC, secet AC lineam in E diameter quæcunque BD, cui coniugata ducatur BF, ductâque linea FD secet AB diametrum vtcunque in G.

Dico AC, FD lineas, vti & BD, AB in E & G proportionaliter esse diuisas.

Demon-

Demonstratio.



QVoniàm tam AB, BC diametri quàm DB, FB coniugatæ sunt, sectores ABC, a FBD æquales erunt: ablato igitur communi ABD, æquales manent DBC, ABF sectores. vnde BD, b AB lineæ, item AC, FD in E & G proportionaliter sunt diuisæ.

a Corol. 46. huius.
b 61. huius.

PROPOSITIO CII.

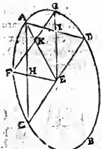
IIsdem positis:
Dico iunctas AD, FC æquidistare.

Demonstratio.

PEr præcedentem sectores DBC, ABF ostensi sunt æquales; segmenta igitur c DC, AF quoque inter se æquantur: ergo AD, FC d lineæ æquidistant. Quod erat demonstrandum.

c 60 huius.
d 61. huius.

PROPOSITIO CIII.



SEcet ABC ellipsim quæuis diametrorum coniugatio AE, CD: sit autem & alia diametrorum coniugatio, FE, GE quę iunctas AD, AC secet in H & I:

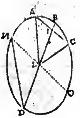
Dico esse vt AH ad HC, sic DI ad IA.

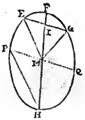
Demonstratio.

DVcatur FG quę AE secet in K. vt AH ad HC, sic FK ad KG: sed vt FK ad KG, sic DI e est ad AI, igitur vt AH ad HC sic DI ad AI. Quod erat demonstrandum.

e 101. huius.

PROPOSITIO CIV.

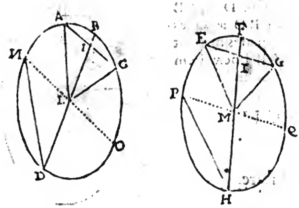




SEcet ABC ellipsim diameter quæcunque BD: sit autem & EFG, ellipsis similis & æqualis ellipsi ABC: quam secet quæuis alia diameter FH: dein BD, FH diametris proportionaliter diuisis in I & K, agantur per I & K, ordinatim lineæ AC, EG: quarum extremitatibus ducantur semidiametri AL, CL, EM, GM.

Dico ALC, EMG triangula esse æqualia.

Demonstratio.



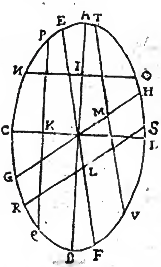
Diametro BD coniugata ducatur NO, & FH diametro PQ: iunganturque ND, PH. Quoniam diametri BD, FH tam in IK quàm LM proportionaliter sunt diuisæ, erit vt rectangulum BID ad rectangulum BLD sic FKH, rectangulum ad rectangulum FMH: quare vt quadratum AI ad quadratum NL sic quadratum EK ad quadratum PM: & vt AI linea ad lineam NL sic EK ad PM: sed etiam est per constructionem vt IL ad BL, id est LD, sic KM ad FM id est MH; igitur vt triangulum NLD ad triangulum AIL, sic PMH triangulum ad triangulum EKM (quia ex ijsdem illorum ratio componitur:) & permutando vt NLD triangulum ad triangulum PMH, sic AIL triangulum ad triangulum EKM. sed NLD, PMH triangula sunt æqualia, igitur AIL, EKM triangula, adeoque tota ACL, EGM æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CV.

Secent ABC ellipsim duæ diametrorum coniugationes AB, CD, EF, GH, & omnes quatuor diametri proportionaliter sint diuisæ in I, K, M, L punctis, per quæ ordinatim ducantur lineæ NO, PQ, RS, TV.

Dico quadrata NO, PQ simul sumpta æquari quadratis RS, TV simul sumptis.

Demonstratio.



Quoniam tam AB, EF, quàm CD, HG proportionaliter sunt diuisæ, erit vt AB quadratum ad rectangulum AIB, sic EF quadratum ad rectangulum ELF, & quadratum CD ad rectangulum CKD, & HG quadratum ad rectangulum HMG. Ex ijsdem enim rationibus singulæ quadratorum ad rectangula proportiones componuntur. Igitur vt AB, CD quadrata simul sumpta ad rectangula AIB, CKD simul sumpta, sic quadrata EF, GH simul sumpta, sunt ad rectangula ELF, HMG simul sumpta: & permutando vt AB, CD quadrata ad quadrata EF, GH, sic AIB, CKD rectangula, sunt ad rectangula ELF, HMG. hoc est a quadrata PK, NI ad quadrata SL, TM: sed AB, CD quadratis simul sumptis b æqualia sunt quadrata EF, GH simul sumpta; igitur & quadratis NI, PK æqualia sunt quadrata SL, TM: ergo NO, PQ quadrata simul sumpta æqualia sunt quadratis SR, TV. Quod erat demonstrandum.

a 74. huius.

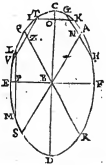
b 77. huius.

PROPOSITIO CVI.

SEcet ABC ellipsim quęuis diametrorum coniugatio CD, EF, quibus proportionaliter diuisis in O & P: ducatur vna ex diametris coniugatis æqualibus AS quę diuidatur in N, vt CD est diuisa in O. per NOP rectæ ducantur ordinatim GH, IK, LM.

Dico IK, LM quadrata simul sumpta esse dupla quadrati GH.

Demonstratio.



DVcatur altera coniugatarum æqualium QR, quâ similiter diuisâ in Z, vt SA est in N. & CD, EF, in O & P, per punctum Z ponatur ordinatim VT. quia igitur QR, AS sunt æquales & similiter sectę, rectangulum QZR æquatur rectangulo ANS. sed rectangula QZR, ANS [a] æquantur quadratis GN, TZ. ergo quadrata GN, TZ adeoque & quadrata GH, TV æqualia sunt. sed quadrata ML, IK [b] æquanrur quadratis VT, GH. ergo quadrata ML, IK dupla sunt quadrati GH. Quod erat demonstrandum.

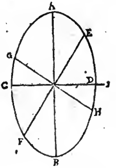
a 74. huius.
b 105. huius.

PROPOSITIO CVII.

SEcent ABC ellipsim duæ diametrorum coniugationes AB, CD, EF, GH: sitque AB maxima & EF magnitudine secunda.

Dico rationem AB ad EF minorem esse ratione GH ad CD.

Demonstratio.

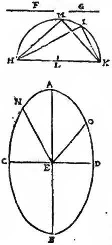


QVoniam AB, CD quadrata simul sumpta æqualia sunt quadratis EF, GH simul sumptis: non est vt AB ad EF, sic GH ad CD, nam tunc quadrata AB, CD maximę & minimæ maiora essent quadratis EF, GH. fiat igitur vt AB ad EF, sic GH ad CI: eruntque AB, CI quadrata maiora quadratis EF, GH, hoc est quadratis AB, CD. quare CI linea est maior rectâ CD, & ratio GH ad CD, id est ex constr. ratio AB ad EF minor est ratione GH ad CD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CVIII.

IN data ellipsi diametros exhibere coniugatas in data ratione.

Constructio & demonstratio.



SInt ABC ellipsis axes AB, CD: centrum E: ratio verò data maioris ad minus F ad G, quam non maiorem esse oportet ratione axium AE, EC. si ratio data æqualis est axium rationi; res patet: si minor, sumantur HI, IK lineæ, rectis AE, EC æquales, ponanturque ad angulum rectum HIK: ductaque HK, & diuisa bifariam in L, centro L interuallo LH circulus describatur HIK qui transibit per puncta I & K, in segmento deinr HIK inclinentur [a] duæ lineæ HIK habentes datam rationem F ad G. Quoniam igitur HM est ad MK vt F ad G, estque ratio F ad G, minor ratione axium, hoc est ex constr. ratione HI ad IK, patet punctum M cadere inter I & H, adeoque rectam HM minorem quàm HI, hoc est quàm EA, rectam verò MK maiorem quàm IK hoc est quàm EC. centro igitur E interuallo HM, descriptus circulus secat ellipsim in puncto aliquo N inter A & C, ducatur igitur diameter NE, eiq; coniugata EO. dico NE, OE diametros satisfacere petitioni. Quoniam quadrata NE, OE [b] sunt æqualia quadratis AE, EC hoc est HI, IK hoc est quadratis HM, MK: sit autem & NE linea æqualis rectæ HM. erit & OE linea æqualis lineæ MK. igitur vt HM ad MK, id est vt F ad G, sic NE ad OE. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

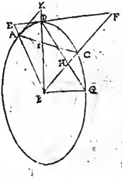
a 49. De Circulo.

b 77. huius.

PROPOSITIO CIX.

SEcet ACD ellipsim quæuis diametrorum coniugatio AB, BC. assumptoque in peripheria puncto quouis D inter A & C, agatur per D contingens EF, quæ cum AB, BC lineis concurrat in E & F, cui per centrum parallela ducatur BG.

Dico DF, BG, DE lineas esse in continua analogia.



Demonstratio.

QVoniam ex hypothesi DF, BG sunt parallelæ, triangula DFH, BHG, vt ex elementis patet, erunt similia, ac proinde DF est ad BG, vt DH ad HG: hoc est vt triangulum DHB ad triangulũ BHG. Deinde, quoniam BG per centrum est tangenti DF parallela, liquet eam coniugatam esse diametrum ipsi DB: sunt verò ex hypothesi etiam AB, BF coniugatæ. Ergo [c] sectores BDCG, BADC, adeoque [d] & triangula BDG, BAC æquantur: Quorum bases DG, AC, cùm [e] proportionaliter sint diuisæ in H & I, vt DH sit ad HG, sicut CI est ad IA, constat ex elementis triangula BHD, BIC & BHG, BIA esse æqualia. ergo cùm prius ostenderim DF esse ad BG

c Coroll. 46. huius.

d Corol. 60. huius.

e 101. huius.

vt

vt triangulum BHD ad triangulum BHG, erit quoque DF ad BG, vt triangulum BIC ad triangulum BIA. Vlterius cùm triangulum BHG fit ad triangulum BHD, vt GH ad HD, hoc est [a] vt AI ad IC, hoc est vt KI ad IB (cùm enim CB sit coniugata ipsi AB, & AK, ex constructione tangens, patet AK, CB esse parallelas) hoc est vt triangulum AIK ad triangulum AIB: erit componendo triangulum BDG ad triangulum BHD, vt triangulum AKB ad triangulum AIB; & permutando triangulum BDG ad triangulum AKB, vt triangulum BHD, hoc est sicut ante ostendi, vt triangulum BIC ad triangulum AIB. sed triangulum AKB est [b] triangulum EDB, ergo triangulum BDG est ad triangulum EDB, hoc est, quoniam ED, BG sunt parallelæ, BG est ad ED, vt triangulum BIC ad triangulum AIB, hoc est sicut ostendi supra, vt DF ad BG. sunt igitur in ratione continua DF, BG, ED. Quod erat demonstrandum.

a ibid.

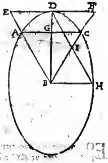
b 71. huius.

PROPOSITIO CX.

Sint AB, BC diametri quæcunque coniugatæ, assumptoq; in peripheria, inter A & C puncto quouis D, agatur per D contingens, occurrens AB, BC diametris in E & F, iunctaque AC occurrat diametro DB in G.

Dico rectam DF ad DE, rationem habere duplicatam, eius quàm habet CG ad GA.

Demonstratio.



Ducatur ex B linea BH parallela ipsi EF, & ex D recta DH occurrens FB lineæ in I. erunt igitur per præcedentem, continuæ FD, BH, ED. adeoque ratio FD ad ED, duplicata rationis FD ad BH, id est DI ad IH, quia DF, BH per constructionem æquidistant: rursum cùm HB recta æquidistet tangenti DF, erunt DB, BH diametri coniugatæ; sunt autem ex constructione etiam AB, BC coniugatæ; igitur [c] vt DI ad IH, sic CG ad GA: quare & ratio FD ad DE, duplicata est rationis CG ad GA. Quod erat demonstrandum.

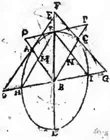
c 101. huius.

PROPOSITIO CXI.

Sint AB, BC diametri coniugatæ & per A & C tangentes ducantur DE, FG. sit autem & alia quæuis diametrorum coniugatio HI, KL, quæ producta occurrat tangentibus DE, FG in E, F, D, & G.

Dico lineas DE, FG in A & C proportionaliter esse diuisas, nimirum esse EA ad AD, vt GC ad CF.

Demonstratio.



Ducantur lineæ HK, KI quæ rectas AB, BC secent in M & N. Ratio EA ad AD [d] duplicata est rationis KM ad MH, & GC ad CF, duplicata est rationis IN ad NK. Atqui ratio KM ad MH æqualis est [e] rationi IN ad NK. ergo rationes EA ad AD, & GC ad CF æqualium rationum duplicatæ, sunt æquales, proportionaliter ergo sectæ sunt DE, GF in punctis C, A. Quod erat demonstrandum.

d 110. huius.

e 101. huius.

Corollarium.

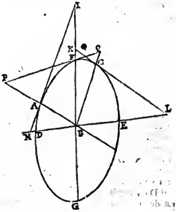
QVod si per K ducatur tertia tangens, conueniens cum BA, BC coniugatis in O & P, dico fore OK ad KP, vt EA ad AD. quod ducta rectâ AC eodem modo quo vsi sumus demonstrabitur.

Itaque tres tangentes DE, OP, FG similiter sunt diuisæ sic vt EA sit ad AD, sicut OK ad KP, & GC ad CF.

PROPOSITIO CXII.

SInt duæ diametrorum coniugationes AB, BC, FG, DE, aganturque per A & C tangentes HI, KL, quæ FG, DE diametris occurrant in H, I, K, L punctis.

Dico esse vt BC ad BA sic HI ad KL.



Demonstratio.

QVoniam recta BC æquidistat rectæ HI, & KL linea ipsi AB, erunt tam HA, BC, AI quàm KC, AB, CL lineæ in continua analogia. cùm ergo sit vt HA ad AI, prima ad tertiam, sic KC ad CL, prima ad tertiam: erit etiam HA ad BC, prima ad secundam vt KC est ad AB, prima ad secundam: quare permutando est HA ad KC, vt BC ad AB, cùm igitur ante ostenderim HA esse ad AI, vt KC ad CL, adeoque inuertendo, componendo, ac permutando sit vt HA ad KC, sic HI, ad KL, erit vt BC ad BA, ita HI ad KL.

a 110 huius.

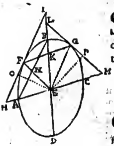
Corollarium.

EOdem modo ostenditur, si per F agatur tangens quæ cum AB, BC conueniat in P & Q esse vt BC ad BD, sic HI ad PQ.

PROPOSITIO CXIII.

SInt duæ diametrorum cõiugationes AC, BD, EF, EG: actisque per F & G tangentibus quæ diametris AC, BD occurrant in H, I, L, M. ducatur recta FG secans BE diametrum in K.

Dico LK, KE, KI lineas esse continuas.



Demonstratio.

QVoniam FE, vtpote coniugata ipsi EG, æquidistat tangenti LG, erit LK ad KE, vt GK ad KF. similiter quoniam EG, vtpote coniugata ipsi EF, parallela sit tangenti FI, est vt GK ad KF, sic KE ad KI: igitur vt LK ad KE, sic KE est ad KI. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXIV.

Iisdem positis:
Dico IHE, LME triangula esse æqualia.

Demonstratio.

DVcatur recta AB quæ FE lineam secet in N: & ex E rectæ ducantur EO, EP, normales ad lineas HI, LM. Quoniam LM linea æquidistat ipsi FE (est enim LM tangens, & FE coniugata ipsi EG,) erit angulo FEG æqualis angulus EGP. eodem modo erit angulus OFE æqualis angulo FEG. quare anguli OFE, EGP sunt inter se æquales: sunt autem EPG, EOF anguli recti; igitur triangula EGP, EFO similia. quare vt EG ad EF, sic EP ad EO. sed est [a] vt EG ad EF, sic HI ad LM. igitur vt EP ad OE, sic reciprocè HI ad LM. ergo IHE, LHM triangula sunt æqualia. Quod erat demonstrandum. [a] 110. huius.

PROPOSITIO CXV.

Iisdem positis triangulum EGM, triangulo EFI, & EGL triangulum, triangulo EFH æquale est.

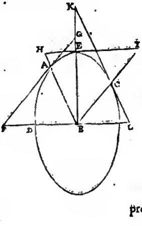
Demonstratio.

EST enim [b] vt HF ad FI, sic LG ad GM, & componendo vt HI ad FI, sic LM ad GM: sed est vt HI ad FI, sic HIE triangulum ad triangulum FIE, & vt LM ad GM, sic ELM triangulum ad triangulum EGM; igitur vt HIE triangulum ad triangulum FIE, sic ELM triangulum est ad triangulum EGM, & permutando vt HIE triangulum ad triangulum ELM, sic FIE triangulum est ad triangulum EGM. quare FIE, EGM triangula sunt æqualia. eodem modo ostenduntur reliqua EGL, HFE æqualia. [b] 111. huius.

PROPOSITIO CXVI.

SI ellipsim ADC duæ secent diametrorũ coniugationes AB, BC; EB, BD: aganturque per A, E, C. contingentes FG, HI, KL quę diametris quidem EB, BD occurrãt in G, K, F, L. diametris verò AB, BC, in H & I. Dico triangula FGB, HBI, KLB esse inter se æqualia.

Demonstratio.



NAm triangulum BIE [c] æquatur triangulo BKC, hoc est per 115. huius triangulo BFA: & triangulum BHE, [d] æquatur triangulo GAB. ergo triangulum totum BIH æquatur toti BFG. quare cùm etiam FGB, [e] KBL æqualia sint, liquet tria triangula esse æqualia. [c] 70. huius. [d] ibid. [e] 114. huius.

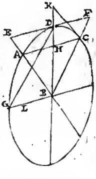
PROPOSITIO CXVII.

SInt ellipseos duę diametri coniugatæ AB, BC, & ex puncto aliquo inter A & C assumpto, scilicet D ducatur tangens DE coniugatis AB, BC

pro-

productis occurrens in E & F: deinde ex centro B ducatur B G, ipsi E F æquidistans, sitque G B media inter E D, D F.

Dico punctum G esse in peripheria ellipseos, cuius diametri coniugatæ A B, B C, & tangens E D.



Demonstratio.

EX centro ad contactum ducatur B D, & quia G B ex hypothesi est parallela tangenti E D, erit G B ordinatim posita ad B D, & quidem ad centrum. vnde B D, G B sunt diametri coniugatæ. iungantur deinde A H C & D G, ex C ducatur C K parallela ipsi A B, occurrens B D protractæ in K: quæ sectionem in C contingit, eritque vt A H ad H C, ita B H ad H K: sed vt A H ad H C, ita est A B H triangulum ad triangulum H B C, & vt B H ad H K, ita est triangulum H B C, ad triangulum H C K: ergo vt triangulum A B H ad ipsum H B C ita est triangulum H B C ad triangulum H C K: ergo componendo, ac permutando triangulum A B C; ad triangulum B C K est vt triangulum B H C ad triangulum H C K, id est vt iam ostensum, vt triangulum A B H ad triangulum H B C, id est vt linea A H ad lineam H C: sed æqualia sunt triangula [a] B C K, B D F, ergo etiam erit triangulum A B C ad triangulum B D F, vt A H ad H C. Vlterius quoniam D F, G B sunt parallelæ, erit triangulum [b] G D B, ad D B F triangulum, vt G B, ad D F: sed, quoniam ex hypothesi E D, G B, D F sunt continuæ, ratio G B ad D F, est dimidiata rationis E D ad D F. Ergo ratio trianguli G D B ad triangulum D B F, dimidiata est rationis E D ad D F. Atqui [c] ratio A H ad H C, hoc est vt ostensum supra, ratio trianguli A B C ad triangulum D B F, dimidiata quoque est rationis E D ad D F. ergo triangulum G D B est ad triangulū D B F, vt triangulū A B C ad idem triangulum D B F. æquantur igitur triangula G D B, A B C. ergo & parallelogrammum contentum semidiametris, vt supra ostendi, coniugatis, G B, B D in angulo G B D æquatur parallelogrammo contento sub semidiametris coniugatis A B, B C. Ergo [d] punctum G est ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

a 70. huius.
b Patet ex elementis.
c 109. huius.
d Patet ex 72. huius.

PROPOSITIO CXVIII.

SInt rursum binæ diametri coniugatæ B A, B C. Et sumpto in perimetro ellipsis puncto D inter A, ac C, tangat ellipsim E F in D, occurrens diametris in E & F. Deinde ex centro B ducatur ad perimetrum B G parallela tangenti.

Dico E D, G B, D F esse in continua analogia.

Demonstratio.

SI non sit aliqua L B minor vel maior quàm G B media inter E D, D F. Ergo per præcedentem punctum L est ad ellipsim. quod fieri non potest, cùm ex hypothesi punctum G ad ellipsim existat. Nulla igitur præter G B media est inter E D, D F. ergo E D, G B, D F sunt continuæ proportionales. Quod erat demonstrandum.

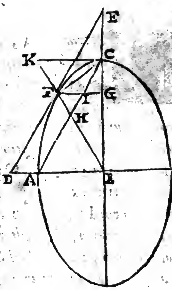
PRO-

PROPOSITIO CXIX.

SInt in ellipsi diametri coniugatę AB, BC iungaturq; AC cui parallela fiat linea DE tangens ellipsin in F, & occurrens diametris coniugatis protractis in D & E.

Dico triangulum EDB trianguli CAB duplum esse.

Demonstratio.



EX centro B per tactum F ducatur diameter BHF, cui occurrat in K recta CK ellipsim tangens in C, deinde ex tactu F ponatur ordinatim FIG. Quoniam AC parallela est ex hypothesi tangenti DE, erit [a] ad diametrum BF ordinatim posita. ergo KB, FB, HB [b] sunt continuæ proportionales. ergo [c] est vt KB ad FB, sic KF ad FH. sed KB est ad FB, & triangulum KCB ad triangulum FCB, hoc est, quia [d] triangula KCB, EFB æquantur, vt triangulum EFB ad idem triangulum CFB, hoc est vt EB ad CB. Igitur vt EB ad CB, sic KF ad FH. Deinde quia ex constr. KC tangit, & FG est posita ordinatim ad BC, rectæ EB, CB, GB sunt continuæ. Ergo vt EB ad CB, sic EC ad CG. sed etiam est vt iam ostendi, sicut EB ad CB ita KF ad FH. Ergo vt KF ad FH, sic EC ad CG. Ergo vt triangulum KCF ad triangulum FCH, sic triangulum EFC ad triangulum CFG. Atqui cum tota KCB, EFB, æqualia sint, ablato communi FBC reliqua KCF, EFC æqualia sunt. Ergo & FCH, CFG æqualia sunt; ablato igitur communi FIC, æqualia remanent FIH, CIG, quibus si commune addis BHIG, FGB æquabitur CHB. Iam verò quia AC ordinatim posita est, vt supra ostendi, ad BF, bisecta est AC in H, adeoque & triangulum CAB duplum est trianguli CHB, & DE parallela ad AC etiam bisecatur in F: est verò FG, vtpote ducta ordinatim ad CB, parallela ad CB, diametrum coniugata ipsi CB. ergo & BE bisecatur in G. proindeque EFB duplum est GFB. Atqui CHB, FGB ostensa sunt æqualia. Ergo & eorum dupla CAB, EFB æqualia sunt. sed triangulum DEB duplum est trianguli EFB, est enim DE bisecta in F. Ergo triangulum DEB duplum quoque est trianguli CAB. Quod erat demonstrandum.

[a] 13. huius
[b] 32. huius.
[c] 1. progress.
[d] 70. huius.

ELLIPSEOS

PARS QVARTA

Sectionis polos, & lineam à puncto in axe dato ad peripheriam, breuissimam designat.

P*Artem hanc, quæ de polis est, aggressuri, paucis præmittemus ea quæ ad inuentionem polorum ab Apollonio libro tertio propositione 42. & 45. demonstrata sunt; & quidem hoc necessarium esse duxi; tum quod ad illorum intelligentiam quæ Apollonius in rem hanc contulit, nec omnium captui ita patent, plurimum conducant; tum quod ad rem nostram planè iudicem necessaria. Apollonius igitur vt in axe ellipseos polos exhibeat, hac vtitur constructione propositione 45. & 6.* Quartę, *inquit*, parti figuræ æquale rectangulum comparetur ex vtraque parte: *id est, sectionis axis* A C *ita secetur in duobus punctis* G *&* H, *vt tam* A G C *quàm* C H A *rectangulum æquale sit quartæ parti figuræ: quo posito vlterius ostendit* G *&* H *polos esse sectionis: quos puncta vocat ex comparatione facta; videlicet ex comparatione rectangulorum sub segmentis axeos, cum quarta parte figuræ. Figuram porrò hic vocat Apollonius rectangulum quod fit sub latere recto axeos maioris & ipso axe: atque illud cùm quarta sui parte ad vsus seruiret eximios; videlicet inuentionem polorum &c. singulari præ reliquis rectangulis appellatione figuram appellauit antiquitas: huius autem quartæ parti æquale est quadratum semiaxeos minoris: quod Pergæus lib. tertio, propos. 42. præclarè demonstrauit, & nos verbo vno sic ostendimus.*

Lemma.

PEr vndecimam huius, figuræ siue rectangulo sub axe maiore & latere illius recto æquale est quadratum axeos minoris: sed quadrati minoris axis quarta pars est quadratum dimidij axis minoris; igitur quadratum dimidij axeos minoris æquale est quartæ parti figuræ. vnde cùm voce illa in hac parte vtar, quarta pars figuræ, intelligi volo quadratum semiaxeos minoris.

Occurrent in hac parte propositiones aliquot eædem cum illis quas Apollonius de focis, demonstrauit: quod eo consilio feci, ne quid in hac materia studiosus lector desideraret.

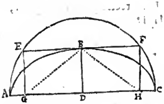
PROPOSITIO CXX.

SInt A B C ellipsis axes A C, B D, actaque per B tangente E F: centro B D interuallo D A circulus describatur A E F C, qui tangenti occurrat in E & F. dein ex E & F, normales demittantur E G, F H ad axem A C.

Dico tam A G C quàm A H C rectangulum æquale esse quartæ parti figuræ.

Demon-

Demonstratio.



QVoniam tam EB linea æquidistat rectæ AD quàm EG[a] ipsi BD, erunt EG, BD lineæ æquales: est autem AGC rectangulum æquale quadrato EG, quod recta EG ducta sit ad diametrum circuli normalis; igitur & quadrato BD æquale est rectangulum AGC. eodem modo est FH quadrato, hoc est quadrato BD æquale rectangulum AHC. sed BD quadratum est æquale quartæ parti figuræ, igitur tam AGC quàm AHC rectangulum est æquale quartæ parti figuræ. Quod erat demonstrandum.

a 13. huius.

Corollarium.

HInc patet AG, HC lineas esse æquales & GH bifariam esse diuisam in D.

PROPOSITIO CXXI.

IIsdem positis ducantur rectæ BG, BH. Dico BG, BH lineas simul sumptas axi AC esse æquales.

Demonstratio.

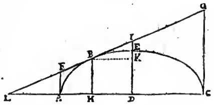
QVoniam æquales sunt [b] AG, HC, quadratum AC æquatur rectangulo ex AG & HC. Iterum quia æquales sunt GD, DH, æquabitur rectangulum AGD bis sumptum rectangulo AGH. Quare cùm [c] quadratum AD æquale sit quadratis DG, AG & rectangulo AGD bis, idem quadratum AD æquabitur quadrato DG & rectangulo ex AG, HC vnà cum rectangulo AGH. Atqui rectangula AG, HC, & AGH [d] æquantur rectangulo AGC. Ergo quadratum AD æquale est quadrato DG vnà cum rectangulo AGC; hoc est quadratis DG, GE, hoc est [d] quadratis DG, DB. sed iisdem æquatur quadratum GB, æquantur igitur quadrata AD, GB, ac proinde rectæ AD, GB æquales sunt. Eodem modo demonstrabitur rectas CD, HB æquales esse. Ambæ igitur GB, BH simul sumptæ axi sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

b Corell. 120. huius.
c 4. secundi.
d 1. secundi.

Corollarium.

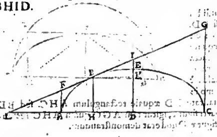
HInc sequitur: si ABC ellipsis axes fuerint AC, BD, & ex B vertice minoris axis rectæ dimittantur BG, BH, æquales lineis AD, DC, secantes axem AC in G & H. Quod tam AGC quàm AHC rectangulum, æquale sit quartæ parti figuræ. adeoque G & H sectionis poli sunt.

PROPOSITIO CXXII.



ELlipsim ABC, cuius diametri coniugatæ AC, DE contingant in A & C, & alio puncto quouis B tres lineæ AF, CG, FG: & FG quidem occurrat AF, CG rectis in F & G. productaque ED occurrat FG lineæ in I, & ex B, recta demittatur BH ordinatim ad AC diametrum: Dico

Dico rectangulum super AF, CG lineis æquari rectangulo super BHID.



Demonstratio.

a 31. huius.

PRoducatur FG linea donec cum axe conueniat in L. Quoniam DH, DA, DL lineæ[a] sunt in continua ratione, erit vt LD ad AD, hoc est ad DC sic LA ad AH, & inuertendo componendo vt CL ad DL, sic HL ad AL, sed est vt CL ad DL, sic CG ad DI, & vt HL ad AL, sic HB ad AF, igitur vt CG ad DI, sic HB ad FA: adeoque rectangulum super AF, CG lineis æquale rectangulo BH, ID. Quod erat demonstrandum.

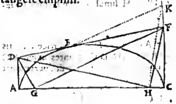
Corollarium.

HInc sequitur rectangulum AF, CG vel HB, ID, æquale esse quartæ parti figuræ: ducatur enim BK parallela axi AC: erit rectangulum DK, DI æquale quadrato ED igitur & AF, CG rectangulum est æquale quadrato ED hoc est quartę parti figuræ.

PROPOSITIO CXXIII.

ELlipsim ABC cuius axis AC, contingant in A & C, & alio quouis puncto B, lineæ AD, CF, DF: & DF quidem conueniat cum AD, CF lineis in D & F. diuidatur autem linea AC in G & H, vt AGC, AHC rectangula sint æqualia quartæ parti figurę. ducanturque lineę DG, GF, DH, HF.

Dico angulos DGF, DHF esse rectos, & si sint recti: dico DF, lineam tangere ellipsim.



Demonstratio.

b Coroll. 122. huius.

c 6. sexti.

REctangulum DACF[b] est æquale quartę parti figurę, hoc est rectangulo AGC. Ergo vt AG ad AD, sic FC ad CG, sunt autem anguli DAG, FCG recti; igitur DAG, FCG triangula[c] similia: & angulus ADG æqualis angulo CGF, est autem angulus ADG, vnà cum angulo AGD æqualis vni recto, cùm DAG angulus in triangulo ADG sit rectus: igitur & angulus CGF, vnà cum angulo AGD vni recto sunt æquales, ergo reliquus DGF est rectus. eodem modo ostenditur angulus DHF rectus. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXIV.

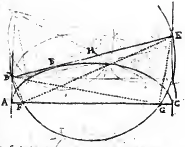
ELlipsim ABC cuius axis AC contingant in A, C, B, punctis lineæ AD, CE, DE: & DE quidem occurrat rectis AD: CE in D & E: fiant autem quartæ parti figurę, æqualia rectangula AFC, AGC, seceturque ED bifariam in H:

Dico

Dico circulum centro H interuallo D & E, descriptum transire per F & G.

Demonstratio.

Iungantur puncta DF, FE, DG, GE. Quoniam tam angulus DFE, quàm DGE est rectus, & DE linea vtrumque subtendens, diuisa bifariam in H, patet circulum centro H interuallo HD descriptum transire per F & G. Quod erat demonstrandum.



Corollarium.

Hinc sequitur angulos EDG, FDA esse inter se æquales, est enim angulus ADF in demonstratione præcedentis æqualis ostensus angulo GFE: sed angulo GFE æquatur angulus EDG cum eidem arcui EG insistat, ergo anguli EDG, FDA sunt inter se æquales.

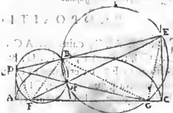
PROPOSITIO CXXV.

Ellipsim ABC cuius axis AC contingant in A, C, B, lineæ AD, CE, DE: & DE quidem conueniat cum AD, CE lineis in D & E. fiant autem AFC, AGC rectangula æqualia quartæ parti figuræ ductisque lineis FE, GD quæ se intersecent in H, ex puncto H ad contactum B, ducatur recta HB.

Dico HB normalem esse ad tangentem DE.

Demonstratio.

Ductæ rectæ FD, CE. a Anguli DFE, ECD recti erunt. Iam super HD, HE lineis vt diametris circuli describantur DBH, EBH. Quoniam DH, HE lineæ non sunt in directum, patet DBH, EBH circulos se inuicè secare in puncto aliquo B. iunctis igitur punctis HB. ducantur rectæ DB, EB: erunt anguli DBH, EBH recti, adeoque DB, EB lineæ in directum, & HB linea normalis rectæ DE. sunt autem vt ante ostendi DFE, EGD anguli recti igitur DE b linea est tangens. Quare recta BH est normalis ad ED tangentem. Quod erat demonstrandum.



a 123. huius.

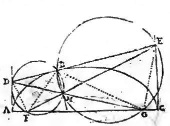
b Patet ex 113. huius, quæ facile cõuertitur.

PROPOSITIO CXXVI.

Eadem manente figura: ducantur FB, BG.

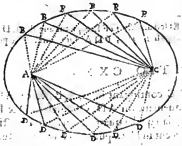
Dico angulos DBF, EBG ad contingentem esse æquales.

a 125 huius.
b Ibid.



Demonstratio.

QVoniam anguli DFH, EGH recti sunt, transibunt per F & G, circuli DFH, EGH: transit autem vterque etiam per B: quia a anguli EBH, DBH sunt recti: igitur tam anguli DBF, DHF quàm EBG, EHG anguli sunt inter se æquales: sed angulus DHF æqualis est angulo EHG: ergo & DBF æquatur angulo EBG. Quod erat demonstrandum.



Scholion.

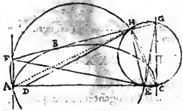
CVm punctum B in peripheria assumptum, sit quodcunque sequitur lineas omnes ex F in peripheriam ellipsis ductas, reflectendas in G. Quare & puncta FG poli seu foci à nonnullis vocantur: quæ ab Apollonio puncta ex comparatione facta dicuntur. porrò hæc in ellipticis mirabiles habent proprietates: inter reliquas placuit sequentem hic adiungere.

Sint A, C, foci ellipseos, quorum distantia par sit internallo oculorum, ponaturq; in A oculus sinister, & dexter in C. Dico illum per totum speculum apparere oculo dextro, in C posito: & vicissim oculum dextrum in C. per totum speculum videri ab oculo sinistro in A. demonstratio patet: species enim obiecti A, per totum speculum diffusa, reflectuntur in C, & species obiecti C per totum diffusa reflectuntur in A, quare obiectum A per totum apparebit speculum, oculo C, vti & obiectum C, oculo A. hinc sequitur quod minimum & visibile positum in C, maximum apparebit oculo in A posito: quia apparebit per totam speculi superficiem diffusum.

PROPOSITIO CXXVII.

ELlipsim ABC, cuius axis AC & poli DE contingant in punctis A, C, B rectæ AF, CG, FG; & FG quidem conueniat cum AF, CG lineis in F & G. erigatur ex E, linea EH normalis ad tangentem FG, iunganturq; puncta AH, CH.

Dico angulum AHC rectum esse.



Demonstratio.

DVctis lineis FE, EG describantur super FE, EG diametris circuli FHE, HGC: ac circulus quidem FHE, cùm anguli EHF, EAF sint recti, transibit per H, F, A, puncta; circulus verò HGC; cùm DHE, ECG anguli quoque recti sint transibit per H, C. erunt igitur tam anguli AHF, AEF quàm EHC, EGC, anguli

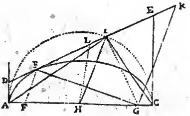
guli æquales: ſed angulus CGE per demonſtrata in 121. huius æqualis eſt angulo FEA, igitur & angulo CHE æquatur angulus AHF: addito ergo communi angulo AHD, erit angulo FHE recto æqualis angulus AHC, quare & ipſe rectus eſt, Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXVIII.

Ellipſim ABC cuius axis AC contingant in A, C, B, lineæ AD, CE, DE, ac DE quidem occurrat AD, CE lineis in D & E: ſint autem poli F, G, centrum H ductaque ex F recta FB ad punctum contactus ducatur ex H linea HI parallela rectæ FB occurrens ED lineæ in I.

Dico HI lineam æqualem lineæ HC, & ſi HI occurrens ED rectæ, ſit æqualis HC. dico HI lineam æquidiſtare FB.

Demonſtratio.



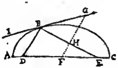
Fiat BI æqualis IK: iunganturque BG, GK, & rectæ ducantur AI, IC: Quoniam IB, IK ſunt æquales, erit BI ad IK, vt FH ad HG: adeoque BF, KG lineę parallelæ, & angulus BKG æqualis angulo DBF, hoc eſt a IBG: quare BG, GK lineæ æquales: ſunt autem & duo reliqua latera BI, IG æqualia duobus lateribus KI, IG. Angulus ergo BIG, æqualis angulo KIG: adeoque GI linea normalis tangenti DE, & angulus AIC rectus. quare circulus centro H interuallo HC deſcriptus tranſibit per I, eritque HI linea æqualis lineæ HC. Quod erat primum. a 125. huius.

Reliquis manentibus, ſit iam HI linea quæ occurrat tangenti ED in I, æqualis lineæ HC. Dico HI rectam æquidiſtare lineę BF: ſin verò: ducatur ex H linea HL, parallela rectæ FB occurrens ED tangenti in L, erit igitur HL linea æqualis lineæ HC, hoc eſt HI. quare circulus centro H interuallo HC deſcriptus tranſilit per I & L puncta. Quod impoſſibile: igitur HL non eſt parallela ipſi FB: nec quæuis alia: pręter HI lineam. Quod erat demonſtrandum.

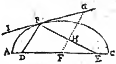
PROPOSITIO CXXIX.

Sit ABC ellipſeos axis AC, poli autem D, E, ex D & E rectæ inflectantur DB, EB conuenientes in puncto quodam peripherię B.

Dico DB, EB lineas ſimul ſumptas æquari axi AC.



Demon-



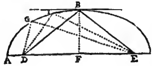
Demonstratio.

Sit F centrum ellipseos: actáque per B tangente BG: ducatur recta FG parallela lineæ DB secans EB lineam in H. Quoniam BD, FG lineę sunt parallelæ, erit angulus FGB æqualis angulo DBI hoc est a EBG, adeóque HB, HG lineæ æquales: rursum cùm sit vt DE ad FE, sic BE ad HE, sitque DE dupla FE, erit & EB, dupla rectæ BH id est HG: sed etiam BD dupla est FH, cùm sit vt DE ad FH, sic DB ad FH. igitur EB, BD lineæ simul sumptæ duplæ sunt rectæ FG hoc est FC: quare & æquales axi AC. Quod erat demonstrandum.

a 111. huius.

PROPOSITIO CXXX.

Triangulorum isoperimetrorum maximum est isosceleum.



Demonstratio.

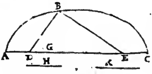
Describatur ellipsis quæcunque ABC cuius axes AC, FB poli D, E, iunganturque puncta DB, BE: tum super ED basi triangula constituantur quęcunque DGE, quorum vertices G sint in peripheria. Quoniam tam DB, BE lineæ quàm DG, GE simul sumptæ sunt æquales axi AC: patet DBE, DGE triangula esse isoperimetra: dico autem illorum esse maximum triangulum DBE: agatur enim per B tangens: quæ cùm in vno tantùm puncto B ellipsi occurrat & reliqua sui parte tota cadat extra, patet DGE triangula quæ terminantur in ellipsi minorem habere altitudinem triangulo DBE, adeoque illo esse minora: est autem DBE triangulum isosceles, quia DF, FB latera æqualia sunt lateribus EF, FB & anguli illis contenti recti; igitur triangulorum isoperimetrorum maximum est isosceles. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXI.

Oporteat è focis ellipseos DE duas inclinare ad idem punctum perimetri quæ datam contineant rationem H ad K.

Debet autem data ratio maior esse ratione AD ad DC, minor verò ratione AE ad EC.

Constructio & demonstratio.



Secetur axis AC in G, secundùm datam rationem H ad K, quę cùm ponatur maior ratione AD ad DC, & minor ratione AE ad EC, manifestum est AG lineam maiorem esse recta AD: minorem verò AE ac proinde punctum G cadere inter polos D, E. erigatur igitur ex D ad peripheriam linea DB æqualis rectæ AG. Iunganturque puncta BE. dico factum esse quod petitur. cùm enim rectæ duæ DB, BE simul sumptæ sint æquales axi AC, sit autem per constructionem DB linea æqualis lineæ AG, erit BE reliqua æqualis reliquę GC: igitur DB est ad BE, vt AG ad GC, id est vt H ad K. Inclinauimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

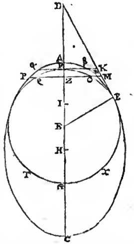
PRO.

PROPOSITIO CXXXII.

Ellipsim ABC contingat in B linea BD conueniens cum axe maiore CA, in D. ex B autem contactu, normalis ad contingentem ponatur BE, occurrens axi in E.

Dico EB lineam breuissimam esse illarum quæ ex E puncto ad peripheriam ellipseos duci possunt.

Demonstratio.

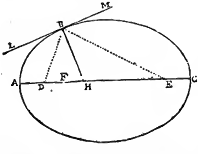


Centro E interuallo EB circulus describatur FBG occurrens axi in F & G. centrum ellipseos sit H. Quoniam DB ellipsim contingens cũ axe maiori conuenit in D, & angulus DBE rectus est, BE linea non transit per H centrum ellipseos: si enim E centrum est, recta EB, normaliter ad contingentem posita axis erit coniugatus axi AC, (cùm æquidistantes omnes contingenti DB a bifariam & ad rectos diuideret.) adeoque DB æquidistaret axi AC: non igitur E centrum est ellipseos, nec EB diameter: quia verò DB cum axe conuenit ad partes A, EB linea b. minor est semidiametro, sibi parallela: adeoque & minor est semiaxe HC, & multò minor rectâ EC, quare circulus radio EB descriptus, occurrit axi in G intra ellipsim, punctum igitur G, supra C est. a 13. huius. b 10. huius.

Rursum cùm HC id est AH, maior sit ostensa quàm EB id est EG, ablato communi EH, manet AE maior quàm HG, posita autem EI æquali EH, recta FI æquatur HG, igitur AE quoque maior est FI: ablato ergo ex FE & AE, communi IE, manet IA maior quàm IF: vnde & F punctum cadit intra ellipsim infra A. vlterius ponatur per F, contingens FK, cui æquidistet PQNM, erit igitur vt MB quadratum ad quadratum BK sic c QMO rectangulum ad quadratum FK; sed vt MB quadratum ad quadratum BK d sic PMN rectangulum ad rectangulum α K β; igitur vt QMO rectangulum ad quadratum FK sic PMN rectangulum est ad rectangulum α K β: & permutando, inuertendo vt FK quadratum ad rectangulum α K β, sic QMO, rectangulum est ad rectangulum PMN: est autem FK quadratum maius rectangulo e α K β, igitur & QMO rectangulum maius est rectangulo PMN: iterùm QMO rectangulum vnà cum quadrato ZO æquale est quadrato ZM, & PMN rectangulum vnà cum quadrato ZN, eidem quadrato ZM æquale est; æquale igitur est rectangulum QMO & vnà cum quadrato ZO, rectangulo PMN, vnà cum quadrato ZN; à quibus si inæqualia auferantur rectangula QMO, PMN, inæqualia remanent quadrata ZO, ZN: & quia QMO rectangulum maius est rectangulo PMN, quadratum ZO minus est quadrato ZN: & ZQ minus quadrato PZ; puncta igitur O & Q intra ellipsim sunt: similiter ostendentur puncta X T, & quæuis alia perimetri circuli FBG esse intra ellipsim; circulus igitur FBG totus intra ellipsim cadit: vnde cûm rectę omnes ex E centro circuli ad ellipsis peripheriam ductę priùs circulo occurrant quàm ellipsi: adeoque semidiametris eiusdem maiores sint: igitur EB, quæ in B puncto communi ellipsi & circulo terminatur omnium illarum breuissima est quæ ex E puncto ad ellipsis peripheriam duci possunt. Quod erat demonstrandum. c 35. tertij. d 99. huius. e 6. secundi.

PROPOSITIO CXXXIII.

A Puncto (H) in axe ellipseos assignato lineam ad perimetrum breuissimam ducere.



Constructio & demonstratio.

Sint D, & E foci ellipseos. Axem A C seca in F, ita vt A F sit ad F C, sicut D H est ad H E. Tum ex polo ad perimetrum aptetur D B æqualis ipsi A F, iunganturq; H B. Dico H B esse breuissimam.

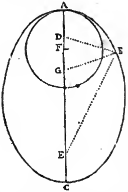
Ducatur enim ex polo E ad B recta E B, & L M tangens ellipsim in B, D B, B E [a] æquantur axi. sed D B æqualis est A F. ergo B E æqualis est F C. Ergo D B est ad B E, vt A F ad F C, hoc est ex constr. vt D H ad H E. ergo anguli D B H, E B H æquantur; æquantur [b] autem & anguli ad contingentem D B L, E B M, toti igitur anguli H B L, H B M æquales sunt; normalis igitur est H B ad tangentem, ergo per præcedentem breuissima omnium quæ ex puncto H ad perimetrum duci possunt. Factum igitur est quod petebatur.

[a] 13. sexti.
[b] 116. hu- ius.

Si punctum F incidat in polum D, aut inter A, & D; tunc breuissima ex dato puncto H ad perimetrum erit pars axis, vt patet constructionem ac demonstrationem priorem consideranti.

PROPOSITIO CXXXIV.

IN data ellipsi circulum describere maximum eorum qui ellipsim in termino axis contingunt & ab ellipsi comprehenduntur.



Constructio & demonstratio.

POli ellipseos sint D &, E. Fiat vt C D ad D A, sic E F ad F D. Dico circulum centro F interuallo A descriptum eum esse qui petitur. Cùm enim ex const. sit C D, ad D A, vt E F ad F D, patet ex præced. F A esse breuissimam omnium, quæ à puncto F ad perimetrum duci possunt; circulus igitur centro F per A descriptus tangit ellipsim, quod erat primum: quod autem tangentium intra ellipsim maximus sit, sic ostendo. Sume vlterius punctum aliquod G pro centro maioris circuli, quoniam igitur E G est ad G D, in minori ratione quàm E F ad F D, hoc est quàm C D ad D A, sit exemp. grat. vt E G ad G D, sic C P ad P A: eritque F A necessariò maior quàm D A: adeoque punctum F cadet vltra polum D versus E: si igitur ex polo D ad perimetrum aptetur D B æqualis G A, iungaturque G B, patet ex præced. G B fore minimam omnium quæ ex G ad perimetrum ducuntur. Quare G A maior est quàm G B, circulus ergo centro G per A descriptus extra ellipsim cadit. similiter ostendemus quemlibet circulum alium maiorem circulo qui interuallo F A ante descriptus est, caderet

extra

extra ellipſim: ergo ille omnium intra ellipſim tangentium, maximus eſt. In datâ igitur ellipſi, &c. Quod erat faciendum.

Corollarium.

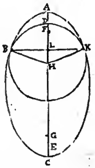
EX huius propoſitionis diſcurſu clarè conſtat circulos omni interuallo deſcriptos quod minus eſt interuallo F A ellipſim intra contingere in puncto A, ſi centro inter F & A conſtituto pertingant vſque ad A. verticem axeos. Illi etenim circuli contingent eum qui radio F A deſcriptus eſt, eoque minores erunt; quare etiam ellipſim intra contingent cuius axis A C.

PROPOSITIO CXXXV.

SIt A B C ellipſeos axis maior A C & in illo poli D, E, fiatque vt C D ad D A ſic E F ad F D, & D G ad G E.

Dico ex quouis puncto rectæ F G circulos poſſe deſcribi qui ellipſim intus in duobus punctis contingant: centra verò illorum conſiſtere inter F & G excluſis terminis.

Demonſtratio.



SVmatur enim quoduis in F G recta punctum H, & ex H linea ducatur H B, breuiſsima illarũ [a] quæ ex H ad peripheriam duci poterunt; dein ex B ordinatim ad axem ponatur B L K, & iunge H K, H B, patet per elementa H K iunctam æqnari H B, adeoque circulum centro H interuallo H B deſcriptum tranſire per K & B: & cùm H K, H B lineæ ſint breuiſsimæ per conſtructionem, patet circulum B D K, totum cadere intra ellipſim ac proinde eam in B & K, punctis contingere. Quod autem centra circulorum ellipſim in duobus punctis contingentium conſiſtant inter F & G excluſis terminis, ex eo patet quod F A, G C lineæ breuiſſimæ ſint illarum quæ ex F & G, ad peripheriam duci poterunt, adeoque circuli centro F vel G, & interuallo quouis maiore quàm ſit F A vel G C deſcripti ellipſim ſecent: radijs verò F A vel G C deſcripti [b] maximi ſint, illorum qui ellipſim intus in vno tantum puncto contingunt.

a 133 huius.

b 134. huius.

PROPOSITIO CXXXVI.

EAdem manente figura: propoſitum ſit in axe punctum deſignare quo centro circulus deſcribatur, qui ellipſim in dato puncto intus contingat.

Conſtructio & demonſtratio.

SIt datum in peripheria punctum B, per quod ſi acta intelligatur contingens, demittatur ex B linea B H, normalis ad tangentem, occurrens axi in H. Manifeſtum eſt H punctum ſatisfacere petitioni. nam cùm [c] H B linea breuiſsima ſit earum quæ ex H ad peripheriam duci poſſunt, continget circulus centro H interuallo H B deſcriptus ellipſim in [d] puncto B; igitur, &c. Quod erat faciendum.

c 132. huius.

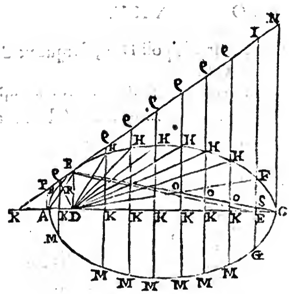
d 135. huius.

PROPOSITIO CXXXVII.

ELlipſeos axis ſit A, C, poli D, E, ex quibus ductæ ſint D B, E F G normales axi; ellipſim autem tangat K B I in B, occurrens axi in K, rectæ verò G F in I., iungaturque D F.

Dico rectangulum F I G quadrato D E æquale eſſe.

Demonſtratio.



a 114. huius.
b 120. huius.
c 121. huius.

QVoniam D B , E B ductæ ſunt è polis ad contactum, anguli K B D, I B E [a] æquales ſunt. ſed, quia D B, E I parallelæ, angulus K B D angulo E I B æqualis eſt, æquantur igitur anguli I B E, E I B, ergo B E, I E æquales ſunt. Deinde quia rectangula C E A, C D A [b] æqualia ſunt, etiã quadrata E F, D B ſunt æqualia, adeoque & rectæ E F, D B æquales. Quare cùm D B, B E [c] æquentur E F, F E, etiam B E, D F æquales erunt. Atqui B E oſtenſa eſt æqualis E I. ergo & D F eſt æqualis E I, & quadrata proinde D F, E I æqualia ſunt. ſed quadrata D E, E F, æquantur quadrato D F; &, quia G F biſecta eſt in E eique adiecta F I, rectangulum G I F cum quadrato E F æquatur quadrato E I. quadrata ergo D E, E F æquantur rectangulo G I F cum quadrato E F. Dempto igitur communi quadrato E F, remanent æqualia rectangulum G I F & quadratum D E. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXVIII.

IIſdem poſitis ducantur quotcunque aliæ Q, H, K, M, normales axi. Dico rectangula H, Q, M, quadratis D K eſſe æqualia.

Demonſtratio.

ELlipſim tangat C N in C, occurrens tangenti B N in N, ducaturque B C ſecans Q M in O, & I G in S. quoniam N C, I G, Q M ſunt normales axi, æquidiſtant. ergo per ea quæ propoſ 99. huius demonſtrauimus, rectangulum F I G, æquatur quadrato S I, & rectangulum H Q M quadrato Q O æquale eſt: quare vt quadratum I S ad quadratum Q O, hoc eſt vt quadratum S B ad quadratum O B, hoc eſt vt quadratum E D ad quadratum K D, ita rectangulum F I G ad rectangulum H Q M, & permutando vt rectangulum F I G ad quadratum E D, ita rectangulum H Q M ad quadratum K D, ſed rectangulum F I G per præced. æquatur quadrato E D. Ergo rectangulum quoque H Q M æquatur quadrato K D.

Similiter demonſtrabimus ad alteram partem poli D, rectangula H Q M quadratis K D eſſe æqualia, tangat enim ellipſim A P, in A occurrens tangenti in P, & tactus iungat A B ſecans Q M in R. in triangulo B C N, Ducatur aliqua Q O, parallela N C normali ad axem, ita ſe habens ad Q B, vt Q R eſt ad Q B. erit igitur permu-

permutando vt QB ad BQ hoc est vt KD ad DK, ita QO ad QR. ergo vt quadratum KD ad quadratum DK, ita quadratum QO ad quadratum QR, hoc est [a] rectangulum HQM ad rectangulum HQM. permutando igitur vt rectangulum HQM ad quadratum KD, ita rectangulum HQM ad quadratum DK. Atqui suprà demonstratum est rectangulũ HQM (illud nempè quod est versus C) æquari quadrato KD, ergo rectangulum quoque HKM quod est versus A, æquatur quadrato DK. Omnia igitur rectangula HKM, &c. Quod erat demonstrandum.

a Inde propt 99. huius.

Corollarium.

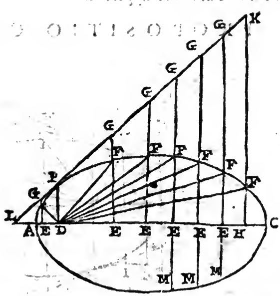
EX discursu demonstrationis iam allatæ licet colligere quadrata tangentium CN, AP, quadratis CD, DA esse æqualia.

PROPOSITIO CXXXIX.

DAta sit ellipsis cuius axis AC, poli D, H, ex polo D ducta sit ad perimetrum DP normalis axi, & in P ellipsim tangat linea GPG. Ducantur autem quotcunque normales axi GFE, iunganturq; DF, DF.

Dico lineas omnes DF, lineis omnibus GE æquales esse.

Demonstratio.



PRoducatur vna rectarum GE in M. per præced. rectangulum FGM æquatur quadrato DE. addito igitur communi quadrato EF, æquantur quadrata DE, EF, hoc est quadratum DE, rectangulo FGM cum quadrato EF, hoc est, [b] quadrato GE. Quia igitur quadratum DF æquatur quadrato GE, etiam recta DF rectæ GE æqualis est. Eodem discursu reliquæ omnes DF, reliquis omnibus GE æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

b 6. secundi.

In libro de hyperbola, tria sequentia theoremata licet sint demonstranda quòd ab hyperbolę proprietatibus dependeant, ob miram tamen cum ellipticis affectionibus connexionem visum est non alienum hoc loco proponere.

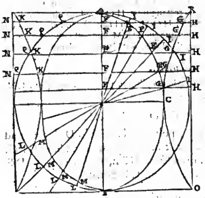
PROPOSITIO CXL.

EAdem manente figura, si rectis DF è polo ductis æquentur lineæ EFG normales ad axem AC.

Dico lineam per puncta G ductam esse rectam quæ ellipsim contingat in P.

Demonstratio manifesta est ex propositione præcedenti.

PROPOSITIO CXLI.

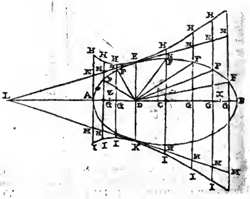


DAta sit ellipsis axem habens A B, centrum D sumatur in axe punctum quod primò sit centrum ellipseos, ex eo ducatur ad perimetrum normalis axi D G ac deinde quotcunque aliæ D E, D E.: quibus æquales fiant lineæ F E G axi normales.

Dico lineam per puncta G descriptam esse hyperbolam quę idem habeat cum ellipsi centrum D, eamque contingit in C.

Demonstrationem vide in lib. de hyperbola.

PROPOSITIO CXLII.



DAta sit ellipsis axem habens AB, centrum C, polos X, Z. in axe sume punctum aliquod D inter centrum C & polum D, ex quo ducatur ad perimetrum D E normalis axi, ac deinde quævis aliæ D F, D F; quibus æquales fiant G F H axi normales.

Dico lineam per puncta H, H descriptam esse hyperbolam, quæ ellipsim tangat in F.

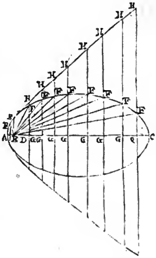
Demonstrabitur in libro de hyperbola.

PRO-

PROPOSITIO CXLIII.

Data rursum sit ellipsis axem habens AC, polos D,Q, in axe sumatur punctum E inter polum D & verticem A, ex quo ducatur ad perimetrum normalis axi EB: & quotuis aliæ EF, quibus æquales fiant GFH axi normales.

Dico lineam quę per puncta H describitur hyperbolam esse quæ ellipsim ambiat & tangat in puncto B.

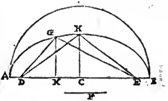


Demonstrationem dabimus in libro de hyperbola.

PROPOSITIO CXLIV.

Datâ basi aggregato laterum & altitudine triangulum exhibere.

Constructio & demonstratio.



Dato aggregato laterum ponatur AB, æqualis, qua bifariam diuisa in C fiat DE æqualis basi trianguli bifariam diuisæ in C sic vt vtrimque relinquantur æquales AD, BE, altitudini autem sit æqualis F, ex lateribus AC, CB, DE fiat triangulum DHE: (nam AC, CB, simul sumptæ maiores sunt DE,) erit DHE isosceles. Deinde fiat vt quadratum HC ad F quadratum, ita rectangulum ACB ad AKB, & erigatur KG æqualis F parallela HC, & iungantur DG, GE. Dico DGE, esse triangulum quæsitum. quoniam ACB, rectangulum est ad AKB rectangulum, vt quadratum HC ad quadratum F, hoc est GK, quadratum, erunt puncta A,G,H,B ad eandem ellipsim cuius AB, est axis: & quia AD, ipsi EB, itemque DH, HE, æquales sunt ipsi AB, erunt DE, a puncta ex cōparatione facta siue foci ellipseos, quare DGE, latera æqualia sunt axi AB, hoc est aggregato laterum estque basis data DE, & altitudo F hoc est GK. Igitur exhibuimus triangulum quod quærebatur.

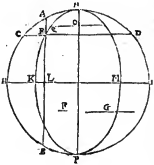
a Corol. 111. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXLV.

Rectam A B, ſubtenſam cuiuſuis arcus circuli A B C, alterâ ſecare C D, eidem ad angulos rectos vt C E ad E D, datam obtineat rationem F ad G.

Conſtructio & demonſtratio.



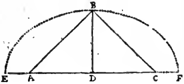
Libro de circulorum proprietatibus propoſuimus hoc problema: ſed quoniam eius demonſtratio ab elliptica proprietate dependet, idcirco in hunc locum eam diſtulimus, conſtructio vero eſt. Ducatur diameter H I normalis ad A B ſecans A B, in L. Fiatque vt F ad G, ſic H K ad K I: ſumptâ deinde I M æquali ipſi H K, diuidatur diameter H P, in O puncto vt diuidi-tur K M in L: deinde rectangulo N O P, fiat æquale quadratum L E; tandem ducatur per E, recta normalis C E D. Dico C E D, diuiſam in E, ſecundùm rationem F ad G. Quoniam ſunt lineæ N P, K M ad angulos rectos bifariam diuiſæ; igitur deſcripta ponatur circa illas tamquam axes ellipſis N K P, erunt itaque O Q, L E, ordinatim poſitę ad ſingulos axes: & quia axes ſimiliter diuiſæ ſunt in O & L, eſtque rectangulum N O P æquale quadrato L E, patet a punctum E eſſe ad ellipſim per puncta N, K, P, M deſcriptam. ergo eſt vt H K ad K I, hoc eſt vt F ad G, ſic C E ad E D, patet rectam D applicatam eſſe in circulo normaliter ad C D, vt C E ad E D datam rationem obtineat F ad G. Quod fuit demonſtrandum.

a 74. huius.

PROPOSITIO CXLVI.

Data recta A C & altitudine B D, ellipſim deſcribere cuius poli ſint A, & C.

Conſtructio & demonſtratio.



Fiat ſuper A C linea in altitudine B D triangulum iſoſceles A B C, dein A C linea vtrimque æqualiter producatur in E & F: vt tota E F ſit æqualis duabus A B, B C, tum per E, B, F, puncta ellipſis deſcribatur: dico illam eſſe quæ petitur. Quoniam E F linea diuiſa eſt bifariam in D & non bifariam in A: erit E A F b rectāgulum vnà cum quadrato A D, æquale quadrato E D hoc eſt per conſtructionem quadrato A B; ſed etiam quadrato A B æqualia ſunt quadrata A D, B D; dempto igitur communi quadrato A D, manet E A F rectangulum æquale quadrato B D id eſt quartæ parti figuræ. eodem modo oſtenditur quadrato B D æquari rectangulum F C E: quare c A & C, foci ſunt deſcriptæ ellipſeos E B F. data igitur linea & altitudine, &c. Quod erat faciendum.

b 5. ſecundi.

c Ex 120. huius.

Corol-

Corollarium.

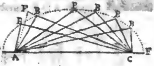
Hinc ſequitur dato quouis triangulo iſoſceli A B C continente ad verticem, angulum quemcunque, deſcribi poſſe ellipſim cuius foci ſint extrema baſis trianguli dati A B C. demonſtratio patet ex propoſitione.

PROPOSITIO CXLVII.

Super AC linea deſcripta ſint quotcunque triangula iſoperimetra ABC, AGC.

Dico puncta G, B, B eſſe ad eandem ellipſim cuius poli ſint A & C.

Demonſtratio.



Producatur A C vtrimque æqualiter in D & E, vt tota D E ſit æqualis duabus A B, B C, tum per puncta D, E, G ellipſis deſcribatur, dico illam tranſire per reliqua puncta B, B. ſin verò transeat ſupra vel infra B. ac primum ſupra per punctum F, producta C B donec peripheriæ occurrat in F, iungantur A F. quoniam igitur G F puncta ad ellipſim ſunt, cuius [a] poli A & C, erunt A G C, A F C triangula [b] iſoperimetra : eſt autem A G C triangulum per conſtructionem iſoperimetrum triangulo A B C; igitur A F C. A B C triangula ſunt iſoperimetra. quod fieri non poteſt. quare D G E, ellipſis non tranſit ſupra B, ſed nec infra B, cadere eodem modo demonſtrabitur. ergo per B, B puncta, igitur G B B ſunt ad ellipſim cuius poli ſunt A, C. Quod erat demonſtrandum.

[a] *Patet ex præcedenti.*
[b] *Patet ex 121.*

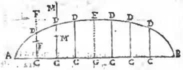
ELLIPSEOS
PARS QVINTA

Varias exhibet ellipsis geneses.

PROPOSITIO CXLVIII.

SIt AB linea vtcunque diuisa in C, & ex C quotcunque erigantur parallelę CD, fiatque vt ACB rectangulum ad rectangulum ACB sic DC quadratum ad quadratum DC.
Dico ADB puncta esse ad eandem ellipsim vel circulum.

Demonstratio.



AB bisectâ in G, erigatur GE parallela ipsis CD, fiatque vt rectangulum ACB ad rectangulum AGB, sic quadratum CD ad quadratum GE, intelligatur deinde descripta esse ellipsis cuius diametri coniugatæ sint AG, GE: si ergo ellipsis non transit per punctum D, occurrat rectę CD supra vel infra D in F. quia AG, EG sunt diametri coniugatæ, erunt DC, ipsi EG parallelæ ordinatim positæ ad diametrum AB. Quare cùm ellipsis dicatur transire per F, erit [a] quadratum FC ad quadratum EG vt rectangulum ACB ad rectangulum AGB, hoc est ex constr. vt quadratum DC ad quadratum EG: Quod est absurdum. non igitur punctum vllum F supra aut infra D, est ad ellipsim, sed ipsum D punctum ad ellipsim est. sumatur iam aliud quodlibet punctum D, exempli gratia punctum propius sequens; si rursum ellipsis non transit per D, occurrat rectæ CD supra vel infra D in M. Quoniam est ex hypothesi vt quadratum DC ad quadratũ DC, sic rectangulum ACB ad rectangulum ACB, & ex constr. vt quadratum DC ad quadratũ EG, ita rectangulum ACB ad rectangulum AGB: erit ex æquali vt quadratum DC ad quadratum EG, ita ACB rectangulũ ad rectangulum AGB: sed etiam est quadratum MC ad quadratum EG, vt rectangulum ACB ad rectangulum AGB cùm punctum M ponatur esse ad ellipsim. Ergo quadrata DC, MC ad quadratum EG, eandem habent rationem. Quod est absurdum. Non igitur punctum M aut aliud vllum præter D ad ellipsim est. simili discursu reliqua puncta D ad ellipsim esse demonstrabimus. ex quibus constat veritas Theorematis.

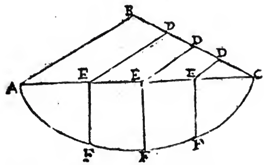
[a] 4. huius.

PROPOSITIO CXLIX.

SIt ABC triangulum quodcunque, diuisóque latere BC vtcunque in punctis DD: ducantur ex D rectæ DE parallelæ AB, & ex A demittantur lineæ EF sic vt quadrata EF, sint BDE rectangulis æqualia.
Dico puncta A, F, C esse ad eandem ellipsim.

Demon-

Demonstratio.



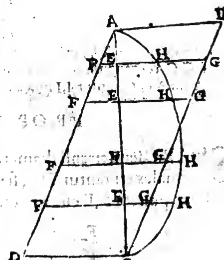
VT BDB rectangulum ad rectangulum BDE, sic BDC, rectangulum est ad rectangulum BDC, hoc est rectangulum AEC ad rectangulum AEC: sed vt BDB rectangulum est ad rectangulum BDE, sic EF quadratum est ad quadratum EF, igitur vt rectangulum AEC est ad rectangulum AEC, sic EF quadratum est ad quadratum EF. ergo [a] AFC, puncta sunt ad ellipsim. [a] Per 149. huius.

PROPOSITIO CL.

SIt AB, CD parallelogrammi diameter AC, ducanturq; AB lateri quotcumque parallelæ FG, secantes AC lineam in E: dein fiant inter FE, EG mediæ EH.

Dico puncta A, C, & omnia puncta H esse ad eandem ellipsim, nisi sint ad circulum.

Demonstratio.



RAtio FEG rectanguli ad rectangulum FEG est composita ex ratione FB ad FE, idest AE ad AE, & ex EG ad EG, idest EC ad EC: sed ex ijsdem componitur ratio rectanguli AEC ad AEC, rectangulum, igitur vt FEG rectangulum ad rectangulum FEG, hoc est quadratum EH ad quadratum EH, sic AEC rectangulum est ad rectangulum AEC. quare [b] AH, HC puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum. [b] Ibid.

Corollarium.

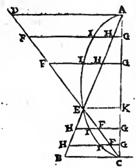
SI AB recta sit normalis ad AC, & illi fuerit æqualis, erunt AHH puncta ad eundē circulum: erit enim AEC rectangulum æquale rectangulo FEG hoc est quadrato EH. adeoque puncta HH ad circulum.

PROPOSITIO CLI.

SEcent se in E duæ quæuis lineæ A B, C D quas cōiungant duę parallelæ A D, B C; iungantur item puncta A C: tum rectę ducantur F G parallelæ lineis A D, B C, occurrentes A B lineæ in H H, fiantq; H G F, rectangulis æqualia quadrata G I.

Dico puncta I, I, I esse ad ellipsim.

Demonstratio.



RAtio H G F rectanguli ad rectangulum H G F est composita ex ratione H G ad H G, id est A G ad A G, & ex ratione F G ad F G, id est G C ad G C: sed ex iisdem est composita ratio rectanguli A G C ad A G C. igitur vt H G F rectangulum est ad rectangulum H G F hoc est quadratum I G ad quadratum I G, sic A G C rectangulum est ad rectangulum A G C: quare I, I puncta [a] sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

a 149. huius.

Corollarium.

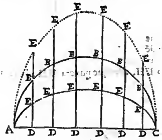
DVcatur ex E puncto intersectionis recta E K parallela lineæ A D: si A K, E K, K C fuerint continuæ, & E K linea normalis ad rectam A C. dico I, I, puncta esse ad circulum. cùm enim sit vt A K C rectangulum ad A G C rectangulum, sic E K quadratum ad quadratum I G: (id enim eodem discursu probabimus, quo rectangula A G K ostendimus esse ad rectangula A G K vt quadrata G I ad quadrata G I.) erit permutando vt A K C rectangulum ad quadratum E K sic A G C rectangulum ad quadratum G I. adeoque quadratum I G æquale rectangulo A G C. igitur, I, I sunt ad circulum.

PROPOSITIO CLII.

SIt A B C semicirculi diameter A C, diuisa vtcunque in D D, & ex D normales erigantur D E, fiantque vt B D ad B D, sic E D ad E D.

Dico puncta E, E esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.



VT quadratum D B ad quadratum D B, sic E D quadratum est ad quadratum E D: sed vt quadratum B D ad quadratum B D sic A D C rectangulum est ad rectangulū A D C: igitur vt quadratum E D ad quadratum E D sic A D C rectangulum est ad rectangulum A D C. Quare [b] E, E puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

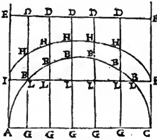
b Ibid.

PROPOSITIO CLIII.

SVper ABC semicirculi diametro AC rectangulum describatur AF: ductisque lineis DG parallelis lateri AE quæ circulo occurrant in BB, ducatur quæuis IK parallela rectæ ED occurrens DG lineis in LL. fiatque vt AI ad IE sic BH ad HD.

Dico puncta HH esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.



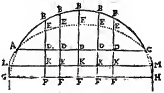
VT AE ad AI, hoc est GD ad LD, sic BD est ad DH, igitur permutãdo diuidendo, iterumque permutando vt GB ad LH, sic BD ad DH, atqui BD est ad HD, vt BD ad HD, sunt enim ambæ rationes BD ad HD, eadem rationi AE ad IE. quare vt GB ad LH, sic GB ad LH: & permutando vt GB ad GB, sic LH ad LH: & vt quadratum GB ad quadratum GB, sic LH quadratum ad quadratum LH: est autem vt quadratum GB ad quadratum GB sic AGC rectangulum ad rectangulum AGC, id est ILK, rectangulum ad rectangulum ILK, igitur vt LH, quadratum est ad quadratum LH, sic ILK rectangulum est ad rectangulum ILK: quare [a] H,H puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum. [a] *ibid.*

PROPOSITIO CLIV.

SIt ABC segmentum circuli quodcunque, cuius AC subtensa, diuisa vtcunque in DD, erigantur ex D normales DB, fiatque vt BD ad BD sic ED ad ED.

Dico puncta E,E esse ad ellipsim.

Demonstratio.



PErfecto semicirculo ABC: ducatur GH diameter circuli GBH parallela lineæ AC, quæ BD, lineas productas secet in FF: fiatque vt BD ad DF, sic ED ad DK: tum ex G & H rectæ erigantur GL, HM parallelæ lineis BF secantes KK lineam in L & M. Quoniam est vt BD ad DF, sic DE ad DK, erit permutando, vt BD ad ED, sic DF ad DK. Atqui BD est ad DE, vt BD ad DE. igitur vt DF ad DK, sic DF ad DK: quare puncta K,K ad eandem lineam, & quidem parallelam lineæ GH. Rursum cùm sit vt BD ad DF, ita ED ad DK, erit componendo & permutando BF ad EK, vt DF ad DK. igitur vt BF ad EK, sic BF ad EK, & rursum permutando vt BF ad BF, sic EK ad EK, & vt quadratum

quadratum BF ad quadratum BF, sic EK, quadratum ad quadratum EK: sed vt BF quadratum ad quadratum BF, sic HFG rectangulum est ad rectangulum HFG, id est MKL rectangulum ad rectangulum MKL, igitur vt MKL rectangulum ad rectangulum MKL sic quadratum EK ad quadratum EK. quare a E, E puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

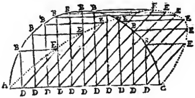
a 119. huius.

PROPOSITIO CLV.

ESto ABC semicirculi diameter AD, quam in D secent quotcunque normales BD: dein rectis BD fiant æquales BE parallelæ diametro AC.

Dico puncta E,E esse ad ellipsim cuius diameter est AC.

Demonstratio.



DVcantur rectæ DE. quoniam anguli BDC recti sunt, & BE parallelæ, anguli quoque DBE erunt recti. quadrata igitur DE æquantur quadratis, BD, BE, hoc est quia BD, BE sunt æquales, dupla sunt quadratorum BD. ergo vt quadratum BD ad quadratum BD, hoc est vt rectangulum ADC ad rectangulum ADC, ita quadratum DE ad quadratum DE. Sunt verò & DE rectæ inter se parallelæ: cùm enim anguli DBE recti sint, & latera BD, BE æqualia, erunt BDE semirecti. cùm ergo etiam BDC rectus sit, reliqui EDC sunt semirecti, adeoque æquales: vnde DE parallelæ. Puncta igitur E,E b sunt ad ellipsim. Quod autem AC sit diameter, facile apparebit si perfecto circulo ellipsis eadem constructione ad partem alteram producatur, tunc enim parallelæ omnes DE à recta AC bifariam diuidentur.

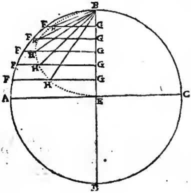
b Ibid.

PROPOSITIO CLVI.

CIrculum ABC secent ad angulos rectos diametri AC, BD ductisque rectis FG quę AC, diametro æquidistent, demittantur ex B lineæ BH æquales rectis FG secantes FG lineas in HH.

Dico puncta B,H,E esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.



QVoniam FG quadrato æquale est rectāgulū BGD hoc est BGE, a rectangulum bis sumptum vnà cum quadrato BG, erit & quadratum HB æquale rectangulo BGE bis sumpto vnà cum quadrato BG: sed HB quadratum est æquale quadratis HG, BG, ablato igitur communi quadrato BG manet HG, quadratum æquale rectangulo BGE bis sumpto. similiter reliqua quadrata HG dupla sunt rectan-

rectangulorum BGE: igitur vt quadratum HG ad quadratum HG: sic BGE rectangulum est ad rectangulum BGE. quare puncta B, E, & omnia puncta H, ad eandem sunt ellipsim. Quod erat demonstrandum.

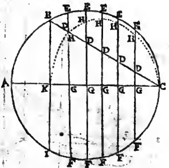
PROPOSITIO CLVII.

ESto ABC circuli diameter AC & ex C recta quæuis ducta CB occurrant circuli perimetro in B, dein ex B demissa recta BI quę AC, diametrum ad rectos angulos secet in K. ducantur quotcunque lineæ EF parallelæ rectæ BI occurrentes AC diametro in G, & lineę BC in D: fiantque EDF rectangula æqualia quadratis GH.

Dico KHC puncta esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.

VT EDF rectangulum ad rectangulum EDF, sic BDC rectangulum est ad rectangulum BDC, id est rectangulum KGC ad rectangulum KGC: sed (quemadmodum alternando patet ex hypothesi) vt EDF rectangulum ad rectangulum EDF, sic HG quadratum est ad quadratum HG: igitur vt KGC rectangulum est ad rectangulum KGC, sic HG quadratum est ad quadratum HG. quare KHC puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.



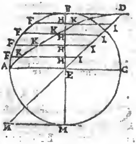
PROPOSITIO CLVIII.

SEcent ABC circulum ortogonaliter diametri AC, BE actaq; per B tangente BD: ducatur per E centrum recta quæuis ED, occurrens tangenti BD in puncto quouis D. dein rectæ ducantur FHI, parallelæ tangenti BD, occurrentes EB diametro in HH, & ED lineæ in I, I: fiatque vt FH ad FH, sic IK ad IK.

Dico AKD puncta esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.

PRoducta BE diametro in M. producatur & DE linea donec aetæ per M tangenti occurrat in N. Quoniam BD, NM, HI lineæ æquidistant, erit vt rectangulum BHM ad rectangulum BHM, sic DIN rectangulum ad rectangulum DIN; sed est vt BHM rectangulum ad rectangulum BHM, sic FH quadratum ad quadratum FH, id est quadratum IK ad quadratum IK: igitur vt DIN rectangulum ad rectangulum DIN, sic est quadratum IK ad quadratum IK. quare AKD puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

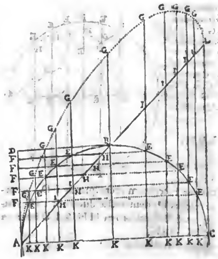


PROPOSITIO CLIX.

Circulum A B C cuius diameter A C contingant duæ lineæ A D, B D secantes sese ortogonaliter in D: iunctisque punctis A B, agatur per C tangens C L, occurrens A B lineæ in L. dein rectæ ducantur quotcunque F E parallelæ lineę D B occurrentes A B lineæ in H H: & circulo in E E. tum per E rectæ ducantur G K parallelę lineæ A D occurrentes A C diametro in K & A L lineæ in I I. fiantque F E lineis æquales E G.

Dico puncta A G L esse ad ellipsim.

Demonstratio.



Vt A D est ad D B, sic A F est ad F H: sed A D, D B lineæ sunt æquales, igitur & A F, F H lineæ æquantur, quare & E K, F H lineæ sunt ęquales. Rursum cùm sit vt A F ad F H, sic E I ad E H, erunt E I, E H lineæ inter se æquales: est autem ex constructione F E linea æqualis lineæ E G: igitur tota I G, est æqualis toti F H, hoc est F A id est E K. quare vt quadratum E K ad quadratum E K, sic I G quadratum est ad quadratum I G. sed vt E K quadratum est ad quadratum E K, sic A K C rectangulum est ad rectangulum A K C. id est A I L rectangulum ad rectangulum A I L, igitur vt quadratum I G est ad quadratum I G, sic A I L rectangulum est ad rectangulum A I L. Quare A G L puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

Quod si eadem constructio ad alteram partem continuetur, perficietur ellipsis, altera sui parte, quæ intra circulum cadet. Vbi hoc notatu dignum occurrit, quod licet circulus & ellipsis sese inuicem secent, eandem tamen rectam D A in sectionis mutuæ puncto A contingant. Quod enim circulus contingat rectam A D patet ex hypothesi: quod eandem contingat etiam ellipsis, inde fit manifestum quod omnia perimetri elliptici puncta sint in lineis G K quæ inter puncta C & A, ipsi D A ducuntur parallelæ.

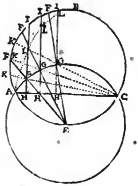
PROPOSITIO CLX.

Secent se duo circuli A B C, A D C vt illorum alter A B C transeat per E centrum circuli A B, iunctisq; punctis A C ducantur ex E lineæ quæcunque E F occurrentes circulo A B C in punctis F & A D C circulo in punctis G: tũ per G rectæ agantur H I normales ad lineam A C, occur-

occurrentes AC lineæ in HH, & circulo ABC in II: fiantq; rectis GF æquales lineę GL.

Dico puncta ALL esse ad ellipsim.

Demonstratio.



DVcantur ex C per G lineæ CGK. vt KGC rectangulum est ad rectangulum KGC, sic a FGE rectangulum est ad rectangulum FGE: sed est b vt KGC rectangulum ad rectangulum KGC, sic GH linea ad lineam GH, & vt FGE rectangulum ad rectangulum FGE, sic FG linea ad lineam FG, igitur vt GH ad GH, sic FG ad FG, id est LG ad LG, & componendo permutando LH ad LH, vt GH ad GH. Quare puncta ALL sunt ad ellipsim.

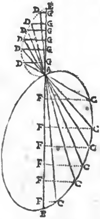
a Per elementa. b Coroll. 24. lib. de circulo.

PROPOSITIO CLXI.

SIt ABC ellipsis diameter quæcunque AB, actisque per A lineis CD, quę ellipsi occurrant in CC. fiat vt AC ad AC, sic AD ad AD, & vt AC ad AD, sic AB ad AE.

Dico puncta A, D, E ad eandem ellipsim esse.

Demonstratio.

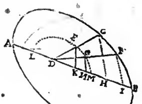


QVoniam DG, FG sunt parallelæ, triangulaque proinde FCA, DGA similia, erunt vt lineæ CA ad lineas AD singulæ ad singulas, ita singulæ FC ad singulas GD. Atqui singulæ CA sunt ad singulas AD vt BA ad AE. Ergo singulæ FC sunt ad singulas DG, vt BA ad AE. Quare quam rationem habet vna FC ad vnam DG, eandem habent singulæ reliquæ FG ad singulas reliquas DG. Igitur permutando vt sunt FC ad FC, ita GD sunt ad DG, adeoque vt sunt quadrata FC ad quadrata FC, ita quadrata GD sunt ad quadrata GD. similiter demonstrabimus, vt AF sunt ad AF, sic esse AG ad AG. Vnde vt reliquæ FB sunt ad reliquas FB, ita reliquæ GE sunt ad reliquas GE: Quare cùm rectangula AFB rationem habeant ad sese inuicem compositam ex rationibus AF ad AF, & FB, ad FB, quæ ostensæ sunt eædem esse rationibus AG ad AG, & GE ad GE, ex quibus componitur ratio rectangulorum AGE; erunt vt rectangula AFB ad rectangula AFB, sic rectangula AGE, ad rectangula AGE. Atqui rectangula AFB sunt ad rectangula AFB, vt quadrata FC ad quadrata FC, hoc est per superiùs demonstrata, vt quadrata GD ad quadrata GD: ergo rectangula AGE sunt ad rectangula AGE, vt quadrata GD ad quadrata GD. Puncta igitur DA, ADE sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXII.

ESto A B C ellipsis diameter quæuis A B, diuisa vtcunque in D: & ex D ad peripheriam rectæ ducantur D C, D F quæ proportionaliter diuidantur in E & G: dein A D diuidatur in L, & D B in M, vt DC, DF diuisę sunt in E & G.

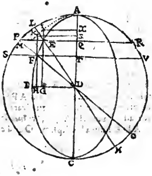
Dico L E G M puncta esse ad ellipsim.



Demonstratio.

DVcantur ex C & F ordinatim lineæ C H, F I ad A B, diametrum quibus ex E & G parallelæ ducantur E K, G N vt D C ad D E, sic D F ad G D, igitur vt C H ad E K, sic F I ad G N, & E K ad G N, vt C H ad F I: igitur & quadratum E K ad quadratum G N, vt C H quadratum ad quadratum F I. Deinde, quoniam D I est ad D N, vt D F ad D G, & D A est ad D L, vt D F ad D G, erit vt D I ad D N, sic D A ad D L, ergo vt vna antecedens D I ad vnum consequens D N, (hoc est vt D F ad D G, hoc est vt D C ad D E, hoc est vt D H ad D K) ita ambæ antecedentes, hoc est tota A I ad ambas consequentes, hoc est totam L N. similiter inferemus A H esse ad L K, vt D H ad D K. Vnde A I est ad L N, vt A H ad D K, & permutando A I est ad A H, vt L N ad L K. præterea, quoniam est vt D F ad D G (hoc est vt tota D B ad totam D M) sic ablata D H ad ablatam D N, erit & reliqua I B ad reliquam N M, vt tota D B ad totam D M. Similiter inferemus H B esse ad K M, vt D B ad D M. Ergo I B ad N M, vt H B ad K M, permutando igitur ac inuertendo H B ad I B, vt K M ad N M. Cùm igitur ostenderimus rationes A H ad A I, & A K ad A N, item rationes H B ad I B, & K M ad N M easdem esse, rationes quoque rectanguli A H B ad rectangulum A I B, & rectanguli A K B ad rectangulum A N B, ex rationibus illis æqualibus compositæ, eædem erunt. sed rectangulum A H B est ad rectangulum A I B, vt quadratum C H ad quadratum F I, hoc est per superius demonstrata vt quadratum E K ad quadratum G N. Ergo rectangulum L K M est ad rectangulum L N M, vt quadratum E K ad quadratum G N. ergo puncta L, E, G, M sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXIII.

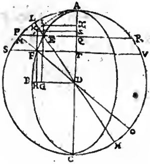


SInt A B C ellipsis axes A C, B D: ductisque ex D semidiametris quibusuis D E, D F, agantur per E & F lineæ I G, K H æquales ipsis E D, F D, parallelę verò axi A C, occurrentes axi B D in G & H.

Dico puncta A I K esse ad ellipsim cuius axis.

Demonstratio.

SVper A C. vt diametro describatur circulus A L C, & D E, D F lineæ vtrimque producantur donec circuli perimetro occur-



occurrant in L, M, N, O: actisque per E & F, lineis PER, SFV quæ circulo occurrant in R, V & AC diametro in Q & T, & æquidistent axi BD, ducantur ordinatim ad axem AC lineæ IX, KZ. Quoniam PER, SFV lineæ in E & F, proportionaliter sunt diuisæ; ratio rectanguli PER ad rectangulum SFV duplicata est rationis PE ad SF, adeoque erit PER rectangulum ad rectangulum SFV vt quadratum PE ad quadratum SF id est vt quadratum EQ ad quadratum FT, id est vt quadratum IX ad quadratum KZ. Quare cùm rectangula LEN, PFO æqualia sint rectangulis PER, SFV, etiam LEN rectangulum est ad rectangulum MFO, vt quadratum IX ad quadratum KZ: deinde cùm IG hoc est XD sit æqualis ED, & DC æqualis DN, erit XC æqualis EN. est verò & tota AC æqualis toti LN. ergo reliqua AX reliquæ LE æqualis est: adeoque AXC rectangulum æquale rectangulo LEN: eodem modo ostenditur rectangulum AZC æquari rectangulo MFO, erit igitur vt AXC rectangulum ad rectangulum AZC, a 148. huius. sic quadratum IX ad quadratum KZ. Quare [a] AIKC, puncta ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

ELLIPSIS
PARS SEXTA

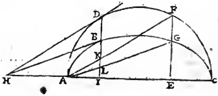
Circulum cum ellipsi comparat.

PROPOSITIO CLXVIII.

HAbeant ABC ellipsis, & circulus ADC communem axem AC, ductaque ordinatim EF, occurrat circulo in F & ellipsi in G: iunganturque AF, AG. dein ductâ DH parallelâ AF quæ circulum contingat in D, occurratq; axi in H; demittatur ex D ordinatim linea DI ad diametrum AC secans ellipsim in B & AF, AG, in K & L: iunganturque HB.

Dico AG lineam æquidistare rectæ HB.

Demonstratio.



a Schol. prop. 4. huius.

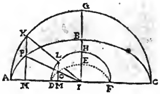
VT EG ad EF, sic IL est ad IK. sed a vt EG ad EF, sic IB est ad ID, igitur vt IL ad IK, sic IB ad ID, & permutando vt IK ad ID, sic IL ad IB, est autem vt IK ad ID, sic IA ad IH (quia AF, HD ex hypothesi æquidistant) igitur vt IL ad IB, sic IA ad IH. quare AG, HB lineæ sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXIX.

SInt ABC, DEF ellipses similes, similiterque ad idem centrum I constitutæ: & super AC, DF diametris, circuli describantur AGC, DHF: ponatur autem ex centro quædam IK occurrens circulis in L & K, punctis, è quibus normales demissæ LM, KN, secent ellipses in O & P: ducanturque lineæ IO, OP.

Dico esse vt IL ad LK, sic IO ad OP.

Demonstratio.



ERigatur ex I centro normalis IG occurrens ellipsibus in E, B, circulis verò in H & G. Quoniam tam circuli AGC, DHF quàm ellipses ABC, DEF similes sunt similiterque ad idem centrũ constitutæ, vt IG ad IB, sic IH est ad IE, sed vt GI ad BI, sic KN ad PN, &

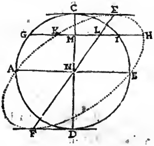
& vt HI ad EI, sic LM ad OM: igitur vt KN ad PN, sic LM est ad OM, & permutando vt KN ad LM, hoc est IN ad IM, sic PN ad OM. in directum igitur sunt I,O,P. Quare cùm KN,LM ad AC, sint perpendiculares, ac proinde inter se parallelæ, erit vt IL ad LK, sic IO ad OP. Quod erat demonstrandũ.

PROPOSITIO CLXX.

Circulum ABC secent diametri duæ AB,CD ad rectos sese angulos decussantes, actæque per C & D lineę quę circulum contingant in C & D, contingant etiam ellipsim AEB cuius aliqua sit diameter AB. dein quæuis ducatur GH parallela CE, occurrens circulo in G & I, ellipsi verò in K & H, & CD lineę in M.

Dico lineas GI, HK esse æquales.

Demonstratio.



Ex contactu ponatur ad centrum EN, quæ a producta incidet in punctum contactus F ad hanc diametrum, vt patet ex alibi hoc in libro demonstratis, erunt ordinatim positæ KH, AB, vnde rectangulũ ELF est ad rectangulum ENF, vt quadratum LH ad quadratum NB, sed rectangulum ELF est ad rectangulum ENF, vt rectangulum CMD ad rectangulum CND, (cùm enim CE, DF b & KH ex hypothesi sint parallelæ, rectangulorum illorum rationes ex ijsdem rationibus componuntur,) & rectangulum CMD, est ad rectangulum CND, vt quadratum MI ad quadratum NB, quadratum igitur MI est ad quadratum NB, vt quadratum LH ad quadratum NB; æquantur ergo quadrata MI, LH, adeoque & rectæ MI, LH earumque duplæ GI, KH æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

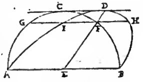
a Pr... 15. huius
b 15. huius

PROPOSITIO CLXXI.

Semicirculum ABC cuius diameter AB & centrum E, contingat recta CD, æquidistans AB, & per A & B, puncta ellipsis describatur quę diametrum habeat AB, & rectam CD contingat in puncto quouis D: ex D verò ponatur DE occurrens circuli peripheriæ in F, agaturq; per F parallela GH, secans ellipsim in H & I, circulum verò in G & F.

Dico lineam GH in I & F, trifariam esse diuisam.

Demonstratio.



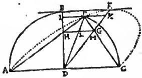
Quoniam HI per præcedentem est æqualis GF, ablata communi IF, manet FH, æqualis GI; sed ipsi FH æquatur IF (quia HI ordinatim posita est ad diametrum DE) æquantur igitur GI, IF, FH lineæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXII.

Circulum ABC cuius diametri AC, BD se ad rectos decussent in D, contingat in B linea BE, ducta deinde per A & C ellipsis AEC, contingens BE in E, occurrat circulo in F, & posita ex contactu ad centrum recta ED ducantur AF, CF: & AF quidem secans BD diametrum circuli in H, CF verò ellipseos diametrum ED in G.

Dico iunctam GH æquidistare BE.

Demonstratio.



Ponatur per F, linea IK æquidistans EB, iunctisque punctis FD, ex H recta ducatur HG, parallela IK, occurrens FD lineæ in L & ED in G. Quoniam IK æquidistat tangenti EB, a IF, FK lineæ inter se æquales sunt; quare & HG, linea æquidistans IK in L, diuisa quoque est bifariam. si iam punctum G non sit commune lineis FC, ED, HG, occurrat HG ipsi FC in M: Quoniam ergo HM æquidistat EB adeoque AC, vt AD ad DC, sic HL ad LM, quare MH in L diuisa est bifariam: sed & HG, in L bifariam est diuisa; puncta igitur G & M, vnum idemque sunt: vnde G commune lineis FC, ED æquidistant; igitur HG, BE. Quod erat demonstrandum.

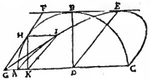
a 170. huius.

PROPOSITIO CLXXIII.

Circulum ABC cuius diametri AC, BD sese ad rectos decussant, contingat in B recta BE, ductaq; ex E recta linea ED, describatur ellipsis AEC, contingens FE, in E: ponatur quoque FG contingens circulum in H, occurrens diametro AC, in G: dein ex H ponatur HI, parallela BE occurrens ellipsi in I, iunganturque IG.

Dico IG lineam contingere ellipsim in I.

Demonstratio.



Ponatur IK æquidistans ED, erit illa ordinatim posita ad diametrum AC, cùm AC, DE diametri sint coniugatę: ex K verò erigatur KH. parallela BD, occurrens HI lineæ in H. Quoniam tam HK, BD, quàm IK, ED æquidistant, erit vt quadratum ED ad quadratum IK, sic BD quadratum ad quadratum HK: sed vt quadratum ED ad quadratum IK, sic ADC rectangulum ad rectangulum AKC, vt igitur rectãgulum ADC ad rectangulum AKC, sic BD quadratum ad quadratum HK. Quare punctum H in periphería circuli est: igitur cùm HK sit normalis & HG contingens, vt GC ad CK, sic CK ad AK: est autem IK ad diametrum AC, ordinatim posita; ergo GI b linea est tangens. Quod erat demonstrandum.

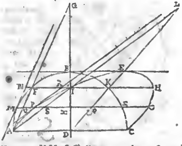
b Pars ex 30. huius.

PRO-

PROPOSITIO CLXXIV.

Circulum A B C cuius diametri se decussant ad rectos in D, contingat in B linea B E: dein per A & C puncta ellipsis describatur contingens B E lineam in E, cuius vna è diametris sit A C. iunctisque E D, ducatur ex A secans A F, & per F agatur F H, parallela B E, occurrens ellipsi in I. Tum per A & I ducatur recta A I. contingat autem circulum recta M N in M, parallela secanti A F, & ex M ducatur M O, parallela tangenti B E, occurrens ellipsi in P; ponaturq; per P, rectæ B E æquidistans P R, secans F H lineam in R.

Dico PR lineam, contingere ellipsim in P.



Demonstratio.

SEcantes A F, A I ipsis D B, D E occurrant in G & L. Deinde F H occurrat ipsi B G in T, & tangenti in N, & rectæ D E in K. similiter M O occurrat ipsi A F in V, & A I in S, & D E in Q, & G D in X. Quoniam A G D, A L D triangula, eandem habent basim A D, suntque F T, K I a æquales, erunt triangula b A G D, A L D inter easdem parallelas. Rursum cùm M O linea æquidistet F K, erunt V X, S Q lineæ æquales; est verò & M X iterum c ipsi P Q æqualis; ergo & reliqua M V, reliquę P S æqualis est: sed rectæ M V æquatur linea N F, & P S, est æqualis R I, igitur & N F, R I lineę sunt inter se æquales: est verò & F T ipsi K I æqualis, igitur N T, K R æquales sunt. Sed, quia M N tangens cadit tota extra circulum, N T maior est quàm F T, hoc est quàm K I. ergo & K R maior est quàm K I. ergo punctum R, cadit extra ellipsim. eodem modo si tam supra quàm infra M O, parallelę ducantur quotcũque, ostendentur omnia puncta rectæ P R, cadere extra ellipsim pręter punctum P; recta igitur P R, tanget ellipsim. Quod erat demonstrandum.

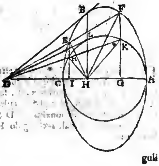
a 171. huius.
b Patet ex demonstratis.
c Clauius ad 40. 1.

PROPOSITIO CLXXV.

ESto A B C ellipsis axis A C vtcunque productus in D, ductaq; ex D linea D B, quæ ellipsim contingat in B ponatur secans altera D F, occurrens ellipsi in E & F: demissis deinde E F ex E, B, F normalibus F G, B H, E I ad axem A C, iungantur F H, E H.

Dico F G H, E I H triangula esse similia.

Demonstratio.



SVper A C diametro describatur circulus A K C, occurrens rectis F G, B H, E I in K L M, ducantur autem rectæ M H, K H, E H, F H: cùm igitur sit d vt F G ad E I, (hoc est vt G D ad I D,) sic K G ad M I, patet M K productam conuenire in D: est autem e D L contingens, igitur H K G, H M I triangula similia sunt. quare vt K G ad M I, sic H G ad H I: sed est vt K G ad M I, sic F G ad E I, igitur vt F G ad E I, sic H G est ad H I: sunt autem an-

d Schol. 4. huius.
e Patet ex 33. huius.

guli

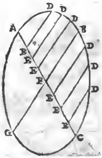
guli lateribus proportionalibus contenti recti; triangula igitur F G H, E I H sunt similia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVI.

Sit in A B C ellipsi diameter A C vna coniugatarum æqualium: ad quam ordinatim ponantur quotcunque D E.

Dico A E C rectangula æquari quadratis D E.

Demonstratio.



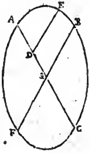
Ponatur B C altera diametrorum coniugatarum æqualium: centrum autem sectionis sit F: erit igitur A E C rectangulum ad quadratum E D, vt A F C rectangulum ad quadratum F B: sed A F C rectangulum id est quadratum A F æquatur quadrato F B, cùm diametri sint æquales, rectangulum igitur A E C æquale est quadrato D E: quod erat demonstrandum.

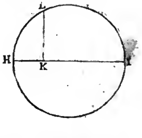
PROPOSITIO CLXXVII.

Secet A B C ellipsim vna ex diametris coniugatis æqualibus A C, quam in D secet ordinatim linea E D, sumptaque H I linea quę sit æqualis A C, descriptoque super A I circulo H L I, diuidatur H I in K, vt A C est diuisa in D, & ex K normalis erigatur K L.

Dico E D, K L quadrata esse inter se æqualia.

Demonstratio.





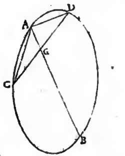
Dvcatur coniugatarũ æqualium altera F B: sectionis autem centrum sit G, rectangulum A D C, est ad quadratum E D, vt A G C rectangulum hoc est quadratum A G est ad quadratum G B: sed A G, G B quadrata sunt æqualia. igitur & A D C rectangulum est æquale quadrato E D: rursum cùm H I, A C lineæ ponantur æquales & proportionaliter in D & K diuisę, erit A D C rectangulum hoc est quadratum E D, æquale rectangulo H K I, id est quadrato L K. Quod erat demonstrandum.

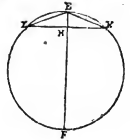
PROPOSITIO CLXXVIII.

SEcet ellipsim vna ex diametris coniugatis æqualibus A B, ad quam ponatur recta C D ordinatim, iunganturq; A C, A D; tum super E F æquali rectę A B, & in H proportionaliter diuisæ ipsi A B describatur circulus E F K: actaque per H normali I K, iungantur E I, E K.

Dico quadrata A C, A D simul sumpta, æquari quadratis I E, E K simul sumptis.

Demonstratio.





QVadrata A C, A D simul sumpta æqualia sunt quadratis a C G, A G bis sumptis, & quadrata I E, E K b æqualia sunt quadratis I H, H E bis sumptis; sed per præcedentem C G, I H quadrata sunt æqualia, suntque item æqualia inter se quadrata A G, E H, quod A G, E H rectę æquales sint ex constructione, quadrata igitur C G, A G bis sumpta æquantur quadratis G H, E H bis sumptis; igitur & quadrata duo C A, A D simul sumpta ęqualia sunt quadratis I E, E K simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

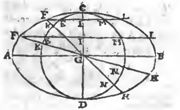
a 4. Deb. huius. b Patet ex 47. primi.

PROPOSITIO CLXXIX.

SInt A B C ellipsis axes A B, C D: & super axe minore C D, circulus describatur C E D; positis F L ordinatim ad axem C D, quæ circulo occurrant in E & M, axi autem in I, & ellipsi in L; ducantur ex F per G, centrum, F H occurrentes circulo in K & N, ellipsi autem in H.

Dico esse vt quadratum F I ad quadratum F I, sic F K H rectangulum ad rectangulum F K H.

Demonstratio.



EX scholio quartæ huius libri patet has, duas proportiones F E ad F E, & E L ad E L easdem esse cum ratione E I, ad E I: quare cùm ratio rectanguli F E L ad rectangulũ F E L, componatur ex rationibus F E ad F E, & E L ad E L, erit ratio rectãguli F E L ad rectangulũ F E L, duplicata rationis E I ad E I, ac proinde eadem quę quadrati E I ad quadratum E I: sed rectangula F E L sunt rectangula

 MFE,

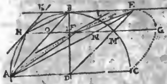
a 36 huius. MFE, hoc est rectangula a NFK, id est FKH. ergo rectangula FKH sunt ad se inuicem vt quadrata EI id est quadrata FI. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXX.

Circulum ABC cuius diametri AC, BD se decussant ad rectos, contingat in B linea BE: descripta dein ellipsi per A, C puncta quæ contingat BE lineam in E, iungantur puncta AE, AB.

Dico AFE, AHB segmenta esse æqualia.

Demonstratio.



Ducta HK parallela ipsi AB quæ circulum contingat in H ducatur ex H linea HG, parallela tangenti BE occurrens ellipsi in F & rectis AB, AE, ED, BD in M, N, I, O, iunganturq́; pûcta BH, AH, EF, FA, dein per F ducatur linea FL æquidistans ipsi AE: Quoniam tam HK tangens æquidistat rectę AB, quàm EL ipsi AE, sit[b] autem & FL tangens, erunt c AHB, AFE triangulorum maximaquę segmentis AHB, AFE inscribi possunt; d ac proinde plus quàm dimidia suorum segmentorum. Rursum cùm triangula ABD, AED sint super eadem basi & intra easdem parallelas constitura, & HM linea æquidistet basi AD, erunt OI, NM lineæ e æquales; sed & totæ HI, FM sunt f æquales; igitur & reliquę HO, FN inter se æquantur: Quare tam triangula HOB, NEF, quàm triangula HAO, NFA, adeoque tota triangula BHA, EFA sunt æqualia. eodem modo si residuis segmentis triangula inscribantur, ostendemus triangula residuo circuli inscripta æquari triangulis residuo ellipseos inscripta, & vtraque maiora dimidijs esse suorum segmentorum. Quare cùm dicta triangulorum inscriptio, vtrimque semper æqualium & maiorum dimidiis segmentorum sine termino continuari possit, segmenta g AHB, AFE æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

b 174. huius.
c Patet ex 31. & 42. huius.
d 43. huius.
e 170. huius.
f 41. huius.
g 116. Progress. sive l. 2. huius.

Corollarium.

Iisdem positis sequitur semicirculum ABD æqualem esse semiellipsi AEC, est enim segmentum AHB ostensum æquale segmento AFE, sunt autem triangula ABD, AED super eadem basi & inter easdem parallelas cōstituta inter se ęqualia, igitur quadrans circuli ABD ęqualis est quadranti ellipsis AED. ergo semicirculus ABC ęqualis est semiellipsi AEC. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO CLXXXI.

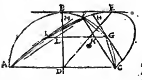
Habeant ABC semicirculus & AEC semiellipsis communem diametrum AC & tangentem BE, parallelam diametro AC: secet autem AEC ellipsis circulum ABC in F, ducanturq́; lineæ AF, CF.

Dico segmenta AIF, CGF esse æqualia.

Demon-

Demonstratio.

Ducta GH linea parallela rectæ CF, quæ circulum in G contingat, ducatur ex G linea GI parallela rectæ AC, occurrens lineis CF, AF in K & L, ellipsi verò in I: actaque per I linea IM, quæ AF lineæ æquidistat, iungantur puncta AI, FI, CG, FG: Quoniam IM linea æquidistat secanti AF, erit [a] IM recta tangens, ideoque AIF triangulum [b] eorum maximum quæ AIF segmento possunt inscribi: quod autem CGF triangulum eorum sit maximum quæ CGF segmento circuli inscribuntur manifestum est, vtrumque ergo triangulum [c] plus est quàm dimidium sui segmenti. Deinde, quia IL, KG sunt æquales, vt facile ex 174. huius deducetur, suntque IG, AC parallelæ, triangula IAL, GCK sunt æqualia: sunt verò ob eandem causam æqualia triangula IFL, GFK. tota igitur AIF, CGF æqualia sunt. Similiter demonstrabimus segmentis reliquis ellipticis ac circularibus inscribi posse, siue termino triangula maiora dimidijs segmentorum & æqualia inter se: æqualia igitur sunt segmenta AIF, CGF. Quod erat demonstrandum.



a Facilè deducetur ex 174. huius.
b Patet ex 3. & 42. huius.
c 43. huius.

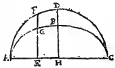
PROPOSITIO CLXXXII.

Habeant ABC ellipsis & circulus ADC eundem axem AC, ducaturque recta quæuis EF normalis ad axem AC, occurrens ellipsi in G.

Dico esse vt EG ad EF, sic ABC ellipsim ad circulum ADC.

Demonstratio.

Ex centro H normalis erigatur HBD: occurrens ellipsi in B & circulo in D. vt HB ad HD, sic EG est ad EF: sed vt HB ad HD, sic [d] ABC ellipsis est ad circulum ADC: igitur vt EG ad EF, sic ellipsis ABC est ad circulum ADC. Quod erat demonstrandum.



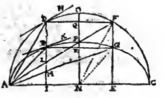
d Coroll. 4. huius.

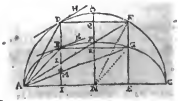
PROPOSITIO CLXXXIII.

Habeant ABC ellipsis & circulus ADC eundem axem AC ad quem ordinatim posita sit recta EF occurrens ellipsi in G & circulo in F: Dico segmentum ADFE esse ad segmentum ABGE vt ADC circulus est ad ellipsim ABC.

Demonstratio.

Iungantur AF, AG, ducaturque recta DH æquidistans ipsi AF, contingens circulum in puncto D: ex quo ordinatim demittatur ad axem recta DI, occurrens ellipsi in B & AF, AG lineis in L & M, agaturque per B recta BK parallela ad AG, quæ per 154. ellipsim tanget. dein lineæ ducantur AD, DF, AB, BG, vt EF ad EG, sic IL est ad IM, sed est vt EF ad EG, sic ID ad IB. igitur vt ID ad IB, sic IL ad IM. ergo & reliqua DL ad reliquam BM, vt tota ID ad totam IB. est





autem vt D L ad B M, ſic triangulum D A L, ad triangulum B A M, & (quia parallelæ ſunt D L, F E,) triangulum D F L ad triangulum B G M, igitur triangulum D A L eſt ad triangulum B A M, vt I D ad I B, & triangulum D F L eſt ad triangulum B G L vt I D ad I B. ergo totum triangulum A D F eſt ad totum triangulum A B G, vt I D ad I B. quia autem D H, B K ſunt tangentes, triangula A D F, A B G maxima a ſunt eorum quæ inſcribi ſegmentis poſſunt, ac proinde maiora b ſegmentorum dimidijs. ſimiliter demonſtrabimus ſegmentis reſiduis tam circuli quàm ellipſeos inſcribi poſſe triangula, quæ ſint maiora reſiduorum dimidijs, & rationem habeant, quam I D ad I B. Quare cùm hoc fieri poſſit ſine termino, ſegmentū c A D F eſt ad ſegmentum A B G, vt I D ad I B: eſt verò & triangulum A F E ad triangulum A G E, vt E F ad E G, hoc eſt vt I D ad I B. ergo totum ſegmentum A D F E eſt ad totum ſegmentum A B G E, vt I D ad I B, hoc eſt vt circulus ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

a Paſsim 13. & 42. huius. b 43. huius. c 44. huius.

PROPOSITIO CLXXXIV.

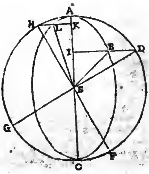
EAdem manente figura ducatur ex centro N quæuis diameter N F, demiſſaque ex F normali F E quę ellipſim ſecet in G, iungantur N G: Dico A N F ſectorem eſſe ad ſectorem A N G, vt circulus A D C ad ellipſim A B C.

Demonſtratio.

SEgmentum A D F E d eſt ad ſegmentum A B G E, vt F E ad G E: & triangulum F N E eſt ad triangulum G N E, vt F E ad G E. Ergo & reliquum nempe ſector A N F eſt ad reliquum nempe ſectorem A N G, vt F E ad G E, hoc eſt e vt circulus ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

d 183. & 181. huius. e 181. huius.

PROPOSITIO CLXXXV.



SIt ellipſis A B C, & circulus A D C, habentes communē axem A C: & per centrum commune E ducantur duæ diametri circuli ſeſe ad angulos rectos interſecantes, occurrenteſque circulo in punctis D, F, G, H: deinde ex D & H, ordinatim ad A C applicentur lineæ D I, H K occurrentes ellipſi in B & L: iunganturq; E B, E L.

Dico L E B quadrantem ellipſeos eſſe, ſicut H E D eſt quadrans circuli.

Demon-

Demonstratio.

Segmentum ABI ad segmentum ᵃADI est vt IB ad ID, vtque eadem IB ad ID, ita est triangulum IEB ad triangulum IED. ergo vt IB ad ID, ita est sector AEB ad sectorem AED. simili modo ostendemus sectorem LEA ad sectorem HEA, esse vt KL ad KH, id est, ᵇ vt IB ad ID: ergo vt IB ad ID, ita est totus sector BEL ad totum sectorem DEH, sed vt IB ad ID, hoc est minor axis ellipseos ad diametrum circuli, per 5. Archimedis de Spher. ita est ellipsis ABC ad circulum ADC: ergo sector BEL ad sectorem DEH, vt ellipsis ad circulum, & inuertendo ac permutando vt sector DEH ad circulum ADC, ita est sector BEL ad ellipsin ABC, sed sector DEH est quadrans circuli, ergo & sector BEL quadrans ellipseos erit, adeoque ᶜ erunt BE, EL diametri coniugatæ, ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 184. huius. b Cor. 1. pr. 8. huius. c 46. huius.

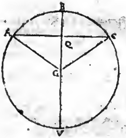
Nota idem demonstrari si ADC sit ellipsis cuius axis AC, sintque HF, DG ipsius coniugatæ diametri; si verò DEH non sit quadrans ellipseos vt sector DEH ad circulum, ita erit sector BEL ad ellipsin, vt ex demonstratione constat.

PROPOSITIO CLXXXVI.

Esto circuli ABC quicunque sector AGC, & ellipsis DEF sector DHF: sit autem sector ad sectorem vt circulus ad ellipsim: ducanturque rectæ AC, DF.

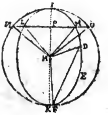
Dico segmentum ABC esse ad segmentum DEF, vt circulus ABC est ad ellipsim DEF, & contra.

Demonstratio.

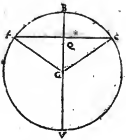


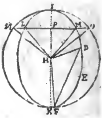
Inuento ellipseos maiore axe IK, describatur super IK diametro circulus, ductaq; ᵈ ad axem ordinatim LM quæ auferat segmentum LIM æquale segmento DEF, occurrat circulo in N & O, ducanturque rectæ LH, MH, NH, OH. Quoniam segmentum MIL æquale est segmento DEF, erit ᵉ sector LHM æqualis sectori DHF. Rursum cùm sit vt ellipsis ad circulum NOK, sic LHI sector ᶠ ad sectorem NHI, adeoque & LHM sector ad sectorem NHO, sitque LHM triangulum ad triangulum NHO, vt LM ad NO, hoc est ᵍ vt ellipsis ad circulum NOK, erit vt ellipsis ad circulum NOK, sic LIM segmentum ad segmentum NIO, & permutando circulus NOK ad segmentum NIO, vt ellipsis ad segmentum LIM. iam verò circulus ACV est ad sectorem AGC, ex hypothesi vt ellipsis ad sectorem HDF, hoc est (vt ostendi supra) vt ellipsis ad sectorem LHM, hoc est vt circulus NOK ad sectorem NHO. ergo etiam ʰ circulus ACV ad segmentum ABC, vt circulus NOK ad segmentum NIO, hoc est, vt ante ostendi, vt ellipsis ad segmentum LIM, hoc est (quoniam segmenta LIM, DEF sunt ex constructione æqualia) vt ellipsis ad segmentum DEF. igitur permutando vt circulus ACV ad ellipsim, sic segmentum ABC ad segmentum DEF. Quod erat demonstrandum.

d 17. huius. e 59. huius. f 184. huius. g 181. huius. h 183. huius.



Iam verò si fuerit segmentum ABC ad segmentum DEF, vt circulus ABC ad





ad ellipsim IDF: dico & sectorem AGC esse ad sectorem DHF, vt est circulus ABC ad ellipsim IDF: inuento enim vt antè ellipseos DEF maiore axe IK, super IK vt diametro describatur circulus NOK: ductaque ordinatim LM quæ segmentum LIM auferat æquale segmento DEF, fiant reliqua vt prius. segmentū igitur NIP est ad segmentum LIP, vt a circulus NOK ad ellipsim IDF. Itaq; segmentum NIO ad segmentum LIM, vt circulus NOK ad ellipsim: & permutando, circulus NOK ad segmentum NIO, vt ellipsis ad segmentum LIM, hoc est ex hypothesi vt circulus ACV ad segmentum ABC. Cùm ergo sit vt circulus NOK ad segmentum NIO, ita circulus ACV ad segmentum ABC; erit etiam b vt circulus NOK ad sectorem NHO, ita circulus ACV ad sectorē AGC. Atqui vt circulus NOK ad sectorem NHO, sic ellipsis ad sectorem LHM, hoc est quoniam segmenta LIM, DEF sunt æqualia. ad sectorem DHF. ergo vt circulus ACV ad sectorem ABC, ita ellipsis ad sectorem DHF. Quod erat demonstrandum.

a 183. huius.

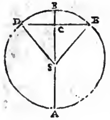
PROPOSITIO CLXXXVII.

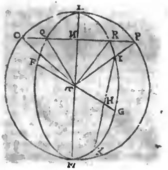
ESto ADB circuli diameter AB diuisa vtcunque in C, & per C normalis posita DE, sit autem & FG, diameter quæcunque ellipseos diuisa in H, vt AB est in C, & per H ordinatim ducta IK.

Dico segmentum DBE esse ad segmentum IGK vt est circulus ADB ad ellipsim FLG, & contra.

Demonstratio.

INuento ellipseos axe maiore LM, describatur super LM circulus LOM. diuisaq; LM in N, vt AB est diuisa in C, agatur per N normalis OP, secans ellipsim in Q & R: ducanturque semidiametri OT, QT, RT, PT. Rectangulum BCA est ad quadratum DC, vt rectangulum LNM ad quadratum ON, & permutando rectangulum BCA est ad rectangulum LNM, vt quadratum DC ad quadratum ON, sed ratio rectanguli BCA ad rectangulum LNM, componitur ex rationibus BC ad LN, & CA ad NM. ergo rationes BC ad LN, & CA ad NM, simul sumptæ æquantur rationi quadratorū DC, ON, hoc est rationi ad DC, ON bis sumptæ. Atqui rationes BC ad LN, & CA ad NM, sunt eædem siue æquales, cùm sint BA, LM ex hypothesi proportionaliter diuisæ; ergo earum vna BC ad LN, eadem est rationi DC ad ON: sed, cùm sit vt BC ad LN, sic CA ad NM, erit quoque vt BC ad LN, sic BA ad LM. Quare BA ad LM, id est SD ad OT, vt





vt DC est ad ON: sunt autem anguli DCS, ONT recti; igitur triangula DCS, ONT sunt similia, anguliq́ue DSC, OTN æquales: quare & anguli DSE, OTP illorum dupli sunt æquales & DSE, OTP sectores sunt similes, adeoq́ue & segmenta DBE, OLP sunt similia, igitur vt segmentũ OLP ad circulum LOM, sic segmentum DBE ad circulum DBA: sed etiam vt segmentum OLP ad circulum LOM, sic segmentum a QLR ad ellipsim. quare vt segmentum DBE ad circulum ADB, sic QLR segmentum est ad ellipsim FLG, hoc est ex constru- a 181. huius. ctione segmentum IGK ad ellipsim FLG, & permutando est segmentum DBE ad segmentum IGK, vt circulus ADB ad ellipsim FLG. Quod erat primum.

Sit iam segmentum DBE ad segmentum IGK, vt circulus ADB ad ellipsim FLR: dico BS, GT lineas in C & H, proportionaliter esse diuisas. ponantur eadem omnia quæ prius: Quoniam est segmentum DBE ad segmentum IGK, id est QLR vt circulus ADB ad ellipsim FLR, & permutando DBE segmentum ad circulum ADB, vt segmentum QLR ad ellipsim FLR; sit autem b & OLP b ibid. segmentum ad circulum OLM, vt QLR segmentum ad ellipsim FLR, erit vt segmentum OLP ad circulum LOM, sic DBE segmentum ad circulum ADB. Quare & sectores DSE, OTP sunt similes & anguli DSE, OTP adeoq́ue & illorum dimidij DSC, OTN æquales: sunt autem & anguli DCS, ONT recti; igitur triangula DCS, ONT similia: & vt DS ad OT, id est BS ad LT, sic SC ad NT. quare BS, LT in C & N proportionaliter sunt diuisæ. sed cùm per constructionem segmenta QLR, IGK sint æqualia, erit vt LT in N, sic c GT c 52. huius. diuisa in H. igitur vt BC ad CS, sic GH ad HT. Quod erat demonstrandum.

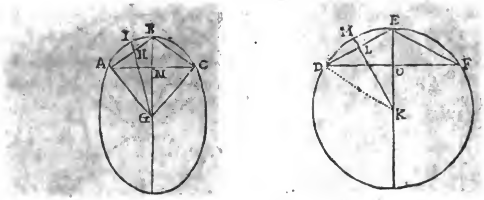
PROPOSITIO CLXXXVIII.

Esto ABC ellipseos segmentum quodcunque ABC; sumatur autem in circulo DEF segmentum DEF, quod ita se habeat ad suum circulum, vt ABC segmentum ad ellipsim suam: dein ABC, DEF segmentis triangula inscribantur maxima ABC, DEF, diuisisq́; AB, DE lineis bifariam in H & L, agantur per H & L, diametri GI, KM.

Dico illas in H & L proportionaliter esse sectas.

Demon-

Demonstratio.



EX B & E ducantur diametri B G, E K, iunganturque D K, K F, G A, G C, & quoniam è verticibus maximorum triangulorum ductæ sunt diametri, in circulo quidem patet D F bisecari in C, in ellipsi autem bisecari quoq; A C colliges ex 42. huius. Quare tã in ellipsi quàm in circulo sectores A G C, D K F bisecantur. ergo sector A G B est ad sectorem D K E, vt sector A G C ad sectorem D K F. Iam verò cùm permutando hypothesim, segmentum A B C sit ad segmentum D E F, vt ellipsis ad circulum, etiam ᵃ sector A G C erit ad sectorem D K F, hoc est (vt iam ostendi) sector A G B, ad sectorem D K E, vt ellipsis ad circulum. Et quoniam est sector A G B ad sectorem D K E, vt ellipsis ad circulum, erit quoque segmentum A I B ad segmentum A M E, vt ellipsis ad circulum. Ergo diametri I G, M K proportionaliter in H & L sunt diuisæ. Quod erat demonstrandum.

ᵃ 187. huius.

PROPOSITIO CLXXXIX.

EAdem manente figurâ: si fuerit segmentum A B C ad segmentum D E F, vt A B C ellipsis ad circulum D E F.

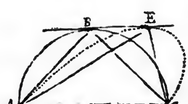
Dico esse & triangulum maximum A B C ad triangulum maximum D E F vt A B C ellipsis est ad circulum D E F.

Demonstratio.

VT A B C ellipsis est ad circulum D E F, sic ostendimus in priori segmenta A I B, B C esse ad segmenta D M E, E F. Quare cùm etiam ex hypothesi sit, vt ellipsis ad circulum sic totum segmentum A B C ad totum segmentum D E F, igitur & reliquum triangulum A B N est ad reliquum triangulum D E O vt A B C, ellipsis ad circulum D E O. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXC.

ESto A B C semicirculo inscriptum triangulum maximum A B C, sit autem & A E C semiellipsi quę communem A C habeat diametrum, triangulum inscriptum maximum A E C: si fuerint A B C, A E C triangula æqualia:



Dico & semicirculum A B C æqualem semiellipsi A E C.

Demonstratio.

IVngantur puncta B & E. Quoniam triangula A B C, A E C super eadem basi descripta per hypothesim sunt æqualia, erit iuncta B E parallela rectæ A C; adeoque cùm tam A B C, quàm A E C

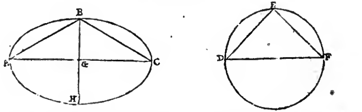
sit

ſit triangulum maximum, continget recta BE & circulum & ellipſim: igitur [a] ſemicirculus ABC æquatur ſemiellipſi AEC. Quod erat demonſtrandum. [a] 159. huius.

PROPOSITIO CXCI.

Ellipſis eſt ad circulum vel ellipſim vt triangulum maximum inſcriptum ſemiellipſi ad triangulum maximum inſcriptum ſemicirculo aut ſemiellipſi.

Demonſtratio.



Cum enim ſit vt ſemiellipſis ad ſemicirculum aut ſemiellipſim, ita tota ellipſis ad totum circulum aut ellipſim; erit [b] vt triangulum maximum AEC ſemiellipſi inſcriptum ad triangulum maximum DEF ſemicirculo aut ſemiellipſi inſcriptum, ita ellipſis ad circulum ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum. [b] 190. huius.

PROPOSITIO CXCII.

Dato circulo vel ellipſi DEF ellipſim æqualem exhibere. Et datæ ellipſi circulum æqualem.

Conſtructio & demonſtratio.

Semicirculo vel ſemiellipſi DEF inſcribatur triangulum maximum DEF, cui fiat æquale aliud quodcumque triangulum ABC, diuiſaque AC bifariam in G, ducatur BG, & protrahatur BG in H, vt BG, GH ſint æquales, & ſi AC, BH ſeſe ad rectos interſecent, deſcribatur ellipſis ABCH cuius axes ſint ACBH, ſi autem non ad rectos ſeſe interſecent, datis ACBH coniugatis diametris axes inueniantur [c] circa quos deſcribatur ellipſis ABCH. Dico ellipſin ABCH circulo vel ellipſi DEF æquari: eſt enim triangulum ABC maximum eorum quæ ſemiellipſi inſcribi poſſunt [d] quia ACBH ponuntur diametri coniugatæ. quare cùm triangulum maximum ſemiellipſi inſcriptum æquale ſit triangulo maximo circulo vel ellipſi inſcripto, erit [e] ellipſis ABC circulo vel ellipſi DEF æqualis. ergo quod petebatur. [c] 60. huius. [d] 42. huius. [e] 190. huius.

Ex his ſecundæ partis conſtructio & demonſtratio eſt manifeſta.

Corollarium.

Hinc patet infinitas dari ellipſes circulo vel ellipſi ABC æquales, quia triangulo ABC dantur infinita triangula æqualia.

PROPOSITIO CXCIII.

SIt femiellipfis ABC cuius axis fit AC, femicirculus autem DEF, femiellipfi ABC æqualis ponatur; infcribantur deinde femiellipfi & femicirculo triangula ABC, DEF inter fe æqualia: & ex B & E, normales ad bafim demittantur BG, EH.

Dico lineas AC, ADF in G & H, fimiliter diuifas effe.

Demonftratio.

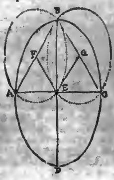


EX centris I & K, ad diametros AC, DF normales erigantur IL, KM iunganturq; AL, LC, & DM, MF: quoniam femiellipfis ABC femicirculo DMF, aqualis eft, erunt & maxima triangula illis infcripta nempe ALC, DMF inter fe a 190. huius. æqualia; a erit igitur vt triangulum ALC, ad triangulum ABC id eft vt LI ad BG, ita triangulum DMF ad triangulum DEF, id eft ita linea MK ad EH, adeoque vt quadratum LI ad BG quadratum, ita erit quadratum MK ad ipfum EH: fed vt quadratum LI ad quadratum BG, ita eft rectangulum AIC ad rectangulum AGC: & vt quadratum MK ad EH, quadratum, ita eft DKF rectangulum ad rectangulum DHF, ergo vt AI quadratum ad rectangulum AGC, ita eft quadratum DK ad rectangulum DHF: & permutando vt quadratum AI ad ipfum DK quadratum; fiue vt quadratum AC ad DF ita eft rectangulum AGC ad rectangulum DHF, conftat igitur ex Sereni l.1. prop.12. lineas AC, DF in G & H, proportionaliter effe diuifas. Quod erat demonftrandum.

PROPOSITIO CXCIV.

SEcent ABC ellipfim diametri quæuis coniugatæ AC, BD iunctifq; punctis AB, CB, diuidantur AB, CB lineæ bifariam in F & G: ducanturq; ex E centro lineæ EF, EG: dein tam per puncta AEB, quàm CEB ellipfes defcribantur quarũ coniugatæ fint diametri AB, EF, CB, EG:

Dico ABC ellipfim æqualem effe duabus ellipfibus AEB, CEB.



Demonftratio.

QVoniam tam ABEF, CBEG, ACBE diametri funt coniugatæ, erunt b ABC, AEB, CEB triangula maxima quæ fuis femiellipfibus infcribi poffunt: eft autem ABC triangulum duplum trianguli CEB, igitur & ellipfis ABC c dupla eft ellipfis CEB. fimiliter oftendam ellipfim ABC duplam effe ellipfis BEA. æquantur

b Patet ex 42. huius.

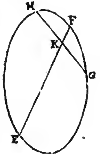
c Corol.191. huius.

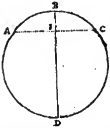
quantum igitur ellipses BEA, CEB ac proinde ellipsis ABC singularum dupla æquatur vtrique simul sumptæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXCV.

Circulum ABC secet recta quęuis AC auferens segmentum ABC: oportet in data ellipsi EFG, ad datam diametrum EF ordinatim ducere HG, quæ segmentum auferat HFG, quod ad ellipsim eam habeat rationem quam ABC segmentum ad circulum ABC.

Constructio & demonstratio.



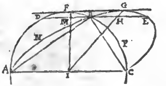


Diuisâ in circulo ABC recta AC bifariam in E, agatur per I normaliter diameter BD: dein in ellipsi EFG, diuidatur EF diameter in K, vt diuisa est BD in I, agaturque per K ordinatim linea HG ad FE, diametrum, patet a HFG segmentum esse ad ellipsim EFG, vt ABC segmentum est ad circulum ABC. dato igitur in circulo segmento, &c. Quod erat faciendum. a 189. huius.

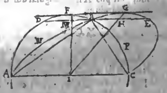
PROPOSITIO CXCVI.

Esto ABC semicirculo inscriptum triangulum quodcunque ABC, oporteat super BC linea segmentum describere ellipticum, æquale segmento circulari ADB.

Constructio & demonstratio.



Ducatur recta FG parallela diametro AC contingens circulum in F, dein per B recta agatur DE parallela diametro AC, fiatque BE æqualis ipsi DB, qua diuisâ in H bifariam ducatur per H ex I, centro circuli recta IG occurrens FG, lineæ in G: tum per A, G, C puncta b ellipsis describatur: cuius diametri coniugatæ sint AC, IG, & quoniam FG est ipsi AC per extremitatem diametri IG parallela, continget ellipsim in G. quare ellipsis c circulo æqualis est. Deinde quoniam FG, MH sunt parallelæ, facile ostendemus ex elementis rectangulum sub GH, & reliqua parte diametri, esse ad rectangulum sub GI, & reliqua parte diametri vt rectangulum sub FM, & reliqua parte diametri ad rectangulum sub FI & reliqua parte diametri, Atqui rectangulum sub FM, & reliqua parte diametri est b 45. huius. c Corol. 180 huius.



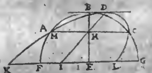
ad rectangulum sub FI & reliquâ parte diametri vt quadratum DM ad quadratum AI, hoc est, vt quadratū BH ad quadratum AI. ergo etiam rectangulum sub GH & reliqua parte diametri est ad rectangulum sub GI, & reliqua parte diametri, vt quadratum BH ad quadratum AI. ellipsis ergo transit per punctum B. Iam quia ellipsis circulo æqualis est vt ostendi supra, ablato communi segmento curuilineo ANBPC, æqualia remanent segmenta BPCE, ANBD, quibus si addas segmenta BPC, ANB, quæ [a] æqualia sunt, segmentum ellepricum BCE basim habens rectam BC æquabitur segmento circulari ADB, basim habenti rectam AB. Factum igitur est quod petebatur.

a 181. huius.

PROPOSITIO CXCVII.

Esto ABC segmentum quodcunque circulare, oportet super AC subtensâ segmentum constituere ellipticum, dato ABC segmento æquale, cuius vna è diametris coniugatis sit data quæ sit maior diametro FG circuli ABC.

Constructio & demonstratio.



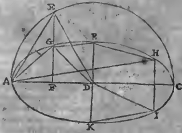
INuento E centro circuli ABC ducatur per E diameter FG æquidistans rectæ AC, erectaque ex E normali EB, quæ AC lineam bifariam diuidet in H, agatur per B tangens BD, dein per H recta ducatur ID, æqualis datæ occurrens tangenti in D & FG diametro in I: fiatque IK æqualis rectæ FE, & IL æqualis EG, tum per KDL puncta ellipsis describatur, occurrens AC lineæ vtcunque in M. dico factum esse quod petitur. Quoniam enim LK, DI diametri sint coniugatæ & BD parallela ipsi LK, patet ED contingere ellipsim KDI, adeoque [b] rectam MH æqualem ipsi AH: ellipsis igitur transibit per punctum A. eodem modo ostenditur transire per C: igitur [c] segmentum ellipricum ADC æquale est segmento circulari ABC; super data igitur linea AC, &c. Quod erat faciendum.

b Colligitur ex 170. huius.

c Colligitur ex 180. huius.

PROPOSITIO CXCVIII.

Ellipsim à dato in peripheria puncto, in datos numero sectores æquales diuidere.



Constructio & demonstratio.

DAta sit ellipsis ABC axis maior AC, datum in peripheria punctū B, oporteat ab hoc ellipsim secare in sectores tot æquales quot volueris, v.g. in sex.

Diametro AC describe semicirculū, cui inscribe AE, latus poligoni tot ha-

habentis latera quot æquales petebantur sectores. quoniam autē petebantur sectores æquales sex, erit AE latus hexagoni. ponatur ergo E F G normalis ad A C iunganturque E D, G D, B D, G B: & G B æquidistet A H: dico factū, esse quod petitur. vt circulus ad ellipsin ita est segmentū E F A ad segmentū G F A id est vt F G ad F E: estq; itē vt F E ad F G, ita triangulū E D F ad triangulū G D F: ergo vt circulus ad ellipsin, ita est sector E D A, ad sectorem G D A: sed sector E D A est pars tertia semicirculi, cùm linea A E sit latus hexagoni; ergo & sector G D A tertia pars semiellipseos erit. Cùm autem G B ipsi A H æquidistet, erunt segmenta A G, B H: adeoq; & sectores G D A, B D H æquales inter se: hoc est sexta pars ellipseos totius. fiant a 57. huius
modò segmento B H æqualia a segmenta H I, I K iunganturque D H, D I, D K sectores igitur D B H, D H I, D I K æquantur adeoque singuli sunt sexta pars ellipseos, & simul sumpti semiellipsim constituunt B C K; reliquam igitur semiellipsim B A K seca vt diuisa est B C K, eritque tota ellipsis in sex æquales sectores diuisa. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO CXCIX.

ESto circulo A B C cuius centrum E inscriptum polygonum quoduis regulare A B C D: ductaque diameter F G, secet latus quoduis A D bifariam in H: sit autem & I K L ellipseos diameter quæcunque I L diuisa in M sicut F G est diuisa in H, agaturq; per M ordinatim linea N O ad diametrum I L.

Dico rectam N O, esse vnum è lateribus polygoni regularis inscribendi ellipsi tot laterum, quot est polygonum circulo A B C inscriptum. Polygonum autem ellipticum regulare voco, cuius singula latera abscindunt elliptica segmenta æqualia.

Demonstratio.



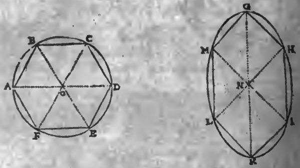
DVcatur ex O linea O P auferens segmentum æquale segmento N L O, & ex P recta P K quę segmentum auferat æquale segmento N L O, dein ex K linea K Q auferens segmentum ęquale segmento N L O, erit Q punctum idem cum puncto N. Iunctis enim in circulo A B C punctis E A, E B, E C, E D ducantur in ellipsi semidiametri, R K, R N, R O, R P. Quoniam diametri F G, I L sunt in H & M, proportionaliter diuisæ, & A D, N O lineæ per H & M, actę ordinatim ad diametros F G; I L. erit b vt sector A E D ad circulum A B C, sic N R O sector ad b 180. huius
ellipsim I K L: sunt autem tam A E D, D E C, C E B, B E A sectores, quàm c N R O, O R P, P R K, K R Q sectores inter se æquales, (quia N O, O P, P K, K Q segmenta sunt æqualia) igitur vt sectores quatuor circulares ad suum circulum sic elliptici sectores quatuor ad suam ellipsim: sed tuti circulo æquantur sectores circulares, igitur & ellipsi sunt æquales sectores elliptici. quare punctum Q idem est cum puncto N; & K N O P polygonum est regulare tot laterum quot est polygonum circulo inscriptum. Quod erat demonstrandum. c 46. huius

PROPOSITIO CC.

ESto circulo A B C inſcriptum polygonum quodcunque regulare A, B, C, D, E, F: ſit autem & ellipſi G H I inſcriptum polygonum regulare G, H, I, K, L, M, totidem laterum, quot eſt polygonum circulo inſcriptum.

Dico ſegmentum circulare ab aliquo laterum polygoni ablatum, eſſe ad ſegmentum ellipticum, ab aliquo laterum polygoni elliptici ablatum, vt eſt circulus A B C ad ellipſim G H I.

Demonſtratio.



SIt O centrum circuli & N centrum ellipſis: ducanturque ex O & N, ſemidiametri ad angulos ſui polygoni: Quoniam G H, H I, I K, &c. ſegmenta in ellipſi per conſtructionem ſunt æqualia, erunt & [a] ſectores G N H, H N I, I N K, &c. æquales: ſunt autem & ſectores circuli A O B, B O C, C O D, &c. æquales & pares numero ellipticis, igitur eſt ſector A O B ad ſectorem G N H, vt omnes ſectores circulares, id eſt circulus A B C ad omnes ſectores ellipticos, id eſt ellipſim G H I, quare & ſegmentum A B eſt ad ſegmentum G H, vt circulus ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

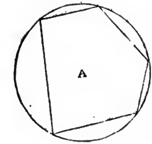
a 160. huius.

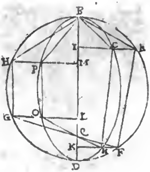
PROPOSITIO CCI.

CIrculo A inſcriptum ſit quodcunque polygonum, oportet datæ ellipſi B C D polygonum pari numero laterum proportionale inſcribere, hoc eſt quod & eandem ad ellipſim proportionem habeat quam circulare ad circulum, & cuius ſingula latera, ſegmenta auferant quæ ad ellipſim ſuam talem habeant rationem quam habent ſegmenta circularia, ſingulis lateribus polygoni circularis ablata ad ſuum circulum.

Demon-

Demonstratio & constructio.





INuento ellipsis maiore axe B D, describatur diametro B D circulus B E F, cui polygonum inscribatur B E F G H, simile illi, quod A circulo inscriptum est polygono; seceťque F G latus, axem B D in Q; dein ductis ex E. F, G, H ad axem B D normalibus E I, F K, G L, H M, quæ ellipsim secent in C, N, O, P. ducatur rectæ B C, C N, N Q, O Q, O P, P B. dico factum esse quod petitur. Quoniam G L, F K sunt parallelæ, erunt triangula G L Q, K F Q similia, adeoque vt G L ad K F, hoc est vt O L ad K N, sic L Q ad Q K. sunt verò & anguli O L Q, F K Q, rectis ergo triangula O L Q, K F Q sunt similia. ergo O Q, Q F sunt in directum; figura igitur B C, N O, P B est polygonum ellipsi inscriptum. vt I E linea est ad lineam I C, [a] Ex elemento. sic I B E triangulū est ad triangulum I B C sed [a] est vt I E ad I C, sic I E F Q trapezium ad trapezium I C N Q; igitur tota figura B E F Q est ad figurā B C N Q, vt I E linea ad lineam I C, id est [b] segmentum I B E ad segmentū I B C, id est vt circulus B E F [b] 182. & 183. huius. ad ellipsim B C D. eodem modo ostenditur figura B H G Q esse ad figuram B F O Q, vt circulus B E C ad ellipsim B C D. Quare erit totum polygonum B E F G H ad polygonum B C N O P, vt circulus B E F ad ellipsim B C D, & permutando, vt B E F G H polygonum ad circulum B E F, hoc est ex const. vt polygonum circulo A inscriptum ad suum circulum, sic B C N O P polygonum ad ellipsim B C D: Quod erat primum.

Rursum cùm tam segmentum I B E sit ad segmentum I B C, quàm I B E triangulum ad triangulum I B C, vt est circulus B E D ad ellipsim B C D, erit & segmentum B E ad segmentum B C vt B E D circulus ad ellipsim B C D: & permutando vt segmentum B E ad circulum B E D, sic B C segmentum est ad ellipsim B C D: idem similiter de reliquis segmentis ostenditur: igitur datæ ellipsi B C D polygonum inscripsimus, &c. Quod erat faciendum.

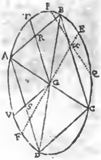
PROPOSITIO CCII.

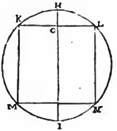
ESto A B C ellipsi inscriptum quadrilaterum regulare A B C D, ductæq; per G centrum vni è diametris coniugatis æqualibus E F; æqualis sumatur recta H I: qua diametro circulus describatur H I K, cui inscribatur quadratum K L M N.

Dico quadrata K L, L N, N M, M K simul sumpta æquari quadratis A B, B C, C D, D A simul sumptis.

De-

Demonstratio.





DIuisa KL bifariam in O ducatur per O diameter HI: dein applicetur ad
FE diametrum ordinatim linea PQ, segmentum auferens æquale segmento
AB: diuisisque AB, AD bifariam in R & S, ducantur semidiametri GRT, GSV
iunganturque puncta AG, BG, CG, DG. Quoniam segmenta AB, BC, CD, DA
per constructionem sunt æqualia, erunt & sectores AGB, BGC, CGD, AGD æ-
a 46. huius. quales, adeoque AG, BG [a] diametri coniugatæ, prætereà cùm ex const. GT, GV
b 50. huius. bisecent è centro rectas AB, AD [b] sectores AGT, AGV, dimidia pars sunt secto-
rum AGB, AGD, hoc est semiellipsis; sector igitur TGV quarta pars est ellipseos
c 46. huius. ergo [c] GT, GV sunt coniugatæ & AB, AD lineę ordinatim ad illas positæ: igitur
cùm per constructioné segmentum PEQ æquale sit segmento ATB, siue AFD:
erit PQ quadratum bis sumptum, æquale quadratis AB, AD simul sumptis, adeoq;
PQ quadratum quartò sumptum æquale quadratis AB, BC, CD, DA. Rursum
d 187. huius. cùm segmentum PQ sit ad segmentum KL, vt [d] ABC ellipsis ad circulum KLM,
e 188. huius. EF, HI diametri sunt [e] in X & O, proportionaliter diuisæ, adeoque [f] PQ linea
f 178. huius. æqualis lineæ KL. igitur & quadratum KL quater sumptum æquale est quadratis
AB, BC, CD, AD. Quod erat demonstrandum.

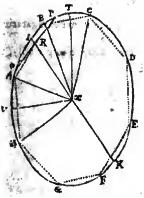
PROPOSITIO CCIII.

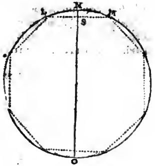
ESto ABC ellipsi inscriptum quodcunque polygonum regulare ABCD, EFGH: ductaq; IK vna ex diametris coniugatis æqualibus; describatur circulus LMN habens diametrum æqualem diametro IK: dein circulo inscribatur polygonum regulare tot laterum quot est polygonum ellipsi inscriptum.

Dico omnia quadrata laterum polygoni ellipsi inscripti, simul sumpta æquari quadratis laterum polygoni circularis simul sumptis.

Demonstratio.

STatuamus E, G, ellipsi & circulo inscripta esse octogona regularia, eadem quippe demõstratio polygonis omnibus conueniet. in circulo LMN ducatur diameter NO secans LM, lineam bifariam in S; diametrum verò IK secet ordinatim linea PQ segmentum auferens æquale segmento AB, tum ducantur semidiametri HX, AX, BX, CX, item TX, VX quę lineas AH, CB diuidant bifariam.
g 60. huius. Quoniam segmenta AB, BC, CD, &c. sunt ex constructione æqualia, erunt [g] & secto-





sectores AXB, BXC, &c. æquales : sunt autem illi simul sumpti æquales toti ellipsi, igitur sectores duo AXB, BXC hoc est quarta pars sectorum, erunt quadrans ellipsis ABC. Iam quia XT, XV ex centro ductæ bisecant BC, AH,[a] erunt sectores CXT, XAV dimidij sectorum æqualium BXC, AXH, ac proinde inter se æquales. addito igitur communi sectore AXT, totus sector VXT, sectori toti AXC æquatur, quare cùm AXC sit quadrans ellipseos, erit & VXT. Ergo[b] VX, TX diametri sunt coniugatæ, ad quas AHCB sunt ordinatim positę auferentes segmenta æqualia; igitur[c] quadratum PQ bis sumptum, est æquale quadratis AH, CB simul sumptis : eodem modo ostenditur idem quadratum PQ bis sumptum æquari quadratis AB, GH simul sumptis : adeoque PQ quadratum quartò sumptum æquari quadratis CB, BA, AH, HG, id est quadratis GF, FE, ED, DC. quare & quadratum PQ sumptum octies quot laterum est polygonum, æquale est quadratis laterum totius polygoni ellipsi inscripti. Iterum cùm[d] sit vt ellipsis ABC ad circulum LMN, ita segmentum AB id est PQ ad segmentum LM, erunt IK, NO diametri[e] in R & S, proportionaliter diuisæ, & quadratum PQ[f] æquale quadrato LM: ergo quadratum PQ octies sumptum æquatur quadratis laterum polygoni circularis, sed quadratum PQ octies sumptum æquatur etiam, vt supra ostendi, quadratis laterum polygoni elliptici, ergo quadrata laterum polygoni elliptici simul sumpta æquantur quadratis laterum polygoni circularis simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

a 50. huius. b 46 huius. c 106. huius. d 187. huius. e 188. huius. f 177. huius.

Corollarium.

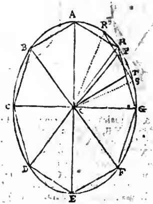
Hinc patet : si eidem ellipsi duo inscribantur polygona parium numero laterum, quadrata laterum vnius polygoni simul sumpta, æqualia esse quadratis laterum alterius polygoni simul sumptis.

PROPOSITIO CCIV.

Ellipsi inscriptum sit polygonum regulare, vna autem coniugatarum æqualium sit Q P, ad quam sit ordinatim R S.

Dico quadrata laterum polygoni simul sumpta esse ad totum polygonum vt linea R S ad dimidium rectæ T Q.

Demonstratio.



a 60. huius. & Coroll. eiusd.

b 106. huius.

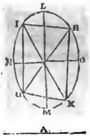
DVcantur ex A, B, C, D, E, F, G, H, R, S punctis semidiametri. Quoniam R S segmentum per constructionem est æquale segmento A B, erit a & triangulum R Q S æquale triangulo A Q B: similiter ostendam triangula singula B Q C, C Q D, &c. æquari triangulo R Q S: adeóque R Q S triangulum octies sumptum æquale toti polygono: est autem b R S quadratum octies sumptum æquale quadratis omnium laterum polygoni, igitur vt R S quadratum octies sumptum est ad triangulum R Q S octies sumptum hoc est vt R S quadratum semel sumptum ad R, Q, S, triangulum semel sumptum, ita omnia quadrata laterum polygoni ad totum polygonum: sed cum R S quadratum sit ad rectangulum super R S, T Q, vt R S linea ad lineam T Q, erit R S quadratum ad triangulum R Q S, dimidium rectanguli R S, T Q, vt R S linea ad dimidium rectæ T Q, igitur, & omnia quadrata laterum polygoni sunt ad totum polygonum vt R S linea ad dimidium lineæ T Q. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCV.

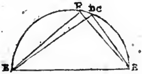
Datis axibus & diametro ellipseos inuenire illius coniugatam & positione cum datis axibus in eadem constituere ellipsi.

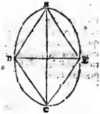
Constru-

Constructio & demonstratio.



Sit A diameter data, & axes dati B C, D E, oportet inuenire diametrum coniugatam ipsi A, quam cum datis axibus oportet in eadem collocare ellipsi. axes E D, B C ad angulum ponantur rectum E C B, iunctâque B E, super ea semicirculus describatur E C B, in quo datæ, A æqualis aptetur E F, ducaturq; F B: quoniam igitur E C, C B axium quadrata æqualia sunt quadratis cuiusuis coniugationis in ellipsi, eademque axium quadrata æquentur quadratis E F, F B, & E F æqualis A vna sit ex diametris, recta F B diameter est coniugata F E: exhibuimus igitur diametro A, coniugatam, quod primò faciendum fuit.



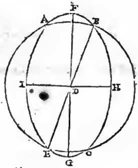


Iungantur deinde axium extrema D B E C quæ parallelogrammum exhibeant D B E C: cui æquale fiat parallelogrammum a I H K G, quod I K, G H diametros habeat rectis E F, F B æquales. data igitur diametrorum I K H G coniugatione, exhibeantur positione axes b L M, N O adeoque & ellipsis L M N. erit illa æqualis ellipsi B E C cuius axes dati sunt B C, E D; cùm enim per extrema coniugationis positione datæ, vnica tantùm c ellipsis transeat, & I K, G H coniugatio positione sit in ellipsi L M N, eademq; pertineat ad ellipsin B E C, ellipses L M N, B E C adeoque & axes æquales sunt: ellipsis igitur L M N; illa est in qua coniugatas E F, F B, id est I K, G H positione cum datis axibus B C, D E id est L M, N O collocare oportebat.

a *Per elementa.*
b *90. huius.*
c *Ibid.*

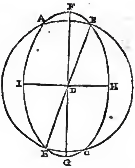
PROPOSITIO CCVI.

Data ellipsi & circulo illam interfecante puncta intersectionis geometricè exhibere. oportet autem circulum & ellipsim idem habere centrum.



Constructio & demonstratio.

Ellipsim A B C cuius centrum D, intersecet circulus A B, C E, oportet intersectionis puncta exhibere. quoniam igitur circulus & ellipsis commune habent centrum D, si ex illo ad intersectionis aliquod punctum



recta intelligatur duci, erit illa semidiameter circuli & ellipsis, diametrus igitur aliqua, circulo & ellipsi communis, sit illa A C. deinde cùm ellipsis data sit, dati quoque sunt axes F G, H I. datis igitur axibus & diametro A C, inueniatur illius coniugata & per præcedentem coniugatio illa cum datis axibus in eadem positione collocetur ellipsi, illarum vna, puncta assignabit intersectionum. Quod erat præstandum.

Finis libri quarti.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER QVINTVS DE

PARABOLA.

SEctionem hoc libro explanādam aggredimur ab antiquis coni rectanguli sectionem dictam, ab Apollonio & recentioribus parabolam nominatam, atque in eiusdem explicatione nonnihil morosiores erimus; quoniam planè sectio illa ad circuli quadraturam & alias æquationes cum circularibus perficiendas necessaria est, ob admirandas eius proprietates quæ cum circularibus & ellipticis planè connexæ sunt.

ARGVMENTVM.

Diuiditur liber hic in partes omnino octo.

Prima sectionem è cono educit, passionesque illius essentiales & reliquis fundamentales exhibet.

Secunda linearum in parabola proportionem tam continuam quàm discretam considerat.

Tertia sectionis focum, & mutuas parabolarum intersectiones Geometricè designat.

Quarta parabolarum, sese mutuo, vel circulum intersecantium contemplatur affectiones.

Quinta parabolam tam conuexam quàm concauam quadrat.

Sexta, parabolas & segmenta inter se confert, dein maximas sectioni inscribit figuras.

Septima varias exhibet parabolæ geneses quæ tum ex lineis, circulis, ellipsibus, tum ex ipsa oriuntur parabola.

Octaua miram exhibet parabolarum parallelarum cum hyperbola inter asymptotos posita, tam in ortu, quàm reliquis proprietatibus symbolisationem.

DEFINITIONES.

I.

DIameter parabolæ est recta linea intra parabolam ducta, quę omnes lineas cuidam æquidistantes bifariam diuidit, & siquidem ad rectos illas secet angulos, axis dicetur.

In omni verò parabola diametros axi æquidistare, & sectioni in vno tantum puncto occurrere, suo loco demonstrabitur.

I I.

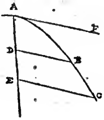
Verticem diametri voco punctum in quo diameter sectionis perimetro occurrit: punctum autem quod axi & sectionis perimetro commune est, vertex dicitur parabolæ.

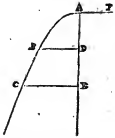
I I I.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur vnaquæque linearum æquidistantium, ac bifariam diuisarum.

I V.

Latus rectum voco lineam iuxta quam possunt ordinatim ad diametrum applicatæ: siue latus rectum mensura est iuxta quam comparantur potentiæ linearum ordinatim ad diametrum positarum.





Porro illud præ reliquis sectionibus peculiare in parabola sibi vindicat latus rectum, quod rectangulum latere recto & parte diametri ab eiusdem vertice, & puncto quo ab ordinatim posita diuiditur, intercepta contentum, æquale semper constituat quadrato lineæ quę ordinatim poni dicitur.

Sit exempli causa in ABC parabola diameter AD, illiusque latus rectum AF, ordinatim verò positæ sint BD, CE: erit igitur ex mente Apollonij, quod & nos quoque demonstrabimus, quadratum BD æquale rectangulo DAF; & EAF rectangulo æquale quadratum CE: & sic de ceteris ordinatim positis idem ostendetur.

Illud quoque hic obseruandum est, quod & in ellipsi ostendi, diuersa diametris singulis assignari latera recta, cùm linearum quæ ad illas ordinatim poni dicuntur, diuersæ quoque existant potentiæ.

Deinde necessarium non esse latera recta ad extremitates diametrorum suarum, normaliter poni, sed ijsdem eo posse applicari angulo quo diametri ab ordinatim positis intersecantur.

V.

Focum parabolæ appello, punctum in axe positum, à vertice interuallo dissitum, quod æquale est quartæ parti lateris recti.

V I.

Parabolas parallelas voco quę ad eundem axem constitutæ diuersos quidem habent apices, sed latera recta æqualia, & concauas perimetros versus eandem partem.

V I I.

Parabolæ æquales sunt, quarum latera recta axibus inseruientia sunt æqualia.

PARA-

PARABOLÆ
PARS PRIMA

Parabolam è cono educit, passionesq; illius essentiales ac fundamentales exponit: & primò quidem diametros & ordinatim ad illas positas, præcipuasq; illarum proprietates exhibet: secundò latus rectum illiusq; naturam, dein secantium ac contingentium primarias designat affectiones.

PROPOSITIO PRIMA.

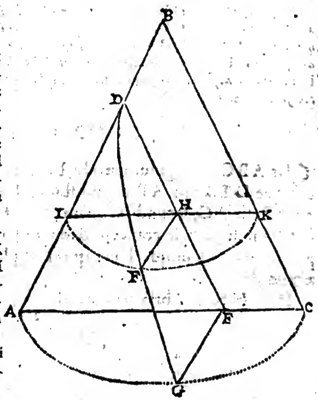
ESto conus ABC sectus triangulo per axem ABC, ductaque ED parallela lateri BC, fiat per ED sectio DFG, secundùm rectam EG normalem ad lineam AC; ponatur autem per H punctum quoduis in ED linea assumptum, recta IK æquidistans AC diametro basis coni: & per IK planum ducatur IFK æquidistans plano baseos AGC occurrens plano DFG secundùm communem intersectionem FH.

Dico HF quadratum esse ad quadratum EG, vt HD linea est ad lineam ED.

Demonstratio.

QVoniam planum IFK æquidistat plano baseos AGC: circulus a erit IFK, & FH, EG communes intersectiones b parallelæ. quia verò AC, IK æquidistant, & EG normalis est ad AC, recta quoque HF normalis c est ad IK: ac proinde FH quadratum rectangulo IHK d æquale: sed & EG quadratum, rectangulo AEC æquale est: quadratum igitur EG est ad quadratum FH, vt AEC rectangulum ad rectangulum IHK: quia verò EH æquidistat KC adeoque HK, CE lineæ in parallelogrammo æquales sunt, rectangulum IHK est ad rectangulum AEC, vt IH ad AE e id est BH ad BE, quadratum igitur FH ad EG, quadratum est vt recta BH ad rectam BE. Quod erat demonstrandum.

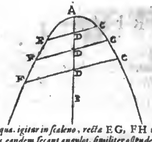
Vocetur autem sectio huiusmodi parabola cuius diameter DE, & ordinatim ad illam positæ FH, GE.



a 16. Proleg. ad sect. coni.
b 16. vndecimi.
c Ex elementis.
d 35 tertij.
e 1. sexti.

Scho-

Scholion.



Demonstratio hæc vniuersalis est & omni cono conuenit: ea tamen differentia, quod in scaleno dum ABC *triangulum non est maximum eorum quæ per axem fiunt recta* EG, FH *ordinatim ad diametrum* ED *posita, secent illam ad angulos obliquos, in recto autem ad rectos: cùm enim planum* ABC *in scaleno per axem ductũ, ad basim sit obliquum; sit autem & ED linea in plano* ABC, *illa quoque ad basim* AGC *adeoq; & ad lineam* EG *quæ in plano basis, ipsi* AC *normalis est, obliqua. igitur in scaleno, recta* EG, FH *ordinatim ad diametrum* DE *posita, ad obliquos eandem secant angulos. similiter ostendemus, in cono recto, ordinatim positas diametrum suam ad rectos diuidere.*

Hinc porro non leuis exsurgit difficultas. cum DFG *parabola in vtroque cono sit eadem, id est vtrum diametrus* ED *in scaleno, censeri debeat diameter aliqua secundaria parabolæ quæ in cono recto exhibetur: siue quod idem est, an in sectione coni recti, diameter aliqua sit quam ordinatim ad illam posita ad angulos secent obliquos: licet enim per priorem propositionem in vtroque cono demonstretur* DB *lineam diametrum esse, quam in cono recto ad angulos rectos in scaleno ad obliquos secent ordinatim ad illam posita, illud tamen ex discursu Apollonij non constat, in quauis parabola plures posse assignari diametros quarum vnam rectè, alteram obliquè secent ordinatim ad illas posita: & quia de parabolis inclinatis necdum constat, posset* ED *linea quoq; inclinatæ sectionis axis censeri, quem ordinatim posita ad obliquos secent angulos: sed difficultatibus illis omnino satisfacere cõnabimur: ostendemusq; in vna eademq; parabola diametros dari æquidistantes, quarum vnam ad rectos, ad obliquos alteram, secent ordinatim ad illas posita, ac nullas deinde inclinatas dari parabolas.*

Ex dictis & prima parabolæ proprietate constat primò, si AB *lineam ad angulum quemcunque æquidistantes secent* DC, *fueritq; vt* AD *linea ad lineam* AD, *sic* DC *quadratum ad quadratum* DC: *puncta* ACC *esse ad parabolam.*

Secundò patet si CDE *ordinatim posita ad* AB *æquidistans ponatur* CD, *cui indirectum addatur* DF *æqualis* CD, *punctum* F *esse ad parabolam: cùm enim sit vt* AD *ad* AD, *sic quadratum* CD *ad* CD *quadratum, ipsis autem* CD *æquentur* DE, DF: *quadrata quoque* DE, DF *proportionalia sunt lineis* AD, AD: *quare ea quæ diximus puncta* E *&* F *ad parabolam sunt: quæ singulariter & explicitè hîc notare volui, eò quod postmodum sæpius sint assumenda.*

PROPOSITIO II.

SIt ABC triangulum productum plano per axem ABCG, positâque DE lateri AB æquidistante ducatur EG normalis ad diametrum basis AG, secundùm quam, & rectam ED, planum ponatur exhibens in superficie conica sectionem FDG: assumatur autem in ED, punctum quodcunque I per quod in plano FDG recta ponatur HK æquidistans FG;

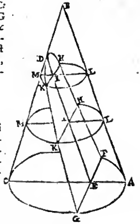
Dico HK in I bifariam secari.

Demon-

Demonstratio.

POsita per I punctum, L M parallela A C ducatur secundum L M, planum L K M æquidistans plano baseos A G C: circulus igitur [a] est L K M, & H K, F G communes intersectiones [b] parallelæ. & quia F E G ex hypothesi normalis ad diametrum A C, ab eadem in E bifariam est diuisa, H K quoque [c] normalis est ad L M, & [d] in I bifariam diuisa. Quod erat demonstrandum.

a 16. Prim. hg.
b 16. Vndecimi.
c Ex elem. 3.
d 3. Tertij.



Corollarium.

EX hac propositione patet, in parabola, si diameter rectam quandam bifariam secet, omnes quoque eidem bissectæ æquidistantes bifariam secari. patet, cùm E D diameter sit quæcunque, & H I K quæuis æquidistantum rectę F G in E bifariam diuisæ.

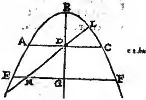
PROPOSITIO III.

DAta linea, parabolam in duobus punctis secante illius exhibere diametrum.

Constructio & demonstratio.

DIuisæ A C bifariam in D ponatur E F æquidistans, quà similiter bissecta in G, ducatur per G & D, linea B G D: dico illam diametrum esse quæsitam; si non, sit L D diameter, quæ producta secet E F in M: quoniam igitur L D diameter bifariam secat A C, bissecabit [e] quoque in M, F E ipsi A C æquidistantem, sed F E bissecta ponitur in D: erit igitur in D & M, bissecta linea F E. Quod fieri non potest. non igitur L D diameter est sed B D. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

e 1. huius.



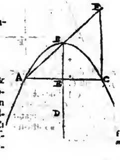
PROPOSITIO IV.

ADato in perimetro parabolæ puncto, ad datam diametrum ordinatim ponere.

Constructio & demonstratio.

SIt in perimetro parabolæ A B C, datum punctum A, & diameter data sit B E D ad quam ex A ordinatim oportet ponere lineam A E C, iuncta A B producatur in F, vt A B, B F æquales sint, & ex F demissa F C parallela B E, occurrat parabolæ in C. iungaturque A C: patet A C [f] in E bifariam esse diuisam, cùm A F, bissecta sit in B, & F C, B E æquidistent; à dato igitur in perimetro parabolę puncto, &c. Quod erat faciendum.

f Euclementis.



Corol-

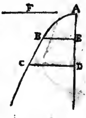
Corollarium.

HInc facilis praxis oritur, per datum in diametro punctum ordinatim ducendi lineam: ex assumpto enim in perimetro quouis puncto, ponatur ordinatim quęcunque, cui per datum in diametro punctum æquidistans ducatur. patet illam ordinatim ad diametrum esse positam.

PROPOSITIO V.

DAtam lineam ad datam in parabola diametrum ordinatim ponere.

Constructio & demonstratio.



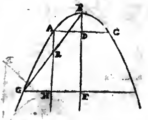
a 7. huius.
b 1 huius.
c 9. quinti.

DAta sit parabola ABC, & in ea diameter AD, ad quam oporteat datam rectam F ordinatim applicare; assumpto quouis puncto B in sectionis perimetro, ponatur ex B a linea BE ordinatim ad diametrum AD, fiatqi vt BE quadratum ad quadratum F, ita AE ad AD lineam, & per D punctum constituatur DC parallela EB. Dico factum esse quod requiritur: est enim ita pars diametri AE ad AD diametri partem, sicut b quadratum ordinatim positę BE, ad quadratum positę CD, sed ex constructione est BE quadratum ad quadratum F, vt AE linea ad lineam AD. Igitur CD c est æqualis ipsi F & est parallela ad EB; datam igitur lineam ordinatim posuimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VI.

ORdinatim applicatarum ad duas diametros quarum altera est axis, illa minor est quæ ad axem applicatur, modò distantiæ à puncto verticis æquales fuerint.

Demonstratio.



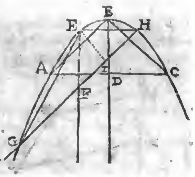
SIt parabolæ ABC axis BD & ordinatim ad illum posita AC: ducta deinde AE parallela BD, fiat BF quadrupla BD, ponaturque FG parallela DA dein FG, bissecta in H ponatur HA æquidistans BF, iungaturque BG: quoniam BD ad BF, eam rationem habet quam vnum ad quatuor ex constructione, igitur quadratum AD ad GF, est vt vnum ad quatuor; igitur GF linea dupla est AD, hoc est HF, & BF dupla est EN; ac proinde BG dupla GE: item AE æqualis ipsi BD, & AC ipsi GF. vnde BG ordinatim d posita est ad diametrum AE; est autem GB e maior GF hoc est AC, igitur GB ordinatim posita ad AE æqualem BD, maior est recta AC quæ ad axem ordinatim collocata est; & quia eandem rationem seruant quadrata applicatarum, quam f partes diametrorum inter verticem & ordinatim applicatas constitutæ, hinc vniuersaliter de omnibus applicatis constat veritas propositionis.

d Defin. 3. huius.
e Ex elementis.
f 1. huius.

Aliter.

Aliter.

PRopositio hæc aliter per Archimedem demonstratur. Sint BD, EF diametri eiusdem altitudinis, & BD quidem axis: ponanturque per D & F, ordinatim lineæ AC, GH.



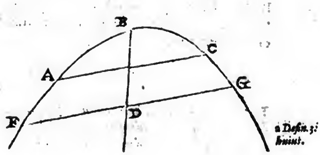
Dico AC minorem esse recta GH, iungantur enim ABC, GEH: & ex E recta demittatur EI normalis ad GH. cùm igitur æquales sint distantiæ EF, BD, æqualia sunt triangula, GEH, ABC per Archimedem. quare vt EI ad BD, sic AC ad GH: est autem BD id est EF maior EI (cùm angulus I in triangulo EIF rectus sit) maior igitur erit GH quàm AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

AD datum punctum in diametro parabolæ ordinatim ponere.

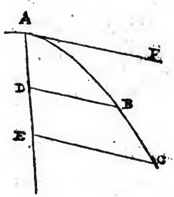
Constructio & demonstratio.

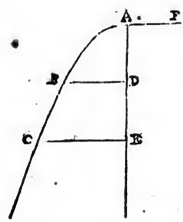
SIt data parabola ABC, cuius diameter aliqua BD, & in ea punctum assignatum D per quod oporteat rectam collocare ordinatim ad BD diametrum; assumpto in perimetro quouis puncto A ducta sit quæuis AC; ordinatim ad diametrum BD cui parallela ponatur per punctum D: patet FDG ordinatim esse [a] positam & in D bifariam diuisam. Fecimus igitur quod petebatur.



a Defin. 3. huius.

PROPOSITIO VIII.



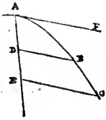


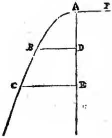
DAtæ diametri in parabola latus rectum exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabola, & in illa diameter BD cuius latus rectum oporteat exhibere. posita sit quæuis BD ordinatim ad diametrum AD, fiantque continuæ proportionales AD, DB, AF. Dico AF satisfacere petitioni: applicetur enim quæuis alia EC parallela DB [b] erit igitur vt AD ad AE, sic DB quadratum ad quadratũ EC: b 1. huius.

sed

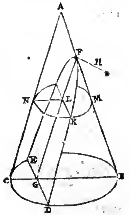




21 sexti. sed vt AD ad AF, sic FAD * rectangulum ad rectangulum FAE; igitur vt quadratum DB est ad quadratũ EC, sic FAD rectangulum ad rectangulum FAE: & permutando vt DB quadratum, ad rectangulum FAD, sic EC quadratum ad rectangulum FAE, sed BD quadrato æquale est rectangulum FAD, quia AF, BD, AD, proportionales sunt; igitur & EC quadratum æquale est rectangulo FAE, ac proinde FA latus rectum diametri AD: exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

Scholion.

Lubet hic apponere methodum, & constructionem qua Apollonius lib. 1. Conicorum latus rectum parabolæ adinuenit: vnaq; breuiter ostendere latus rectum præcedenti propositione à nobis inuentum, idem esse cum eo quod Apollonius aliâ constructione adinuenit.



Sit, inquit, coni vertex A, *basis, circulus* B, C: *seceturq; plano per axem quod sectionem faciat triangulum* ABC; *secetur & altero plano secante basim coni secundùm rectam lineam* DE *quæ ad* BC *sit perpendicularis, & faciat sectionem in superficie coni* DFE *lineam, diameter autem sectionis* FG *æquidistans sit vni laterum trianguli per axem: atque à puncto* F *linea* FG *ad rectos angulos ducatur* FH, *& fiat vt quadratum* BC *ad rectangulum* BAC, *ita linea* HF *ad* FA; *sumatur autem in sectione punctũ quodlibet* K, *& per* K *ducatur* KL, *ipsi* DE *æquidistans. Dico quadratum.* KL *rectangulo* HFL *æquale esse. Assertionem porrò doctissimo & sublimi discursu demonstrat; qui cùm tyronibus difficilior sit, faciliori nos latus rectum methodo præcedenti propositione conati sumus expedire, ostendimus enim posita eadem figura, si fiant* FL, KL, FH, *continuæ proportionales,* FH *latus rectum esse. Nunc restat vt ostendam, illud idem esse cum eo quod Apollonius constructione antedicta adinuenit. Acta per* L *linea* MN, *æquidistante ipsi* BC, *erit planum quod transit per* LKMN, *æquidistans plano coni baseos, adeoq; circulus: &* LK *quadratum, id est ex hypothesi rectangulum* HFL, *æquale rectangulo* MLN: *quare rectangulum* MLN *ad ipsum* LFA, *est vt* HFL ad LFA: *sed* HFL *est ad* LFA, *vt* HF *ad* FA, *igitur vt* HF *ad* FA, *sic* MLN *ad* LFA: *sed ratio* MLN

ad

ad LFA *componitur ex ratione* ML *ad* LF, *& ex* LN *ad* FA; *igitur proportio* HF *ad* FA, *componitur ex* ML ad FL, *&* LN *ad* FA: *est autem* ML *ad* LF, *vt* MN *ad* NA, *adeoq́; &* LN *ad* FA, *vt* MN *ad* MA: *igitur proportio* HF *ad* FA, *componitur ex proportionibus* MN *ad* NA, *& ex* MN *ad* MA, *id est ex* BC *ad* CA, *&* CB *ad* BA: *sed ex ijsdem quoque componitur ratio quadrati* BC *ad rectangulum* BAC, *igitur* HF *est ad* FA, *vt* BC *quadratum ad rectangulum* BAC: *sed posita proportione quadrati* HF *lineæ, ad lineam* FA *eâdem, cum ea quam habet* BC *quadratum ad rectangulum* BAC, *erit* HF *linea per Apollonium latus rectum parabolæ; igitur si* FL, KL, FH *fiant continuæ proportionales, erit* HF *latus rectum idem cum eo quod aliter adinuenit Apollonius. unde patet vtramque constructionem in idem incidere & alteram alterius tantùm esse conuersam; positâ enim proportione* HF *ad* FA, *quæ est* BC *quadrati ad rectangulum* BAC, *infert Apollonius* HF, KL, FL *continuè esse proportionales, adeoq́;* LK *lineam posse rectangulum* HFL, *nos verò positis tribus continuis* HF, KL, FL *inferimus* HF *latus esse rectum, & omnes lateris recti proprietates habere: quia verò tribus illis positis continuis sequitur quoque* HF *esse ad* FA, *vt* BC *quadratum ad rectangulum* BAC, *patet* HF *idem latus rectum esse cum eo quod Apollonius proposuit.*

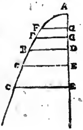
Ex antedictis verò patet ordinatim ad diametrum aliquam applicatas eo maiores esse quo remotiores sunt à vertice suæ diametri, nam semper excrescit rectangulum sub latere recto & parte diametri intercepta à vertice eiusdem & puncto quo ab ordinatim posita secatur: vnde & ordinatim posita, & portio illa diametri ante determinata necesse est quandoque inter se & lateri recto sint æquales, cuius casus sequentibus propositionibus assignabimus.

PROPOSITIO IX.

Sit ABC parabolæ diameter AD æqualis lateri recto, ex D ponatur ad diametrum AE ordinatim linea DB.

Dico DB lineam æquari AD, & si AD, DB lineæ æquentur, dico AD æquari lateri recto, quod inseruit diametro AD.

Demonstratio.



Qvoniam BD linea, ordinatim applicatur ad diametrum AD, erit BD quadratum æquale a rectangulo super AD & latere recto, sed AD linea æqualis ponitur lateri recto, igitur quadratum BD æquale est quadrato AD, adeoque BD, AD lineæ æquales sunt. a 1 huius.

Sint iam AD, BD lineæ æquales, & BD quidem ordinatim posita ad diametrum AD, dico AD lineam æquari lateri recto. cùm enim quadratum BD æquale ponatur quadrato AD, sit autem & BD quadratum æquale rectangulo b super AD & latere recto, erit & quadratum AD æquale rectangulo super AD & latere recto, ideoq́; & AD linea lateri recto æqualis. Quod erat demonstrandum. b ibid.

PROPOSITIO X.

Iisdem positis ducantur ordinatim lineæ CE, FG: & CE quidem cadat infra BD, recta verò FG supra.

Dico AG ad GF rationem minoris inæqualitatis esse, & AE ad EC maioris.

Demonstratio.

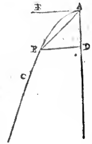
Qvoniam AD linea æqualis ponitur lateri recto, erit FG quadratum æquale c rectangulo GAD, adeoque AG, GF, AD continuæ proportionales; est c ibid.

 autem

a Schol pro. pos. 8. huius. autem AD id est BD, maior quàm [a] FG, igitur & FG maior est quàm AG. Quod erat primum.

Rursum cùm DAE rectangulum æquale sit quadrato CE, proportionales erunt AD, CE, AE lineę: sed AD id est BD, minor est quàm CE ex ante demonstratis: igitur & CE minor est rectâ AE: adeoque ratio AC ad CE est maioris inæqualitatis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.



Esto parabolæ ABC quæuis diameter AD, & ex A ponatur AE, æquidistans ordinatim positis ad diametrum AD; ponatur quoque ex A linea AB, diuidens bifariam angulum EAD, occurrensque parabolæ iterum in B puncto, ex quo ordinatim ad diametrum ponatur BD.

Dico AD lineam æquari lateri recto.

Demonstratio.

b Ex elementis.

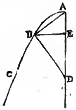
c 6. Primi. d 9. huius.

Quoniam AE, BD æquidistant, angulus EAB [b] æquatur angulo ABD; sed angulo EAB ex hypothesi æquatur angulus BAD, æquales igitur sunt anguli ABD, BAD: adeoque [c] & lineæ BD, AD: vnde AD, [d] lateri recto est æqualis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Sit ABC parabolę axis AD, & ex A demissa linea AB, parabolæ iterum occurrat in B puncto ex quo ad axem ordinatim ponatur BE. ducatur autem & BD normalis ad AB, occurrens axi in D.

Dico DE lineam æquari lateri recto.



Demonstratio.

e Ex elementis. f 8. huius.

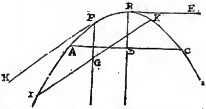
Quoniam angulus ABC rectus est, & BE normalis ad axem AD, proportionales [e] sunt AE, EB, ED: & EB quadrato æquale rectangulum AED: sed & EB quadrato æquale est rectangulum super AE [f] & latere recto, rectangulum igitur AED æquale est rectangulo sub AE & latere recto. æqualis ergo ED est lateri recto. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

Latus rectum axeos, minimum est laterum rectorum, reliquarum diametrorum.

Demon-

Demonstratio.



Parabolæ ABC axis sit BD, illiusque latus rectum BE, sit autem & alia quævis diameter FG, cuius latus rectum ponatur FH: dico BE minus esse latere recto FH: ponatur enim ADC ordinatim ad axem, sumptaque FG æquali BD, ducatur per G ordinatim ad diametrum FG, linea IK. maior igitur est, a IG quàm AD, & IG quadratum maius quadrato AD: sed IG quadrato æquatur b rectangulum super HF, FG, & EBD rectangulum æquale est quadrato AD, maius igitur est rectangulum HFG, rectangulo EBD: æquales autem sunt ex constructione BD, FG, igitur FH latus rectum maius est latere recto BE: igitur latus rectum a xeos minimum est, &c. Quod erat demonstrandum.

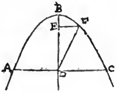
a 6. huius. b 8. huius.

PROPOSITIO XIV.

Sit ABC parabolæ axis BD maior latere recto: & per D ordinatim ad axem posita ADC: factaq; DE æquali lateri recto, ponatur EF æquidistans AC, iunganturque DF.

Dico FD lineam æquari lineæ DC.

Demonstratio.



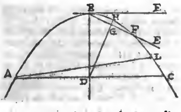
Quoniam ED lateri recto æqualis est, quadratum FE æquatur rectangulo BED: addito igitur quadrato DE; quadrata FE, DE simul sumpta, id est quadratum FD, ob angulum FED rectum æquale est c rectangulo BDE: sed & BDE rectangulo æquale est quadratum DC: æqualia igitur sunt quadrata FD, DC. Quod erat demonstrandum.

c 3. secundi.

PROPOSITIO XV.

Omnis linea per apicem diametri acta, & ordinatim positæ æquidistans, sectionem contingit: & contra quæ contingenti æquidistat ordinatim posita est ad diametrum ex contactu demissam.

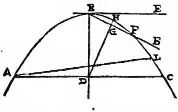
Demonstratio.



Sit ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim posita ADC: cui per B vertice diametri ponatur æquidistans BE, dico illam, contingere sectionem in B. si enim non contingit parabolam, secet illam in F: diuisaque BF bifariam in G, ponatur per G & D, linea GD; cùm igitur FB, AC æquidistantes bifariam diuidat GD, erit illa d diameter ad quam ordinatim posita est AC; sed & AC quoque ordinatim applicata est ad diametrum BD,

d 1. Defin. huius.

cùm



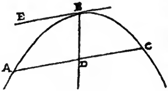
eſt ab illa bifariam ſecetur: linea igitur A C ordinatim poſita eſt ad duas diametros, quod fieri non poteſt: alias enim ipſi A C æquidiſtantes à diametris B D, G D bifariam in diuerſis punctis diuiderentur. non igitur B E ſecat, ſed contingit ſectionem in B.

Sit iam E B contingens, illique æquidiſtet A C: dico illam ordinatim eſſe applicatam ad diametrum B D. ſi enim non, ponatur A L ordinatim ad B D, æquidiſtat igitur A L contingenti B E; & quia A C quoque contingenti parallela eſt, ipſa A L æquidiſtat A C, quod fieri non poteſt, cùm in A puncto ſeſe decuſſent. non igitur A L ordinatim poſita eſt ad B D, ſed A C linea æquidiſtans contingenti B E. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

PEr datum in parabolæ perimetro punctum, contingentem ducere.

Conſtructio & demonſtratio.



SIt in A B C parabolę perimetro datum punctum B, oporteat per illud contingentē ponere: demiſſa ſit ex B diameter B D, ad quam ordinatim ponatur A C, cui æquidiſtans per B ducatur B E: [a] patet illam eſſe contingentem; per datum igitur punctum, &c. Quod erat faciendum.

a 15. huius.

PROPOSITIO XVII.

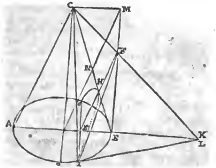
PArabolam contingens conueniat cum diametro: ad quam ex puncto contactus ordinatim quædam poſita ſit.

Dico diametrum interceptam, inter ordinatim applicatam & punctum in quo contingens cum diametro concurrit, à parabola bifariam diuidi.

Demonſtratio.

SIt A B C conus quicumque, ſectus triangulo per axem A B C, diameter autem baſeos A G B, ſit A B, in qua aſſumpto quouis puncto E quod centrum non ſit ponatur E H æquidiſtans A C: & E I normalis ad A B: tum per H E, E I fiat ſectio, exhibens parabolam G H I: poſitoq; C D, axe coni, perficiatur parallelogrammum C D B, cuius lateri B M occurrat E H producta in F: inductaque C F, diametro A B protractæ occurrat in K: ponatur dein per I contingens circulum A I B in I, conueniens cum A B in L, puncto quod idem eſt cum puncto K: cùm enim C K, ſit ad [b] F K, vt C D ad F B, id eſt M B ad F B, id eſt D B ad E B, erit quoque D K ad B K, vt D B ad E B, & diuidendo B K ad D B, vt B E ad E D, & componendo D K ad D B, vt D B ad D E; proportionales igitur ſunt D E,

b Per elementa.



DE, DB, DK: igitur ᵃ contingens per I posita cum diametro conuenit in K: idem ergo punctum est K & L; vlterius, iungantur puncta CE, CI: quoniam igitur CI linea in superficie est coni, triangula sunt, CEI, CIK, & planum CIK continget conum in linea CI ponatur tandem in plano CIK linea IF: continget illa parabolam in I: cùm enim planum CIK conum contingat, linea autem FI in eodem plano sit, & simul in plano parabolæ, cùm puncta K & I, in eodem sint, patet FI contingentem esse parabolæ in I. ᵃ 17. lib. de circulo.

Vlterius cùm CM linea æquidistans & parallela sit semidiametro DB, æquidistat quoque & æqualis est AD: vnde AC, DM parallelæ: & quia FE æquidistat AC, æquidistabit EF ipsi DM: est autem MD diameter parallelogrammi DM, in N à diametro ᵇ CB bifariam diuisa, recta igitur FE in H, quoque ab eadem diametro bissecta est: æquales ergo sunt lineæ EH, HF. igitur parabolam contingens, &c. Quod erat demonstrandum. ᵇ Per elementa.

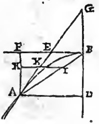
Quod si punctum assumptum ipsum centrum sit, patet demonstratio. eodem enim modo ostendetur OM esse contingentem parabolæ quæ per lineas ND, DO, &c. ducetur.

PROPOSITIO XVIII.

PArabolam ABC cuius diameter BD, contingant in A & B, rectæ AE, BE conuenientes in E: & EB quidem AF, æquidistanti BD occurrat in F.

Dico FB in E bifariam esse diuisam.

Demonstratio.



PRoducta AE conueniat cum diametro in G, ponaturque ex A ordinatim linea AD. quoniam AD, EB æquidistant, vt GB ad GD, sic EB est ad AD, id est FB, sed GB dimidia ᶜ est GD, igitur & EB dimidia quoque est FB. Quod erat demonstrandum. ᶜ 17. huius.

Corollarium primum.

HInc patet, si iunctâ AB quotuis HI ponantur æquidistantes ipsi FB, illas bifariam à contingente AG diuidendas.

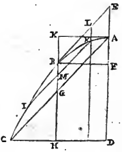
Corollarium secundum.

SEquitur secundò rectas FA, GB, item AE, GE æquales esse adeoque & AFE, GEB triangula æqualia. patet, cùm FE, EB æquales sint ostensæ, & AFE, GEB triangula similia ob GB, FA æquidistantes.

PROPOSITIO XIX.

IN parabola diametri omnes æquidistant axi.

Demonstratio.

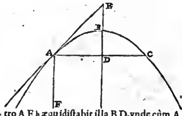


SIt ABC parabolæ axis AD, cui in E occurrat contingens BE, positaque AC parallela contingenti BE, demittatur ex B, linea BG æquidistans axi, ponatur BF, CHD ordinatim ad axem AD, & BG producta occurrat contingenti per A ductæ in K: Quoniam BE cõtingens est & BF ordinatim ad axem AD applicata, æquales sunt lineæ [a] EA, FA. & quia BF communis altitudo est, triangulum EBF, [b] parallelogrammo BA æquale est: rursum vt AF ad AD, sic [c] FB quadratum ad quadratum CD, & FK parallelogrãmum ad parallelogrammum DK: vt quadratum igitur FB ad quadratum CD est, sic FK parallelogrammum [d] ad parallelogrammum DK, sed vt FB quadratum ad quadratum CD, sic EBA triangulum [e] ad triangulum CAD; igitur vt FK parallelogrammum ad parallelogrammum DK, sic EBF triangulum est ad triangulum ACD: & permutando vt FK parallelogrammum ad triangulum BFE, sic DK parallelogrammum est ad triangulum ACD: æqualia autem ostensa sunt, triangulum BFE & parallelogrammum FK; æqualia igitur sunt DK parallelogrammum & triangulum ACD: & ablato communi AGHD, æqualia remanent triangula AGK, CHG. vnde cum similia quoque sint ob AK, CH æquidistantes, æqualia sunt latera [f] KG, GH, & CG, GA: diuisa igitur bifariam est AC. eodem modo si IK ponatur æquidistans CA, & ex K diameter posita sit LK occurrens BE contingenti in L, ostendetur IK in M, bissecari à linea BG: diameter [g] igitur sectionis est BG: quare cùm EB contingens sit quæcunque, adeoque & BH quæuis æquidistans axi, patet diametros omnes axi æquidistare. Quod erat demonstrandum.

a Ibid.
b Per elementa.
c 1. huius.
d 1. Sexti.
e 19. Sexti.
f Per elementa.
g 3. huius.

Ex quo sequitur diametros omnes in parabola esse parallelas.

PROPOSITIO XX.



OMnis contingens per extremitatem ordinatim positæ ducta, cum illius diametro conuenit.

Demonstratio.

POsita sit diameter BD, & ad illam ordinatim applicata AC: agaturq; per A contingens, dico illam BD diametro occurrere: ducta enim diametro AF [h] æquidistabit illa BD, vnde cùm AE secet AF æquidistantium vnam, alteram quoque DB, [i] producta intersecabit. Quod erat demonstrandum.

h 19. huius.
i Per elementa.

Corol-

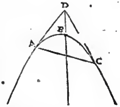
Corollarium.

Hinc patet, quascumque duas contingentes parabolam, conuenire in aliquo puncto extra sectionem: patet ex iam demonstratis.

PROPOSITIO XXI.

Contingentes actæ per extrema ordinatim applicatæ cum eiusdem diametro, in vno eodemque conueniunt puncto.

Demonstratio.

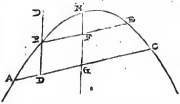


Sit ad ABC parabolæ diametrum BD, ordinatim applicata A C, dico contingentes per A & C ductas, diametro B D occurrere in vno eodemque puncto D. demonstratio patet, cùm pars diametri à sectione & contingente intercepta æqualis sit portioni à sectione & ordinatim applicata interceptæ. igitur contingentes, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Per datum punctum in perimetro parabolæ diametrum ducere.

Constructio & demonstratio.



Sit in ABC perimetro assignatum punctum B, ex quo oporteat diametrum ponere; ductâ quauis secante B E, exhibeatur illius diameter a H F, cui per B æquidistans ponatur B D: patet illam b sectionis esse diametrum: à dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.

a 3 huius.

b 19. huius.

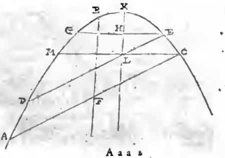
Corollarium.

Eadem omnino praxi vtemur, si ex dato, extra vel intra sectionem puncto D, diametrum oporteat ponere. constructio & demonstratio patet ex prima propositione.

PROPOSITIO XXIII.

Datæ parabolæ axem exhibere.

Constructio & demonstratio.



Sit A B C parabola cuius axem oporteat exhibere, ponantur duæ quæuis parallelę D E, A C quarũ c exhibeatur diameter B F: ad quam ex E & C normaliter ducantur E G, C M; alterâque illarum, puta E G bifariam diuisa in

c 3. huius.

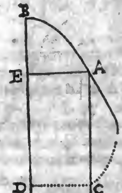
in H ponatur per H æquidiſtans diametro BF. dico illam axem eſſe. quoniam enim diametro BF æquidiſtat, erit [a] illa quoq; diameter ſectionis, & quia æquidiſtantium EG, CM vnam ad rectos biſecat angulos, biſecabit & [b] alteram, ad rectos: axis [c] igitur ſectionis eſt KL: exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

a 19. huius. b 2. huius. c 1. Definit. huius.

PROPOSITIO XXIV.

OMnis linea in parabola axi æquidiſtans, ſectioni in vno tantum puncto occurrit.

Demonſtratio.



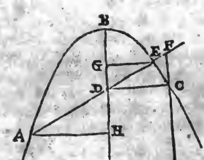
d 1. huius.

POnatur ABC parabolę axis BD; & alia quęuis ei æquidiſtans AC dico [d] AC in vno tantum puncto ſectioni occurrere: ſin verò, occurrat iterum in C: & ponantur ordinatim ad axem rectę AE, CD: erit igitur vt BE linea ad lineam BD, ſic EA quadratum ad quadratum DC, quod fieri non poteſt, cùm AE, CD quadrata æqualia ſint inter ſe, (ob AD parallelogrammum) & BE linea minor rectâ BD. igitur AC diameter, parabolæ tantum ſemel occurrit: Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.

OMnis linea in parabola, quæ non eſt diameter ſectioni occurrit in duobus punctis.

Demonſtratio.



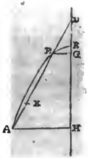
POnatur ABC parabolæ axis BD, & linea KD quæ non ſit diameter. dico illam ſectionibis occurrere: Quoniam KD non eſt diameter adeoque axi non æquidiſtat, producta neceſſario illi occurret in puncto quouis D (cùm in eodem plano exiſtat) quod ſi D punctum fuerit intra parabolam, ponatur ex D ordinatim DC, & per C diameter EF; occurret illa ſectioni in vno tantum puncto; & quia eadem axi æquidiſtat producta quoque occurret KD productæ in F puncto, quod extra ſectionem eſt. vnde KDF prius neceſſario occurrit in puncto quouis E. ducta igitur ex E ordinatim EG fiant proportionales BG, BD, BH poſitaque ad H ordinatim linea, occurrat ipſi KD in puncto quouis A. quoniam BG, BD, BH ponuntur proportionales, erit HD ad DG, vt HB ad BD, & HD quadratum [e] ad quadratum DG, vt HB quadratum ad quadratum DB, id eſt vt HB linea, ad lineam BG: ſed vt HD quadratum ad quadratum DG, ſic HA quadratum ad quadratum GE: igitur vt HB linea ad lineam BG, ſic HA quadratum ad quadratum GE, vnde punctum [f] A eſt ad parabolam, & DK, linea axi non parallela vtrimque ſectioni occurrit.

e 1. De progreſſionibus.

f Coroll. prima huius.

Si verò DK linea occurrat axi extra ſectionem, patet antè parabolę occurrere in puncto quouis E: ex quo ducta ordinatim linea EG, fiant BG, BD, BH proportionales; & ex H ducatur HA parallela EG, occurrens KD lineæ in A. quo-

quoniam igitur est HB ad BD, vt BD ad BG, erit componendo permutando HD ad DG, vt DB ad BG, est autem vt HD ad DG, sic AH ad EG, ergo vt DB ad BG, id est per constructionem BH ad BD, sic AH ad EG. vnde & HA quadratum ad quadratum GE est vt HB, quadratum ad quadratum BD, id est (cùm HB, BD, BG, sint continuæ,) vt HB linea est ad lineam BG, ac proinde punctum A est ad parabolam, & AD linea sectioni bis occurrit. Quod fuit demonstrandum.



Corollarium.

Hinc pulchra educitur propositio: nimirum si BG, BD, BH ponantur continuæ & ex G ordinatim linea GE: agaturque per puncta E & D linea, occurrens rectæ ex H ductæ & ipsi GE parallelæ in A: quod punctum A sit ad parabolam. demonstratio habetur in priori propositione.

Sequitur secundò nullam lineam parabolæ in pluribus quam duobus punctis occurrere. Cùm enim parabola, sectio sit coni, & ipsi cono nulla linea, in pluribus quam duobus punctis occurrat, patet nec vlli sectioni conicæ, lineam in pluribus quam duobus punctis occurrere.

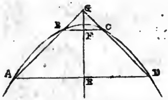
PROPOSITIO XXVI.

Parabolam ABC secent duæ quæuis parallelæ AD, BC quarum diameter ponatur EF.

Dico iunctas AB, DC diametrum in eodem puncto G decussare: & si AC, AD æquidistent iunctæq; AB, CB conueniant in G. dico G punctum esse in diametro linearum BC, AD.

Demonstratio.

Quoniam EF diameter est rectarum BC, AD, igitur diuisæ sunt bifariam BC, AD in punctis F & E. vnde vt AE ad BF, sic est AG ad BG: hoc est EG ad FG. sed vt AE ad BF, ita ED ad FC; igitur vt ED ad FC, ita est EG ad FG; hoc est DG ad CG. igitur punctũ G commune est tribus lineis AB, DG, EF. Quod fuit primum.



Idem quoque ostenditur si G punctum cadat intra parabolam. si iam ponantur AD, BC parallelæ, & iunctæ AB, CD conueniant in puncto quouis G, dico G punctum esse in diametro ad quam BC, AD ordinatim ponuntur.

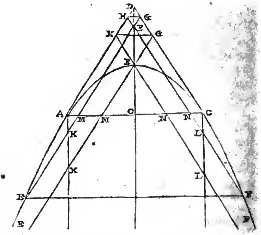
Diuisa enim BC bifariam in F demittatur ex G per F linea GE: quoniam igitur AD, BC æquidistant, erit AE ad ED, vt BF ad FC; sed BC in F bifariam ponitur diuisa, igitur & AD in E, a quoque diuisa est bifariam: vnde GE diameter est linearum BC, AD; &c. Quod erat demonstrandum. a 1. huius.

PROPOSITIO XXVII.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim applicata AC, aganturq; per A & C, contingentes AD, CD, conuenient illę cum diametro in D: tum punctum sumatur B, quodcunque in diametro BD: & ex B rectæ ponantur BE, BF, æquidistantes contingentibus, parabolę verò occurrentes in E & F.

Dico iunctam EF æquidistate AC, adeoq; ordinatim esse positam ad diametrum BD.

Demonstratio.



DEmittantur ex A & C, diametri AK, CL occurrentes rectis BE, BF in L & K: productæque EB, FB; contingentibus occurrant in H & G: erit igitur HD, GB parallelogrammum, & HG bissecta à diametro DB, æquidistant ergo HG, AC: & quia AD, BE quoque parallelæ sunt, æquantur HG, AM: similiter cùm æquentur HG, NC, rectæ AM, NC æquales sunt: est autem AC in O, bifariam diuisa, æquantur ergo & reliquæ MO, ON: quare vt AM ad MO, sic CN ad NO. sed vt AM ad MO sic AK ad BO; & vt CN ad NO, sic LC ad BO, igitur vt AK ad BO sic CL ad BO, æquales ergo sunt diametri AK, CL: quia verò EB, FB contingentibus æquidistant, portiones illarum parabolâ interceptæ, in a K & L bifariam sunt diuisæ. Vlterius ponatur per E æquidistans AC, linea EP. occurrens parabolæ in E & F, rectæ BF in P. quia igitur AC bissecta est à diametro BD, erit & EF ab eadem in R bifariam diuisa; & ER, RF æquales inter se; quia verò AC æquidistat HG, æquidistabunt quoque EP, HG: & EP quoq; vt HG, à diametro BD bissecta est: æquantur igitur RP, RF: & puncta FP vnum idemq; sunt: estque F communis intersectio linearum EF, BF cum parabola: æquidistant igitur EF, AC, HG. Quod erat demonstrandum.

a 4. huius.

Corolla-

Corollarium.

Ex his sequitur primò: posita E F ordinatim ad diametrum B D quam in D secent contingentes duæ A D, C D: lineas ex E & F ductas ipsis A D, C D æquidistantes diametrum quoque B D, in vno eodemque puncto decussare, patet demonstratio ex præcedenti, cuius conuersa est.

Sequitur secundò: posita A C ordinatim ad diametrum B D demissisque ex A & C æqualibus diametris AK, CL, quod rectæ per K & L, ordinatim positæ, D B diametro occurrant in vno eodemque puncto. patet ex ante dictis demonstratio, cùm tangentes per A & C actæ, ordinatim per K & L positis æquidistent, & B D diametro in vno eodemque occurrant puncto.

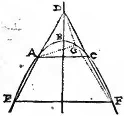
Sequitur tertiò: lineam (Q T) coniungentem puncta, in quibus rectæ (B E, B F) contingentibus æquidistantes, parabolę occurrunt, ęquidistare rectæ (E F) extrema linearum B E, B F coniungenti, adeoque lineas Q T, A C, E F esse parallelas. ex ante dictis demonstratio manifesta est.

PROPOSITIO XXVIII.

Esto ABC parabolæ diameter B D, in qua assumpto puncto quouis D, demittatur D E secans parabolam in duobus punctis A & E & ex E ordinatim ponatur E F, iunctaque F D occurrat parabolę in C.

Dico E F, A C lineas æquidistare.

Demonstratio.



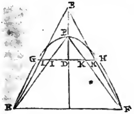
Si enim non sint parallelę, ponatur A G æquidistans E F, & ex F per G, ducatur F G, conueniet illa cum diametro B D a in D, est autem ex constructione D F linea recta occurrens sectioni in C; igitur recta F G D, eadem est cum F C D. vnde & punctum G idem cum C puncto, igitur æquidistant E F & A C. Quod fuit demonstrandum. a 16. huius.

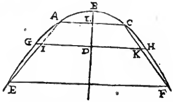
PROPOSITIO XXIX.

Aequidistent in parabola quęuis lineæ A C, E F, iunctisq; A E, C F ponatur alia quæuis G H parallela A C, occurrens iunctis A E, C F in I & K.

Dico G I, K H lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.

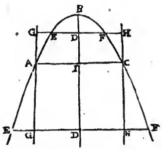




Ponatur L D diameter rectarum A C, G H. Quoniam H G ęquidistat A C ordinatim positæ, erit H G in D b bifariam diuisa: est autem I D æqualis D K cùm b 1. huius.

a 26. huius. sit ID ad DK, vt AL ad LC (quia EA, a FC lineæ in idem punctum diametri conueniunt) igitur & reliquæ IG, HK quoque sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXX.



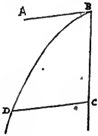
AEquidistet rursum in ABC parabola, rectæ AC, EF, ponanturque per A & C diametri AG, HC occurrentes EF lineæ in G & H.

Dico EG, FH lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.

POnatur ID diameter linearum AC, EF. Quoniam EF, AC lineæ ordinatim positæ sunt ad diametrum ID, erunt AC, EF in D & I bifariam diuisæ, sed & GH in D bifariam est diuisa, cùm GH æqualis sit rectæ AC, igitur reliquæ EG, HF, sunt inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXI.



DAto angulo ABC & puncto in illo D, oportet per B & D parabolam describere cuius diameter sit BC & AB eandem contingens.

Constructio & demonstratio.

DVcatur ex D linea DC parallela AB occurrens BC lineę in C: fiatque vt BC ad DC, sic DC ad AB, erit AB latus rectum parabolę quæsitę, ac proinde determinata est parabola quę petebatur.

P A-

PARABOLÆ
PARS SECVNDA

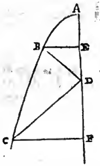
Linearum in parabola tam continuam, quàm discretam contemplatur proportionem.

PROPOSITIO XXXII.

SIt ABC parabolæ axis AD, in quo assumpto quouis puncto D, educantur ex D ad peripheriam lineæ DB, DC constituentes angulos ADB, CDF æquales; tum rectæ ponantur BE, CF ordinatim ad axem AF.

Dico AE, AD, AF, in continua esse analogia & contra.

Demonstratio.



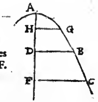
QVoniam EB, CF ordinatim positæ sunt ad axem, anguli BED, CFD recti sunt: æquales autem ponuntur anguli BDE, CDF; similia igitur sunt triangula BED, CFD: & vt EB ad FC, sic ED ad FD: rationis autem EB ad CF, duplicata est[a] ratio AE ad AF, ergo & duplicata est rationis ED ad DF: vnde AE, AD, AF, continuę sunt proportionales. vt facile deducitur ex prima de progress. Geometricis. [a] 1. huius.

Sint iam proportionales AE, AD, AF, positisque ordinatim BE, CF: iungantur BD, CD: dico angulos BDE, CDF æquari, cùm proportionales sint AE, AD, AF, ratio AE ad AF duplicata est rationis AD ad AF id est ED ad DF, sed etiam ratio AE ad AF, duplicata est rationis BE ad CF, igitur vt ED ad DF, sic BE ad CF, & vt DE ad BE, sic DF ad FC: vnde cùm anguli proportionalibus lateribus contenti recti sint, similia sunt triangula BED, CFD, & anguli BDE, CDF æquales: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

SIt ABC parabolę diameter AD diuisa in H, D F, vt AH, AD, AF cōtinuę sint proportionales: ponantur autem ordinatim lineę HG, DB, FC.

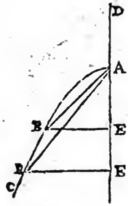
Dico illas in continua esse analogia.



Demonstratio.

PAtet; cùm AH, AD, AF sint continuę proportionales & duplicatam rationem habeant linearum GH, BD, CF.

PROPOSITIO XXXIV.



ESto A B C parabolę axis A D æqualis lateri recto, ductaque ordinatim linea quacunque E B, iungantur A B.

Dico A E, A B, E D lineas esse proportionales.

Demonstratio.

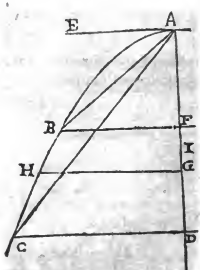
QVadratum A B æquale est quadratis A E, E B: sed E B quadratum æquatur rectangulo E A D; igitur quadratum A B æquale est rectangulo E A D vnà cum quadrato A E, id est rectangulo A E D. quare A E, A B E D lineæ sunt proportionales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

PArabolam A B C cuius diameter A D contingat in A linea A E, demissisq; ex A lineis A B, A C quæ parabolæ occurrant in B & C vt anguli E A B, D A C æquales sint ductisque ordinatim B F, C D, inueniatur A G, media inter A F & A D.

Dico A G æquari lateri recto; & si anguli E A B, D A C æquales fuerint, & A G linea æqualis lateri recto, dico A F, A G, A D esse proportionales & si A F, A G, A D fuerint continuæ, & A G media æqualis lateri recto: dico angulos E A B, D A C esse inter se æquales.

Demonstratio.



DVcatur ex G ordinatim linea G H. Quoniam angulus D A C ex hypothesi ęqualis est angulo E A B, addito vel dempto communi angulo B A C, angulus B A D æqualis est angulo E A C, id est angulo A C D; (ob A E, C D parallelas) æquales autem sunt & anguli B F A, C D A, triangula igitur A B F, A C D inter se similia sunt & vt B F ad F A, sic A D ad D C, vnde F A D rectangulo, æquale rectangulum B F, C D; est autem F A D rectangulo ex hypothesi ęquale quadratum A G, & quadratum H G æquale rectangulo B F, C D, cùm B F, A G, C D lineæ proportionales sint per pennultimam; igitur quadratum A G, æquale est quadrato H G, & A G linea ęqualis lineæ H G; adeoque a & lateri recto. Quod erit primum.

a 9. huius.

Sit iam A G linea æqualis lateri recto, & anguli E A B, D A C ęquales, dico A F, A G, A D in continua esse analogia. Si enim non sint proportionales, inueniatur inter A F & A D media A I: erit igitur per primam partem huius linea A I, æqualis lateri recto, b adeoque & A G lineæ: quare A F, A G, A D in continua sunt analogia, nec quæuis alia media inter A F & A D, præter A G. Quod erat secundum.

b Ibid.

Rursum sit A G æqualis lateri recto, & A F, A G, A D proportionales, dico angulos E A B, D A C esse inter se æquales. quoniam enim A F, A G, A D continuæ sunt proportionales, F A D rectangulũ æquale est quadrato A G id est quadrato H G: sed &

sed & HG quadrato æquale [a] est rectangulum BF, CD: igitur & rectangulo FAD æquatur rectangulum BFCD: vnde vt AF ad BF, sic CD ad AD; æquales autem sunt anguli AFB, ADC lateribus proportionalibus contenti, igitur triangula AFB, ADC inter se similia sunt, & angulus BAF æqualis angulo ACD, id est angulo EAC: dempto ergo communi angulo BAC, manet angulus EAB æqualis angulo CAD. Quod erat demonstrandum. [a] Ex 33 huius.

Corollarium.

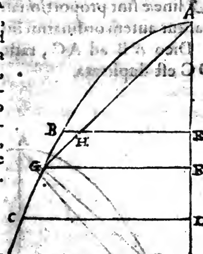
Iisdem positis sequitur triangula BAF, CAD esse inter se similia. patet per primam partem præcedentis propositionis.

PROPOSITIO XXXVI.

Sit ABC parabolæ diameter AD diuisa in E & F vt AE, AF, AD sint proportionales, & AF media æqualis lateri recto: positis autem ordinatim lineis EB, FG, DC, ex A ad G, ducatur recta AG occurrens EB lineæ in H.

Dico AD, DC, FG, EB, EH lineas continuè esse proportionales.

Demonstratio.



Quoniam AF æqualis est lateri recto, GF, FA [b] lineæ æquales sunt: ratio igitur AF [c] ad AD, id est GF ad AD, duplicata est rationis GF ad CD: proportionales igitur sunt AD, CD, GF. quia verò AD, AF, AE sunt continuæ, etiam [d] CD, GF, BF proportionales sunt; continuant igitur eandem rationem AD, CD, GF, BE. deinde cùm ratio AF ad AE, id est GF ad HE, duplicata sit rationis GF ad BE, proportionales quoque sunt GF, BE, HE; continuæ igitur sunt in eadem ratione AD, CD, GF, BE, HE: quod erat demonstrandum. [b] 9 huius. [c] 1 huius. [d] 33 huius.

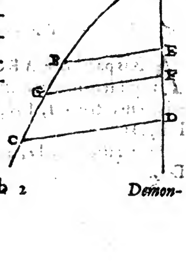
Corollarium.

Hinc sequitur AE, FB, FG, CD quoque in continua esse analogia: ratio enim AF ad AE, id est GF ad BE, duplicata est rationis GF ad BE, proportionales igitur sunt AE, BE, GF: sed vt BE ad GF, sic GF est ad CD, cum AE, AF, AD sint continuæ; proportionales igitur sunt AE, EB, GF, CD.

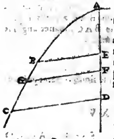
PROPOSITIO XXXVII.

Esto ABC parabolæ diameter AD diuisa in E & F, vt AE, AF, AD lineæ sint proportionales, & AD extrema æqualis lateri recto; ducantur autem ordinatim lineę EB, FG, DC.

Dico AE ad EB, duplicatam habere rationem eius, quam habet AF ad FG.



Demon-



Demonstratio.

a 29. huius. b 17. Progressionum.

Qvoniam AE, AF, AD lineæ ponuntur continuæ, proportionales quoque erunt EB, FG, DC: ponitur autem AD prima seriei AE, AF, AD æqualis lateri recto, adeoque a ipsi DC primæ seriei EB, FG, DC, igitur b AE linea ad lineam EB tertia ad tertiam duplicatam habet rationem eius quam habet AF ad FG, secunda ad secundam. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

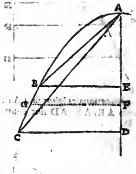
Hinc sequitur rectangulum EAF ad rectangulum EBFG rationem habere triplicatam eius quam habet AF linea ad lineam FG. est enim ratio rectanguli EAF ad rectangulum EBFG composita ex AE ad EB, & AF ad FG. sed ratio AE ad EB, duplicata est rationis AF ad FG, igitur rectangulum EAF ad rectangulum EBFG triplicatam habet rationem eius quam habet AF linea ad lineam FG.

PROPOSITIO XXXVIII.

Sit ABC parabolæ diameter AD diuisa in E & F, vt AE, AF, AD lineæ sint proportionales, & AF media æqualis lateri recto, ponantur autem ordinatim lineę EB, DC: iunganturque AB, AC.

Dico AB ad AC, rationem habere triplicatam eius, cuius EB ad DC est duplicata.

Demonstratio.



c Coroll. 35. huius.

d Coroll. 36. huius.

e 33. huius.

Dvcatur ordinatim linea FG. Quoniam AE, AF, AD lineæ proportionales sunt, & AF media æqualis lateri recto, triangula AEB, ADC c similia sunt, adeoque vt AB ad AE, sic AC ad CD: & iouertendo permutando vt AE ad CD, sic AB ad AC; iam verò cùm AF æqualis facta sit lateri recto, adeoque & FG eidem æqualis AE, d EB, FG, DC erunt continuæ; ratio igitur AE ad CD, primæ ad quartam triplicata est rationis BE ad FG, secundæ ad tertiam, igitur & AB ad AC, triplicatam habet rationis EB ad FG, cuius EB ad DC, e habet duplicatam. Quod erat demonstrandum.

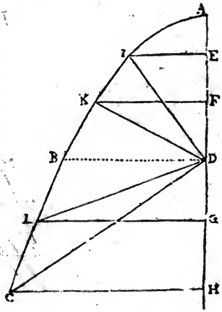
PROPOSITIO XXXIX.

Axis parabolæ ABC diuisus sit in continuè proportionales; & AD quidem media existat inter AE, AF, AG, AH. ductisq; ordinatim ad axem rectis EI, FK, DB, GI, HC, ponantur quoque DI, DK, DL, DC.

Dico rationem DI ad DC duplicatam eius esse quam habet KD ad DL.

Demon-

Demonstratio.



QVoniam eandem continuant rationem A E, A F, A D, A G, A H, proportionales quoque sunt [a] E I, F K, D B, G L, H C. quia verò ratio A E ad A H, duplicata est tam rationis E I ad C H, quàm rationis A D ad A H, id est [b] E D ad D H, cùm A E, A D, A H, proportionales sint, ratio E D ad D H, eadem est cum ratione E I ad C H: similia igitur sunt triangula I E D, C H D: quare I D ad D C, vt E D ad D H, id est A E ad A D, hoc est in duplicata rationis I E ad B D. similiter ostendentur triangula F K D, G L D similia, & K D esse ad L D, vt F D ad G D, id est vt A F ad A D, id est in duplicata rationis K F ad B D: sed ratio I E ad B D, duplicata est rationis K F ad B D, cùm I E, K F, B D proportionales sint, ratio igitur I D ad C D, duplicata est eius quam habet K D ad L D. Quod erat demonstrandum.

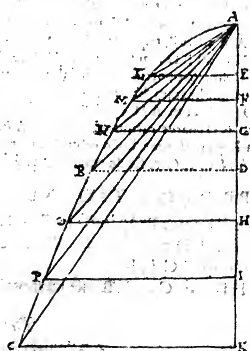
[a] 33. huius.

[b] 1. De progressionibus.

Corollarium.

SI iam A D fuerit media inter septem continuè proportionales quarum extremæ A E, A H, similiter ostendetur I D ad D C, nimirum duas extremas triplicatam habere rationem eius quam habent K D ad D L, duæ quoque extremæ: & sic de reliquis accrescit semper proportio.

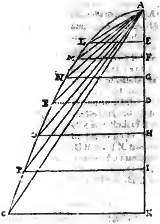
PROPOSITIO XL.



ESto A B C parabolæ axis A K diuisus vt A E, A F, A G, A D, A H, A I, A K sint continuæ proportionales, & A D media totius seriei æqualis lateri recto. ductisq; ordinatim lineis E L, F M, G N, D B, H O, I P, K C, iungantur A L, A M, A N, A B, A O, A P, A C.

Dico rationem A M ad A P duplicatam esse rationis A N ad A O & A L ad A C rationem triplicatam eius quam habet A N ad A O, atque ita deinceps in infinitum procedendo inuenietur augmentum vnius rationis.

Demonstratio.

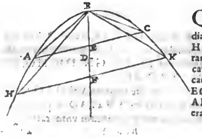


QVoniam A E, A F, A G, A D, &c. sunt continuæ proportionales & totius seriei media ponitur A D; erunt quoque A F, A D, A I continuæ proportionales, nimirum secunda, quarta, & sexta. vnde cùm A D media æqualis ponatur lateri recto, a 38. huius. erit ratio A M ad A P, triplicata eius a cuius duplicatam habet M F ad P I: est autem ratio M F ad P I, duplicata rationis M F ad B D, cum M F, B D, P I sint proportionales; igitur ratio A M ad A P, triplicata est rationis M F ad B D, id est sextuplicata eius quam habet N G ad B D, quia M F, N G, B D sunt continuæ. eodem modo cum A G, A D, A H sint proportionales, ostenditur rationem A N ad A O, triplicatam esse eius cuius duplicatam habet N G ad O H, id est triplicatam eius quam habet N G ad B D. vnde cùm A M ad A P, ostensa sit rationem habere sextuplicatam ipsius N G ad B D, patet rationem A M ad A P, duplicatam esse rationis A N ad A O. eadem prorsus methodo ostenditur, rationem A L ad A C, triplicatam esse rationis A N ad A O, & sic de cęteris. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

SIt A B C parabolæ diameter B D, diuisa in E & F, vt B E, B D, B F sint proportionales, & B D media æqualis lateri recto, ponanturque per E & F ordinatim lineæ A C, H K:

Dico iunctas A B, H B ipsis C B, K B esse proportionales.



Demonstratio.

QVoniam B E, B D, B F continuæ sunt proportionales, & B D media æqualis lateri recto, ratio b A B ad H B triplicata est eius, cuius duplicatam habet A E ad H F: sed eadem de b ibid. causa quoque ratio B C ad B K, triplicata est eius cuius duplicatam habet E C ad F K, id est A E, ad H F; igitur vt A B ad H B, sic C B ad K B: quod erat demonstrandum.

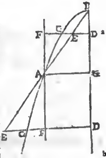
PRO.

PROPOSITIO XLII.

Secent ABC parabolam diametri duæ quæuis AF, BD, iunctisq; A, B diametrorum terminis, ponatur ad diametrum BD ordinatim linea CD, occurrens AB, AF lineis in E & F.

Dico FD, CD, ED in continua esse analogia.

Demonstratio.



Ponatur ex A ordinatim AG; vt BD ad BG, sic DE est ad AG, id est ad DF: sed BD ad BG, duplicatam habet [a] rationem eius quam habet DC ad AG, id est DF, ratio igitur DE ad DF, quoque duplicata est rationis DC ad DF: quare DE, DC, DF lineæ sunt in continua analogia. Quod erat demonstrandum. a 1. huius.

Corollarium.

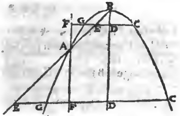
Iisdem positis: sequitur rectangulum FCD æquale esse rectangulo FD, CE, cùm enim FD, CD, ED proportionales sint, vt FD ad CD, sic FC est ad CE: rectangulum igitur FDCE [b] æquale est rectangulo FCD. Quod erat propositum. b 17. sexti.

PROPOSITIO XLIII.

Iisdem positis quæ suprà:

Dico CFG rectangulum æquari rectangulo DFE.

Demonstratio.



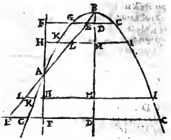
Primo cadat F punctum extra parabolam. Quoniam igitur secta GC in D bissecta est & ei in directum adiecta quædam GF; rectangulum GFC vnà cum quadrato GD, æquale est [c] quadrato FD: sed FD quadrato æquale est rectangulum EFD, vnà cum [d] rectãgulo EDF, id est vnà cum quadrato GD per præcedentē propos. igitur & rectangulo GFC vnà cū quadrato GD, æquale est rectangulum EFD vnà cum quadrato GD: dempto igitur communi quadrato GD, manet GFC rectangulo, æquale rectangulum EFD. c 6. secūdi. d 4. secūdi.

Secundò cadat F punctum intra parabolam. Quoniam GC linea in D secta est bifariam & non bifariam in F, rectangulum GFC vnà cum [e] quadrato FD, æquale est quadrato GD: sed GD quadrato æquale quoque est rectangulum FDE, id est rectangulum EFD vnà cum quadrato FD; rectangulum igitur GFC vnà cum quadrato FD æquale est rectangulo EFD, vnà cum quadrato FD: quare dempto communi quadrato FD, manet GFC rectangulo æquale rectangulo EFD. Quod erat demonstrandum. e 5. secundi.

PROPOSITIO XLIV.

SInt iterum in parabola ABC diametri duæ quæuis AF, BD: & ad BD quidem ordinatim ponantur lineæ GC, KI occurrentes diametro FA in F & H.

Dico esse vt AH ad AF, sic IHK rectangulum ad rectangulũ CFG.



Demonstratio.

DVcta AB linea secet FC, HI rectas in E & L, erit igitur LHM rectangulum æquale [a] rectangulo KHI, & EFD rectangulum æquale rectangulo GFC. vnde KHI rectangulum est ad rectangulum GFC, vt LHM rectangulum ad rectangulum EFD: sed LHM rectangulum est ad rectangulum EFD, vt LH [b] linea ad lineam EF, id est vt AH ad AF, igitur & KHI rectangulum ad rectangulum GFC est vt AH linea ad lineam AF. Quod erat demonstrandum.

a 43. huius.

b 1. Sexti.

Corollarium.

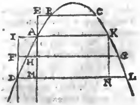
HInc sequitur, quoque esse vt AH ad AH; sic IHK rectangulum ad rectangulum IHK, est enim vt AH ad AH, sic HL ad HL, id est LHM rectangulum ad rectangulũ LHM. sed rectangulis LHM æqualia ostensa sunt rectangula IHK: igitur vt AH ad AH, sic IHK rectangulum est ad rectangulum IHK.

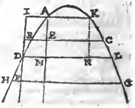
PROPOSITIO XLV.

PArabolam ABC secent in A & D, diametri duæ æquales AE, DF: & ex E, & F quæuis ponantur parallelæ EC, FG occurrentes parabolæ in B, C, H, G punctis.

Dico rectangula BEC, HFG esse inter se æqualia.

Demonstratio.





POnantur ex D & A lineæ DL, AK parallelæ FG; & AK quidem occurrat DF diametro in I, & DL demissæ ex K diametro in N: recta verò AE producta secet DL in M, vt DF ad DI, sic HFG [c] rectangulum est ad rectangulum AIK, & vt AE ad AM, sic BEC est ad rectangulum DML: igitur cùm EA,

c Coroll. 44.

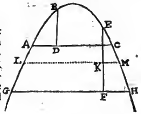
DF, &

DF, & DI, MA lineæ æquales sint, rectangulum HFG ad IAK, rectangulum est vt BEC rectangulum ad rectangulum DML: & permutando HFG rectangulum ad rectangulum BEC, vt DML rectangulum est ad rectangulum IAK. sed DML rectangulum, id est MDN, ob DM, NL [a] æquales lineas, æquatur rectangulo IAK; rectangulum igitur HFG, rectangulo BEC æquale est. Quod erat demonstrandum. a 10. huius.

PROPOSITIO XLVI.

PArabolam ABC secent duæ quæuis diametri BD, EF, quas in D & F secent quæcunque parallelæ AC, GH.

Dico esse vt BD ad EF, sic ADC rectangulum ad rectangulū GFH.



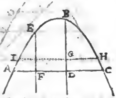
Demonstratio.

SEcetur EF linea vel producatur in K, vt EK sit æqualis BD, & per K ponatur LM parallela GH, erit igitur [b] vt EK ad EF, sic LKM rectangulum ad rectangulum GFH. quia verò EK æquatur ipsi BD, erit LKM [c] rectangulum æquale rectangulo ADC, igitur vt BD ad EF, sic ADC rectangulum ad rectangulum GFH. Quod erat demonstrandum. b 44 huius c 45. huius.

PROPOSITIO XLVII.

SInt iterum in ABC parabola duæ quæuis diametri BD, EF, quas in F & D secet recta quæuis AC.

Dico ADC rectangulum esse ad rectangulum AFC, vt BD ad EF.



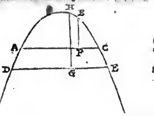
Demonstratio.

Fiat EF æqualis BG; & per G ponatur IH æquidistans AC, erit igitur vt [d] BG ad BD, sic IGH rectangulum ad rectangulum ADC: sed IGH rectangulum æquale est [e] rectangulo AFC, cum BG, EF lineæ sint æquales, igitur vt EF ad BD, sic AFC rectangulum ad rectangulum ADC. Quod erat demonstrandum. d 44 huius. e 45. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

PArabolam ABC subtendant duæ quæuis parallelæ AC, DE, quibus proportionaliter in F & G, diuisis ponantur diametri BF, HG.

Dico BF ad HG duplicatam habere rationem eius quam habet AC ad DE.



Demonstratio.

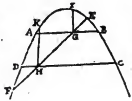
QVoniam AC, DE lineæ in F, & G proportionaliter sunt diuisę, erit AFC, [f] rectangulum ad DGE rectangulum in duplicata ratione AF ad DG, id est AC ad DE, sed BF est ad HG [g] vt AFC rectangulum ad rectangulum DGE; igitur BF ad HG, duplicatam habet rationē eius quam habet AC ad DE. Quod erat demonstrandum. f Per elementa. g 46. huius.

PROPOSITIO XLIX.

SEcent ABC parabolam duæ quæuis parallelæ AB,CD, quas vtcunque in G & H, diuidar linea EF.

Dico esse vt AGB rectangulum ad rectangulum DHC sic FGE rectangulum ad rectangulum FHE.

Demonstratio.



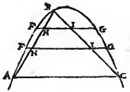
a 46.huius. b 47.huius. ERigantur ex H & G diametri HK, GI. erit igitur vt GI ad HK, [a] sic AGB rectangulum ad rectangulum DHC: sed vt GI ad HK, sic FGE rectangulum quoque ad [b] rectangulum FHE; igitur vt AGB rectangulum, ad rectangulum DHC sic FGE rectangulum est ad rectangulum FHE. Quod erat demonstrandum.

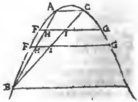
PROPOSITIO L.

ESto ABC parabolæ inscriptum triangulum ABC cuius duo latera AB, CB, duæ quçuis secent FG æquidistantes AC in H & I.

Dico esse vt FHG rectangulum ad rectangulum FHG sic FIG rectangulum ad rectangulum FIG.

Demonstratio.





c 49.huius. REctangulum FHG est ad [c] rectangulum FHG, vt AHB rectangulum est ad rectangulum AHB: & FIG rectangulum est ad rectangulum FIG, vt CIB rectangulum est ad rectangulum CIB: est autem vt AHB rectangulum ad rectangulum AHB, sic CIB rectangulum ad rectangulum CIB quia ex ijsdem rationem habeant compositam, igitur vt FHG rectangulum ad rectangulum FHG, sic FIG rectangulum est ad rectangulum FIG. Quod erat demonstrandum.

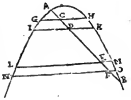
PRO-

PROPOSITIO LI.

SEcet AB parabolam recta quæuis AB in A & B, quâ diuisâ vtcunque in C & D, diuidatur in E & F, vt AC, AD lineis sint æquales BF, BE singulæ singulis; dein per CD, EF puncta parallelę ducantur GH, IK, LM, NO.

Dico esse vt GCH ad IDK, rectangulum sic OFN ad MEL rectangulum.

Demonstratio.



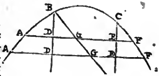
EST enim per quadragesimam nonam huius rectangulum GCH ad IDK, vt ACB ad ADB. hoc est BFA ad BEA, quia AC, AD æquantur FB, EB, sed vt BFA ad BEA, sic est NFO ad LEM: igitur GCN ad IDK, rectangulum, eandem obtinet rationem quâ NFO rectangulum ad LEM: quod fuit demonstrandum. nec mirum, cùm GCH rectangulum ipsi NFO, & rectangulo IDK æquetur LEM rectangulum.

PROPOSITIO LII.

SEcent ABC parabolam duæ quæuis diametri BD, CE, quas in D & E, diuidant vtcunque parallelæ duæ AF: dein ex B, linea ducatur quæuis BG secans AF lineas in GG.

Dico esse GDE rectangulum ad rectangulum GDE, vt ADF rectangulum est ad rectangulum ADF.

Demonstratio.



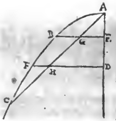
QVoniam DE lineæ per hypothesim æquidistant, & BD, CE sunt diametri, rectæ DE inter se æquales sunt ob ED parallelogrammum. quare GDE rectangulum ad rectangulum GDE est vt GD ad GD, id est BD ad BD. sed vt BD ad BD, sic ADF *rectangulum est ad rectangulum ADF: igitur & GDE rectangulum, est ad rectangulum GDE, vt ADF rectangulum est ad rectangulum ADF. Quod erat demonstrandum.

* 46. huius.

PROPOSITIO LIII.

ESto ABC parabolæ diameter AD, quam in E & D, secent ordinatim lineę BE, FD, ducaturque ex A linea AC, secans BE, FD ordinatim positas vtcunque in G & H.

Dico BEG rectangulum ad rectangulum FDH triplicatam habere rationem eius, quam habet BE ad FD.



a Per elementa.

Demonstratio.

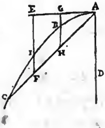
Rectangulum BEG ad rectangulum FDH a rationem habet compositam ex BE ad FD, & GE ad HD, id est AE ad AD: sed ratio AE ad AD duplicata est rationis BE ad FD: rectangulum igitur BEG ad rectangulum FDH triplicatam habet rationem eius quam habet BE ad FD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIV.

Parabolam ABC cuius diameter AD contingat in A linea AE; ductaque quauis AC quę parabolę iterum occurrat in C, sumantur in AC linea puncta quæcunque F, H. ex quibus erigantur diametri FE, HG, occurrentes AE, contingenti in E & G, parabolę verò in B, & I.

Dico BGH rectangulum ad rectangulum IEF rationem habere triplicatam eius quam habet GH ad EF.

Demonstratio.



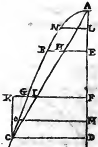
b Educitur ex prima huius.

Rectangulum BGH ad rectangulum IEF, rationem habet compositam ex BG ad IE, & ex GH ad EF, id est AG ad AE: sed ratio BG b ad IE duplicata est rationis AG ad AE, igitur rectangulum BGH ad rectangulum IEF rationem habet triplicatam eius quam habet GH ad EF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LV.

Esto ABC parabolæ diameter AD, quam in D secet ordinatim linea CD: diuisaq; AD in E & F, vt AE, DF sint æquales, ponantur ordinatim EB, FG.

Dico EB, FG quadrata simul sumpta, æquari quadrato CD.



Demonstratio.

Ducta AC occurrat EB lineæ in H, & FG in I, erigaturque ex C diameter CK, secans FG in K. Quoniam AE per hypothesim æqualis est FD, id est CK, angulus AHE æqualis angulo AIF id est angulo KIC (ob HE, GF æquidistantes) & angulus AEH angulo æqualis CKI, erit AHE c triangulum æquale triangulo CKI; & HE lineæ æqualis KI. Rursum cùm tam CD, GF, d IF; quàm CD, BE, HE lineę proportionales sint, quadrata FG, BE mediarum, æqualia sunt rectangulis CDIF, CDHE; hoc est rectangulis IFK, IKF, quia HE, KI lineæ æquales sunt, sed FK quadratum æquale est e rectangulis IFK, IKF, igitur & quadrata FG, BE simul sumpta æqualia sunt quadrato FK, id est quadrato CD. Quod erat demonstrandum.

c Per elementa.

d 12. huius.

e 2. secundi.

Corolla-

Corollarium.

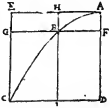
HInc sequitur: si rursum AD diuidatur in L & M, vt AL, DM lineæ æquales sint & ordinatim ponantur LN, MO, quadrata LN, MO simul sumpta æquari quadratis EB, FG simul sumptis: patet ex demonstratis, quia tam EB, FG quadrata, quàm LN, MO simul sumpta æqualia sunt quadrato CD.

PROPOSITIO LVI.

PArabolam ABC cuius diameter AD & ordinatim ad illam posita CD, contingat in A linea AE, quam in E secet diameter CE: assumptoq; in sectione puncto quouis B, ponatur per B ordinatim linea FG, occurrens AD lineæ in F, & EC in G: dein per B ducatur diameter HI secans ACD ordinatim positam in I.

Dico parallelogramma AB, AG, AI, AC in continua esse analogia.

Demonstratio.



QVoniam AE, FG lineæ æquidistant, parallelogrammum AB ad parallelogrammum AG, est vt FB linea, ad lineam FG, id est CD: est autem parallelogrammum AB ad parallelogrammum AI, vt AF linea ad lineam AD, hoc est in duplicata b ratione FB ad DC: igitur parallelogrammum AB, ad parallelogrammum AI, duplicatam habet rationem eius, quam habet AB parallelogrammum ad parallelogrammum AG: parallelogramma igitur AB, AG, AI in continua sunt analogia: Rursum parallelogrammum AI est ad parallelogrammum AC, vt DI linea ad lineam DC, hoc est vt AB parallelogrammum ad parallelogrammum AG. Parallelogramma igitur AB, AG, AI, AC sunt in continua proportione. Quod erat demonstrandum.

a 1. Sexti.

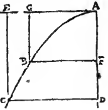
b 1. huius.

PROPOSITIO LVII.

PArabolam ABC, cuius diameter AD, contingat in A linea AE, ductisque ordinatim FB, DC, erigantur ex C & B, diametri EC, BG occurrentes contingenti in G & E.

Dico AGB parallelogrammum ad parallelogrammum AEC triplicatam habere rationem eius quam habet AG linea ad lineam AE.

Demonstratio.



RAtio parallelogrammi AGB ad AEC parallelogrammum c composita est, ex ratione AG ad AE, & GB ad EC; sed ratio GB ad EC, id est AF ad AD, duplicata est rationis AG ad AE; id est FB ad DC, parallelogrammum igitur AGB ad parallelogrammũ AEC triplicatam habet rationem eius quam habet AG linea ad lineam AE. Quod erat demonstrandum.

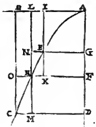
c Per elementa.

PROPOSITIO LVIII.

PArabolam ABC cuius diameter AD, & ordinatim ad illam posita CD, contingat in A linea AE, quam in E secet diameter CE, factisq; AD, AF, AG continuè proportionalibus, ducãtur ordinatim lineæ FH, GB: & per B & H, diametri agantur IK, LH occurrentes FH, DC lineis in K & M: secet autem GB linea diametrum LH in N, & FH linea diametrum EC in O.

Dico HD parallelogrammum esse ad parallelogrammum FB, vt HE parallelogrammum est ad parallelogrammum BL.

Demonstratio.



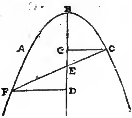
RAtio parallelogrammi HD ad parallelogrammum FB, composita est ex ratione FH ad GB, & FD ad FG: est autem vt FH ad GB, sic DC ad FH id est EA ad LA, id est EL ad LI (cùm AG, AF, AD, adeoque GB, FH, DC, id est EA, LA, IA sint continuę proportionales) & vt FD ad FG, sic [a] DA ad FA; id est FA ad GA; id est HL ad BI: ratio igitur parallelogrammi HD ad parallelogrammum FB, composita est ex ratione EL ad LI, & ex ratione LH ad IB; sed ex ijsdem quoque composita est ratio parallelogrammi HE, ad parallelogrammum BL; igitur vt HD parallelogrammum, ad parallelogrammum FB, sic HE parallelogrammum est ad parallelogrammum LB. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. De progressionibus.

PROPOSITIO LIX.

ESto ABC parabolæ diameter BD, quam in E secet vtcunque recta FC occurrens vtrimque parabolæ in C & F, ducantur autem ex C & F, ordinatim lineæ EG, FD.

Dico BG, BE, BD lineas esse proportionales.



Demonstratio.

QVoniam CG, FD ordinatim positæ sunt ad diametrum BD, ratio BG ad BD, duplicata est eius quam habet GC ad FD, id est GE ad ED; igitur BG, BE, BD lineæ sunt proportionales, positâ enim media BE inter BG, BD erit vt BG ad BE, ita GE ad ED, & ratio BG ad BD, duplicata rationis GE ad ED. igitur, &c. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

HInc sequitur esse vt CE ad EF, sic BE ad BD. nam vt CE ad EF, sic GE est ad ED, id est BE ad BD.

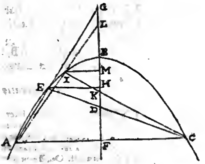
PRO-

PROPOSITIO LX.

ESto ABC parabolæ diameter BF, in qua sumpto quouis puncto H, ponantur continuæ proportionales BH, BG, BF: ductaque ordinatim HE, agatur per F linea ipsi HE æquidistans, occurrens GE lineæ in A & parabolæ in C: ducaturque EC occurrens diametro in D.

Dico DB, BG lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.



QVoniam BH, BG, BF ponuntur continuæ proportionales, & CF ordinatim ad diametrum GB applicata erit A punctũ ad parabolam ABC per Corr. 25. huius sunt autem per præcedentem proportionales quoque BH, BD, BF; media igitur DH æqualis est [a] mediæ DF. [a] Per ele-mentа.

PROPOSITIO LXI.

IIsdem positis ducatur ex C alia quæuis CI occurrens diametro BD in K; parabolæ verò in I; tum ex A per I ducta linea conueniat cum diametro in L, ponaturque ex I ordinatim linea IM.

Dico esse GB ad LB, vt EH ad IM.

Demonstratio.

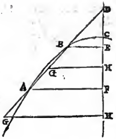
SI inter BM & BF, media fiat BL ostendetur vt priùs LB æqualẽ esse ipsi BK, & iunctam LI occurrere parabolę & AC rectę in A puncto, vnde cùm tam BF, BD, BH lineæ, quàm BF, BK, BM habentes communem primam BF continuæ sint proportionales, ratio BH ad BM, tertię ad [b] tertiam duplicata est rationis BD ad BK, id est BG [c] ad BL secundæ ad secundam: sed & ratio BH ad BM, quoque duplicata est rationis EH ad IM: igitur vt EH ad IM, sic GB ad LB. Quod erat demonstrandum. [b] 17. De progress. [c] 60. huius.

PROPOSITIO LXII.

SIt ABC parabolæ diameter CD, ponatur autem AB linea occurrens parabolæ in duobus punctis AB, diametro verò extra sectionem, in D, ponanturque ordinatim BE, AF.

Dico CE, CD, CF lineas continuè esse proportionales.

Demon-



a Coroll. 15. huius.
b Ibid.

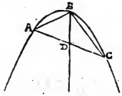
Demonstratio.

Sin verò: ponantur continuę proportionales C E, C D, C H & ex H ordinatim ducatur H G, occurrens A B lineæ in G: erit igitur punctum G ad parabolam A B C: adeoque linea A B ª parabolæ in tribus punctis occurrit. Quod fieri ᵇ non potest. vnde C E, C D, C F continuæ sunt proportionales.

PROPOSITIO LXIII.

ESto parabolæ A B C diameter quæcumque B D æqualis lateri recto, actáque per D ordinatim A C, quę parabolæ occurrat in A & C, iungantur A B, B C.

Dico angulum A B C esse rectum.



c 9. huius.

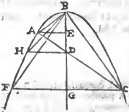
Demonstratio.

QVoniam B D diameter lateri recto æqualis est, & A C ordinatim posita lineæ D B, ᶜ D A, D C, æquales sunt. adeoque & puncta A B C, ad circulum cuius A C diameter est: angulus igitur A B C rectus est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIV.

ESto A B C parabolæ axis B D æqualis lateri recto, actâque per D quâuis A C, quæ parabolæ occurrat in A & C, iungantur A B, B C:

Dico angulum A B C esse rectum.



d 59 huius.
e Coroll. 35. huius.

Demonstratio.

POnantur ex A & C ordinatim lineæ A E, C G F. erunt igitur B E, ᵈ B D, B G lineæ proportionales; quia verò B D media æqualis lateri recto est, erunt A B E, ᵉ F B G triangula similia; & angulus B A E æqualis angulo F B G, id est C B G: sed angulus B A E vnà cum angulo A B E, recto est æqualis, quia angulus A E B ad axem rectus est: igitur & angulus C B D vnà cum angulo A B E, vni recto sunt æquales. rectus igitur angulus A B C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXV.

IIsdem positis:

Dico A B ad B C, triplicatam habere rationem eius, cuius A D ad D C duplicata est.

Demonstratio.

f 58. huius.

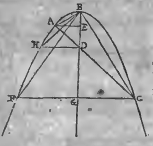
QVoniam in triangulis G B F, C B G anguli ad G recti sunt, lineæque F G, G C æquales ex hypothesi, triangula F B G, C B G inter se æqualia sunt, & F B, C B lineæ quoque æquales: vnde cùm ratio ᶠ A B ad F B, triplicata sit eius, cuius duplicatam

catam habet AE ad FG, erit & AB ad BC, ratio triplicata rationis AE ad FG, id eſt AE ad CG, id eſt AD ad DC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVI.

Iſdem poſitis ducatur ex D ordinatim linea DH, iungaturq; HB: Dico angulum ABF, lineâ HB diuiſum eſſe bifariam.

Demonſtratio.



Quoniam anguli AEB, HDB, recti ſunt, reliqui duo anguli ABE, BAE reliquis HBD, DHB æquales ſunt. Sed BAE angulo æquatur [a] angulus FBG, duo igitur anguli FBG, ABE æquales ſunt duobus HBD, BHD: id eſt angulo HBD bis ſumpto, ob HD, DB [b] lineas æquales: dempto igitur communi angulo FBG, manent anguli duo HBD, HBF æquales angulo ABE: à quibus rurſum ſi communem demas angulum HBD; reliqui ABH, HBF æquales manent. Quod erat demonſtrandum.

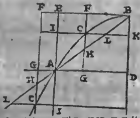
a Coroll. 55. huius.

b 9. huius.

PROPOSITIO LXVII.

Parabolam ABC, cuius diameter BD, contingat in B linea BE; ex quouis autem puncto A in perimetro aſſumpto ductâ ordinatim AD iunctiſq; AB punctis ſumatur in contingente punctum quodcumque F, ex quo linea demittatur FG, parallela diametro BD, occurrens parabolæ in C, AB iunctæ in H, & ordinatim poſitæ in G.
Dico FC, FH, FG lineas in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.



Recta ex A diameter AE occurrat contingenti in E, & per C ordinatim ponatur IK ſecans AB, AE lineas in L & I, & BD diametrum in K, vt KL ad KC, ſic BL eſt ad BH, id eſt FC ad FH: & vt CK ad IK, id eſt FB, ad EB, ſic FH eſt ad BA, id eſt ad FG: ſed LK. CK, IK, lineæ ſunt continuæ [c] proportionales; igitur & FC, FH, FG lineæ in continua ſunt analogia. Quod erat demonſtrandum.

c 41. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

Iſdem datis ſumatur in contingente quoduis punctum F ex quo ducatur FH parallela BD, occurrens lineæ AB in H.
Dico HC eſſe ad CF vt AH ad HB.

Demonstratio.

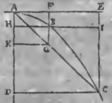
QVoniam GF, HF, CF proportionales sunt, HF est ad CF, vt GF ad HF, hoc est vt AE ad HF, hoc est vt AB ad HB: igitur diuidendo HC est ad CF, vt AH ad HB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIX.

PArabolam ABC cuius diameter AD, & ordinatim ad illam posita CD, contingat in A linea AE, quam in E secet diameter CE. iunctisq; punctis AC, ducatur diameter quæcumque FG, occurrens parabolæ in B. deinde actâ per B ordinatim lineâ HI, quæ EC rectæ occurrat in I, & AD diametro in H, ducatur ex G linea GK parallela DC.

Dico parallelogrammum EB æquari parallelogrammo KB.

Demonstratio.



a 68. huius.

b Per elementa.

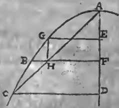
VT AG ad GC, sic AF ad FE, id est HB ad BI: sed vt [a] AG ad GC, sic FB ad BG: igitur vt HB ad BI, sic FB ad BG; sunt autem anguli ad B oppositi æquales. igitur parallelogrammum EB æquale [b] est parallelogrammo KB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXX.

SIt ABC, parabolæ diameter AD diuisa in E & F; vt AE, AF, AD sint proportionales, positisque ordinatim EG, FB, DC, iuncta AC occurrat FB in H.

Dico HG æquidistare diametro AD, & contra si HG æquidistet diametro AD, & per H ordinatim ponatur FB, dico AE, AF, AD esse proportionales.

Demonstratio.



c 33. huius.

d 42. huius.

e Per elementa.

CVm AE, AF, AD proportionales sint, rectæ quoque [c] CD, BF, GE in continua sunt analogia. sed & DC, FB, FH [d] quoque sunt proportionales; æquales igitur sunt HF, GE lineæ. quare HG æquidistat [e] diametro AD, quod fuit primum.

Sit iam HG parallela AD, & per H ordinatim applicetur BF; dico AE, AF, AD quoq; in continua esse analogia, cùm enim CD, BF, HF, lineæ [f] proportionales sint, & GE æquetur HF, erunt & CD, BF, GE continuæ proportionales. vnde AD, AF, AE [g] in continua quoque sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

f 42. huius.

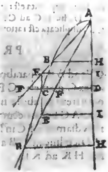
g Per conuersam 33. huius.

PROPOSITIO LXXI.

ESto ABC parabolę diameter AD, quam in D secet ordinatim linea DC, actâque per C diametro CE, ducatur ex A linea AF secans parabo-

parabolam in B, & E C diametrum in E, occurrens vero D C lineæ in F.

Dico A B, A E, A F lineas esse in continua analogia.



Demonstratio.

Ponantur ex B & E ordinatim lineæ B H, E I. Ratio A H ad A D, duplicata est rationis H B ad D C; id est H B ad I E; sed vt H B ad I E, sic A H est ad A I. igitur ratio A H ad A D, duplicata est rationis A H ad A I: quare A H, A I, A D lineæ, id est A B, A E, A F sunt proportionales. Quod erat demonstrandum.

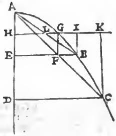
PROPOSITIO LXXII.

Esto A B C parabolæ diameter A D: ductisque ex A lineis quibusuis A B, A C, quæ parabolæ occurrant in B & C, ponantur ordinatim lineæ C D, B E; & B E quidem A C lineæ occurrat in F; erectaque F G parallela diametro A D, ponatur per G ordinatim H G, occurrens diametris I B, K C in I & K. rectæ autem A B in L:

Dico H L, H G, H I, H K lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

Quoniam H G, E B, D C, ordinatim positæ sunt, & F G parallela diametro A D, rectæ H G, H I, H K [a] in continua sunt analogia: sed & H L, H G, H I [b] proportionales sunt. igitur H L, H G, H I, H K in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

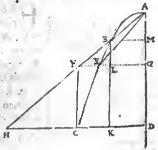


a 70. huius.
b 42. huius.

PROPOSITIO LXXIII.*

Esto A B C parabolæ diameter A D, & ordinatim ad illam posita C D. ducatur autem ex A linea A E, sectioni occurrens in E: actaque per E ordinatim F G, erigatur ex C diameter C F, occurrens F G in F; iunganturque A F, quæ C D lineæ occurrat in H, sectioni verò in B puncto ex quo diameter demittatur B K, secans F G lineam in L, & C D in K.

Dico H C ad C K duplicatam habere rationem eius quam habet F E ad E L.



Demonstratio.

Ponatur ex B ordinatim linea B M. Quoniam F C diameter est & H C D ordinatim posita ad diametrum A D, rectæ A B, A F [c] A H proportionales sunt; igitur & A M, A G, A D, item B M, E G, [d] C D lineæ, id est K D, C D, H D, in continua sunt analogia. Quare cùm vtriusque seriei primæ B M, K D æquales sint, ratio H D ad C D, tertiæ ad

c 71. huius
d 33. huius

tertiam

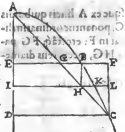
tertiam a duplicata est rationis C D ad E G, id est F G, ad E G: est autem vt b H D ad C D, sic H C ad C K, & vt F G ad E H, sic F E ad E L, ratio igitur H C ad C K, duplicata est rationis F E ad E L. Quod erat demonstrandum.

a 17. De progressionibus.
b 1. De progressionibus.

PROPOSITIO LXXIV.

SIt ad A B C parabolæ diametrum A D, ordinatim posita D C: erectaq; ex C diametro C F, iungatur C A; ponaturque ordinatim quæuis F E occurrens parabolæ in B, & A C iunctæ in G, tum ex B demissa diametro, quæ A C lineæ occurrat in H, ponatur per H ordinatim linea I L occurrens diametro F C in L, & sectioni in K.

Dico lineam G B ad B F, duplicatam habere rationem eius quam habet H K ad K L.



Demonstratio.

QVoniam tam F E, B E, c G E lineæ, quàm L I, K I, H I sunt proportionales habentes æquales primos terminos F E, L I, ratio G E, ad H I, tertiæ ad tertiam, id est ratio G E ad B E, id est d G B ad B F; duplicata est e rationis E B ad I K, secundæ ad secundam, id est rationis I H ad I K, id est H K f ad K L. Quod erat demonstrandum.

c 42 huius.
d 1. De progressionibus.
e 27. De progressionibus.
f 1 De progressionibus.

PROPOSITIO LXXV.

EAdem figurâ manente;

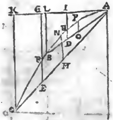
Dico rectangulum E G B ad rectangulum E F B, triplicatam habere rationem eius quam habet linea G B ad lineam B F.

Demonstratio.

REctangulum E G B ad rectangulum E F B, rationem habet compositam ex ratione g E G ad E F, id est ex duplicata ratione E G ad E B, id est G B ad B F, (quia E G, h E B, E F sunt proportionales) & ex G B ad B F; igitur rectangulum E G B ad rectangulum E F B triplicatam habet rationem eius quam habet linea G B ad B F. Quod erat demonstrandum.

g Per elementa.
h 42. huius.

PROPOSITIO LXXVI.



ESto A B C parabola, assumptoque in peripheria puncto quouis A, ducantur rectæ A B, A C occurrentes iterum parabolæ: diuisis autem A B, A C lineis proportionaliter in D & E, erigantur diametri E G, D I, occurrentes parabolę in F & H; & actæ per A contingenti in G & I.

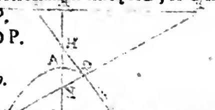
Dico G E, D I lineas in F & H, proportionaliter esse diuisas.

Demon-

Demonstratio.

ERigantur ex C & B, diametri CK, BL. Quoniam AC, AB proportionaliter in E & D ponuntur diuisæ, vt BA ad DA, id est BL ad DI; sic CA est ad EA, id est KC ad GE; sed vt BL ad DI, sic DI est ad ᵃ HI, & vt KC ad GE, sic GE est ad GF; igitur vt DI ad HI, sic GE ad GF. Quod fuit demonstrandum. ᵃ *Per pen. D ante demonstrata.*

PROPOSITIO LXXVII.



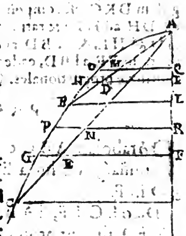
IIsdem positis, diuidantur rursum proportionaliter lineę AB, AC in M & O, eriganturq; diametri MN, OP.

Dico FE esse ad MN, vt DH est ad OP.

Demonstratio.

EST enim vt CEA rectangulũ, ad rectangulum CMA sic FE ad NM. & vt BDA rectangulum, ad rectangulum BOA, sic DH ad PO. sed BDA ad BOA, rectangulum est vt CEA ad CMA, rectangulum, quia CA, BA proportionaliter ponuntur diuisæ; igitur vt FE ad NM, sic DH ad PO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVIII.



IIsdem positis agantur per D & E ordinatim ad diametrum ex A demissam lineæ HDI, FEG.

Dico HI, FG lineas in D & E proportionaliter esse diuisas.

Demonstratio.

POnantur ordinatim lineæ BL, CK. Quoniam igitur AB, AC lineæ in D & E proportionaliter sunt diuisæ, vt CK ad EG, sic BL est ad DI. sed CK ad EG, duplicatam ᵇ habet rationem FG ad EG, & BL ad DI, duplicatam habet rationem HI ad DI, igitur vt FG ad EG, sic HI ad DI, & diuidendo vt FE ad EG, sic HD ad DI. Quod fuit demonstrandum. ᵇ *Ex 42. huius.*

PROPOSITIO LXXIX.

IIsdem positis, diuidantur rursum AB, CA lineę proportionaliter in M & N, & rectæ ducantur MOQ, NPR æquidistãtes ipsis HI, FG.

Dico vt HD ad OM, sic FE esse ad PN.

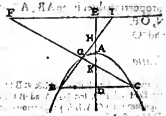
Demonstratio.

CVm enim lineæ AB, AC proportionaliter in M, D, N, E punctis sint diuisæ, erit MQ ad DI, vt NR ad EG, & permutando MQ ad NR, vt DI ad EG: sed per præcedentem est vt MQ ad NR, sic OM ad PN: & vt DI ad EG, sic HD ad FE: igitur vt OM ad PN, sic HD ad FE, & permutando vt OM ad HD, sic PN ad FE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXX.

Sit ad A B C parabolæ diametrum A D ordinatim posita linea C B: factaq; A E æquali ipsi A D ponatur per E linea E F parallela rectæ B C; dein ex C ducatur linea C F, occurrens parabolę in G puncto, per quod ex B agatur linea occurrens axi A D in H, & E F lineæ in I;

Dico F E, B D, E I lineas in continua esse analogia.



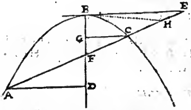
Demonstratio.

Linea C F occurrat diametro in K. Quoniam A E linea æqualis ponitur lineę A D, & H A, A K lineæ quoque inter se æquantur, erit E H reliqua æqualis reliquę K D. Rursum triangulum F K E ad triangulum D K C duplicatam habet rationem E K lineæ ad lineam K D, id est H D ad E H. est autem & triangulum B H D, ad triangulum E H I in duplicata ratione H D ad H E: igitur vt triangulum F K E ad triangulum D K C, sic B H D triangulum, ad triangulum E H I adeoq; rationes ex ijsdem habent cōpositas, sed ratio trianguli F K E ad triangulum D K C, est composita ex ratione F E ad D C, id est B D; & ex E K ad K D, id est D H ad H E: & ratio trianguli B H D, ad triangulum E H I est composita ex H D ad H E, & ex B D ad E I, ablata igitur communi ratione H D ad H E, manet ratio F E ad B D, eadem cum ratione B D ad E I. quare F E, B D, E I lineæ sunt continuæ proportionales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXI.

Parabolam A B C cuius diameter B D contingat in B linea B E, demissaq; ex E linea E A occurrat parabolæ in C, & A, diametro verò B D in F.

Dico E C, E F, E A lineas in continua esse analogia, & contra si E C, E F, E A fuerint proportionales, dico E B, sectionem contingere.



Demonstratio.

Ponantur ex A & C ordinatim lineæ A D, C G ad B D, diametrum: quoniam igitur B E, G C lineæ ęquidistant, erit vt G B ad F B, sic C E ad F E; & vt F B ad D B, sic F E ad A E. sed B G, B F, B D lineę sunt proportionales; igitur & E C, E F, E A lineę in continua sunt analogia. Quod erat primum.

Sint iam E C, E F, E A proportionales, iunganturque E B, dico E B lineam, sectionem in B contingere. Sin verò, agatur per B tangens, quæ A E lineæ occurrat in H. erunt igitur H C, H F, H A continuæ proportionales, & C F ad F A, vt H C ad H F: sed & C F est ad F A, vt E C ad E F (cùm E C, E F, E A sint proportionales) igitur vt H C ad H F, sic E C ad E F: & diuidendo vt H C ad C F, sic E C ad C F, quod absurdum, cùm H C ex hypothesi, maior sit vel minor rectâ E C. quare H B non est tangens, nec quæuis alia præter E B. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII.

EAdem manente figura propositum sit à dato puncto extra sectionem contingentem ducere.

Constructio & demonstratio.

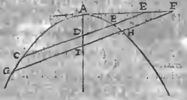
SIt datum punctum E, ex quo ducatur quæuis secans parabolam in C & A: erit E C prima trium continuarum & A C excessus reliquarum: inueniantur igitur inter C E, E A media E F per F, diameter agatur B D iunganturque E B. patet per præcedentem, lineam E B sectionem contingere in B. à dato igitur extra parabolam puncto tangentem duximus, &c. Quod erat quæsitum.

PROPOSITIO LXXXIII.

PArabolam A B C cuius diameter A D, contingat in A linea A E, in qua sumptis duobus punctis E, F, ducantur ex E & F, duæ parallelæ E C, F G occurrentes parabolę in B, C, H, G, & A D diametro in D & I.

Dico B E C rectangulum ad rectangulum H F G duplicatam habere rationem lineę eius quam habet E A linea ad lineam F A.

Demonstratio.



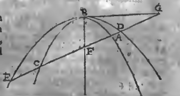
QVoniam tam E B, a E D, E C lineæ, quam F H, F I, F G sunt proportionales, erit B E C rectangulum æquale quadrato E D, & H F G rectangulum æquale quadrato F I. igitur vt quadratum E D ad quadratum F I, sic B E C rectangulum est ad rectãgulum H F G. sed E D quadratum est ad quadratum F I, vt A E quadratum est ad quadratum A F: igitur & B E C rectangulum est ad rectangulum H F G vt A E quadratum ad quadratum A F. hoc est duplicatam habent rationem, E A ad F A. Quod erat demonstrandum. a 81. huius.

PROPOSITIO LXXXIV.

PArabolas duas A B C, D B E habentes communem diametrum B F contingat in eodem puncto, linea B G, & ex G quęuis ducatur linea, occurrens parabolis in D, A, C, E; diametro verò B F in F.

Dico D G E rectangulum æquari rectangulo A G C.

Demonstratio.

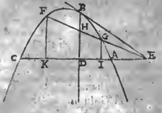


ESt enim per octuages. primam huius tam D G E rectangulum, quàm rectangulum A G C æquale quadrato F G. igitur & A G C, D G E rectangula inter se ęqualia sunt. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXV.

Parabolam ABC cuius diameter BD contingat in B linea EB: ex puncto E duæ quæuis ducantur lineæ EF, EC, secantes parabolam in F, G, A, C punctis & BD diametrum in D & H, demissæque ex F & G diametri FK, GI, occurrant AC lineæ in K & I.

Dico GI ad FK, duplicatam habere rationem eius quam habet GH ad HF.



Demonstratio.

a Ex 82. huius.
b 1. De progressionibus.

VT GI ad FK, sic EG est ad EF; sed EG ad EF, duplicatam habet rationẽ a EG ad EH, id est b GH ad HF; igitur & GI ad FK, duplicatam habet rationem eius quam habet GH linea ad lineam HF. Quod erat demonstrandum.

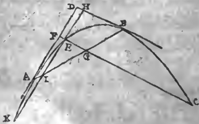
PROPOSITIO LXXXVI.

Parabolam ABC contingant in A & B lineæ AD, BD conuenientes in D, assumptoque puncto E in sectionis peripheria, agatur per E linea FC, parallela rectæ BD occurrens AD lineæ in F.

Dico vt quadratum BD ad quadratum AD, sic EFC rectangulum esse ad quadratum AF.

Est hac ab Apollonio lib.3.prop.16.eodem planè modo proposita: nos autem hanc supponendo vlterius inferimus, si A, B puncta contactuum coniungantur, rectas FE, FG, FC in continua esse analogia. vti & HE, HI, HK lineas.

Demonstratio.



Est enim ex supposito vt AD quadratũ ad quadratũ DB, sic AF quadratum ad rectangulum EFC: & permutando vt AD quadratum ad quadratum AF, sic DB quadratum ad rectangulum EFC. sed est quoque vt AD quadratum ad quadratum AF, sic DB quadratũ ad quadratum FG; igitur vt DB quadratum ad rectangulum EFC, sic idem quadratum DB ad quadratum FG. vnde FG quadratum æquale est rectangulo EFC; & FE, FG, FC lineæ sunt in continuata proportione.

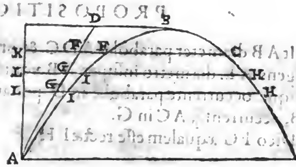
PROPOSITIO LXXXVII.

Iisdem positis ducatur & altera GH parallela FC, secans parabolam in I & H.

Dico rectangulum EFC ad rectangulum IGH, esse vt quadratum FA ad GA, quadratum.

Demon-

Demonstratio.



CVm enim tam rectangulum EFC ad quadratum FA, quã rectangulum IGH ad quadratum GA habeant rationem quadrati DB ad quadratum DA, constat ita esse EFC rectangulum ad IGH vt quadratum FA ad GA. Quod demonstrandum fuit.

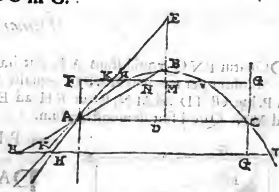
Corollarium.

SI ex A ducatur diameter AK, occurrens ordinatim applicatis in K & L, rectangulum CFE ad HGI, duplicatam habebit rationem eius quam CKE habet ad rectangulum HLI. ratio enim rectanguli CKE ad HLI, est ratio lineæ KA [a] ad LA, hoc est FA ad GA: sed ratio rectanguli CFE ad HGI, est ratio quadrati FA ad GA: igitur ratio rectanguli CFE ad HGI, duplicata est eius quam habet CKE ad HLI, rectangulum. a 44. huius.

PROPOSITIO LXXXVIII.

PArabolam ABC cuius diameter BD, & ordinatim ad illam posita ADC, contingat in A linea AE, conueniens cum diametro in E, erectisque ex A & C diametris AF, CG ducatur quæcunque HI, parallela AC, occurrens AE contingenti in K, lineæ AF in F, diametro BD in M, iunctæ AB in N, & rectæ CG in G.

Dico KFG rectangulum æquari rectangulo HFI.



Demonstratio.

QVoniam tam FN [b] in K, quàm FG in M [c] bifariam diuisa est, erit FK ad FN, vt FM ad FG. vnde rectangulo FKFG, æquatur FNFM rectangulum: sed rectangulo NFM ostensum [c] est æquari rectangulum HFI. igitur etiam rectangulo HFI æquale est KFG rectangulum. Quod erat demonstrandum. b 18. huius. c 43. huius.

PROPOSITIO LXXXIX.

IIsdem positis:

Dico HK, HF, FG lineas esse continuè proportionales.

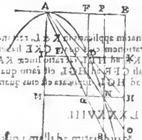
Demonstratio.

QVoniam rectangulum KFG [d] æquale est rectangulo HFI, vt FH, ad FK, sic FG est ad FI: & conuertendo vt FH ad [e] HK, sic FG est ad GI, id est ad FH; quadratum igitur FH æquale est rectangulo HKFG; & HK, HF, FG proportionales sunt. Quod fuit demonstrandum. d 88. huius. e Per elementa.

PROPOSITIO XC.

SIt A B diameter parabolæ A D C & ordinatim posita B C & contingens A E. diametro insuper A B æquidistet F C ductaque A H quacunque occurrente parabolæ in D ponatur A C & F D G æquidistans A B, occurrensq́; A C in G.

Dico F G æqualem esse rectæ E H.



Demonstratio.

POnantur per D & G puncta rectæ I K, M R parallelæ B E, erunt itaque rectæ in continua analogia I L, I D, I K & M G, M N, N R. Igitur quadratum I D ad M N quadratum habet rationem quam I L ad M G. Ihoc est I A ad M A hoc est D A ad H A: hoc est D F ad H E; est autem F G æqualis M A: igitur H E eidem F G, æqualis est. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCI.

IIsdem positis, per N ducatur A N O. Dico I D ad M N eandem habere rationem quam habet E H ad E O.

Demonstratio.

POnatur P N Q æquidistans A B, erit hæc P Q, æqualis E O per præcedentem. Similiter per eandem erit F G æqualis E H: est autem F G ad P Q, vt A F ad A P, hoc est I D ad M N, igitur E H ad E O, eandem obtinet rationem quam I D ad M N. Quod fuit demonstrandum.



PROPOSITIO XCII.

PArabolam A B C subtendat linea A C, actaque per C, contingente, quæ diametro per A positæ occurrat in D, perficiatur parallelogrammum A D E C: dein sumpto in sectione puncto quouis B, agatur per B diameter F G secans A C lineam in F, tangentem C D in H puncto, per quod ducta I K parallela A C, ponatur I G quæ F G lineæ occurrat in L.

Dico G F, H F, L F lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

VT G F ad H F, sic D A est ad I A: sed vt D A ad I A, sic H F est ad L F; igitur vt G F ad H F sic H F ad L F, proportionales igitur sunt G F, H F, L F. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.

Iisdem positis ducatur linea DK occurrens GF in M.
Dico GM, GH, GF lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

QVoniam EC æquidistat AD (ob DC, parallelogrammum) & IKD, ICD triangula eandem habent basim ID, lineæ MH, [a] HL æquales sunt. sunt autem continuę proportionales GF, HF, LF; igitur & GM, [b] GH, GF lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

[a] Educitur ex elementis.
[b] 11. De progressionibus.

PROPOSITIO XCIV.

Iisdem positis:
Dico esse vt CF ad FA, sic HB ad BF.

Demonstratio.

DVcatur ex C per B linea CN occurrens AD lineæ in N: & ex A recta AO parallela DC, secans EC productam in O, & FB lineam in P. Quoniam DC est contingens & AO eidem parallela, rectæ HB, HF, HP [c] proportionales sunt. Sunt autem etiam [d] continuę LF, HF, GF, & GF linea æqualis lineæ HP (ob AE, AC parallelogramma super eadem basi AD, & inter easdem parallelas constituta.) igitur & HB, æqualis est rectæ LF: vnde dempta communi LB, manet HL rectæ BF, & NA ipsi ID æqualis; adeoque & NC parallela DK. Quare vt DN est ad NA, id est CK ad DI, sic HB est ad BF. sed vt CK ad DI, sic CH est ad HD, id est CF ad FA; igitur vt CF ad FA, sic HB est ad BF. Quod erat demonstrandum.

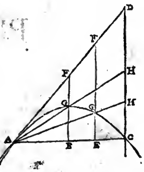
[c] 67. huius.
[d] 92. huius.

Est hęc Archimedis aliter demonstrata.

PROPOSITIO XCIV.

PArabolam ABC subtendat linea AC, actaq; per A contingente AD quę diametro CD ductę per C, occurrat in D, ponantur quotuis diametri FE secantes parabolam in G, & per G ex A, ductæ lineæ AH, occurrant diametro CD in H.

Dico AC, CD lineas proportionaliter in E & H esse diuisas.

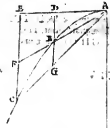


Demonstratio.

DEmonstratio manifesta est per precedentem. nam semper est vt AE ad EC, sic FG ad GE id est DH ad HC.

PROPOSITIO XCVI.

Parabolam ABC contingat in A linea AD, in qua sumptis quibuslibet punctis D & E, demittantur diametri DB, EC: & ex A per B recta ducatur AF occurrens EC diametro in F.



Dico esse EC ad CF, vt AF ad FB.

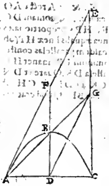
Demonstratio.

Dvcatur recta AC occurrens DB lineæ in G. erit igitur AG ad GC, ᵃ vt DB ad BG, id est EF ad FC. sed est vt AG ad GC, sic AB ad BF; igitur vt AB ad BF, sic EF ad FC: & componendo vt AF ad FB, sic EC ad CF. Quod fuit demonstrandum.

a 94. huius.

PROPOSITIO XCVII.

Parabolam ABC subtendat recta AC, erectaque ex C diametro CE, ponatur quæcunque AG occurrens CE lineæ in G, parabolæ in B puncto, per quod diameter ponatur BD.



Dico iunctam DG æquidistare contingenti per A ductæ.

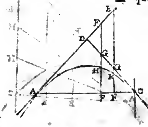
Demonstratio.

Dvcta enim per A contingens occurrat BD, CE diametris in F & E. erit igitur ᵇ FB ad BD, vt AD ad DC, id est AB ad BG: quare ᶜ AE, DG lineæ sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

b Ibid.
c Educitur ex elementis.

PROPOSITIO XCVIII.

Parabolam ABC subtendat linea AC, actisque per A & C, contingentibus quæ conueniant in D, ducatur diameter quæcunque FE, secans AD lineam in E, DC in G, & parabolam in H.



Dico GH, HF, HE, lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

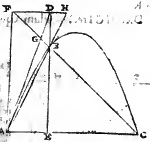
Est enim vt AF ad FC, sic ᵈ EH ad HF, sed etiam vt AF ad FC, ᵉ sic FH ad HG, igitur vt EH ad HF, sic HF est ad HG: proportionales igitur sunt GH, HF, HE. Quod erat demonstrandum.

d 94. huius.
e Ex eadem.

PROPOSITIO XCIX.

PArabolam A B C cuius subtensa A C, contingat in A linea A D, in qua sumpto quouis puncto D demittatur diameter D E occurrens parabolæ in B. per B autem ex C recta ponatur C F, occurrens erectæ ex A diametro in F.

Dico F A, D E lineas esse inter se æquales.



Demonstratio.

VT AE ad EC,[a] sic D B est ad B E, & componendo vt A C ad C E, sic D E ad B E. sed vt A C ad E C, sic F A est ad B E, igitur vt D E ad B E, sic F A ad B E: igitur F A, D E lineæ sunt [b] inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

a 94. huius.

b Per elementa.

PROPOSITIO C.

IIsdem positis:

Dico esse B G ad G F, vt F B ad F C.

Demonstratio.

QVoniam F A, D E lineę per præcedentem æquales sunt, D E est ad B E, vt F A ad B E, id est vt A C ad E C: & inuertendo A E ad A C, id est F B ad F C, vt D B ad D E, id est ad F A. sed vt B D ad F A, sic B G ad G F, igitur B G ad G F, vt F B est ad F C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CI.

IIsdem positis ducatur A B occurrens E D iunctę in H.

Dico D H, D F, E C lineas in continua esse analogia.

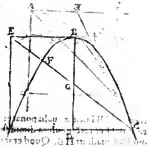
Demonstratio.

ESt enim D H ad A E, id est ad F D, vt D B ad B E, sed vt D B ad B E, sic F D ad E C, igitur D H est ad F D vt F D ad E C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CII.

PArabolam A B C cuius diameter B D, contingat in B linea B E, demissaque diametro E A ducatur ad B D, ordinatim A D C; ponaturque E C occurrens parabolæ in F & B D diametro in G.

Dico E F lineam æquari lineæ F G.



Demonstratio.

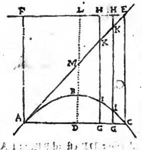
QVoniam E B linea sectionem contingit, erit E F ad E G, vt E G ad E C: & diuidendo E F ad F G, vt E G ad G C, sed E G est æqualis G C, quia A D, D C lineæ æquales sunt, igitur & E F, F G rectæ inter se æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CIII.

PArabolam ABC cuius diameter BD, & ordinatim ad illam posita AC, contingat in A linea AE; erectaque ex C diametro CE quæ contingenti AE occurrat in E; perficiatur parallelogrammum ACE; ducaturq; diameter quæuis HG occurrens parabolæ in I, & AE rectæ in K.

Dico HGI rectangulum æquari rectangulo HKG.

Demonstratio:



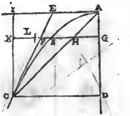
PRoducta diameter BD, secet EF, AE lineas in L & M. Quoniam AC linea æquidistat EF, eidemque est æqualis, erit AD, dimidiá rectæ AC, æqualis LE, dimidiæ ipsius EF quare & LM æqualis est MD, adeoque LD in M bifariam diuisa: vnde cum & LD in B, diuisa sit non bifariam, rectangulum LMD, id est quadratum MD æquale est rectangulo LBD, vna cum quadrato MB, id est [a] quadraro BD, id est æquale erit rectangulo LDB. Rursum cum vt BD ad IG, sic LDB rectangulum sit ad rectangulum HGI, item ADC [b] rectangulum ad rectangulum AGC, id est rectangulum [c] AME ad rectangulum AKE, igitur vt LDB rectangulũ, ad rectangulũ HGI, sic AMB rectangulum est ad rectangulum AKE; est autẽ vt AME rectangulum ad rectangulũ AKE, sic LMD rectangulum ad rectangulum HKG (quia ex ijsdem rationem habent compositam) igitur vt LDB rectangulum ad rectangulum HGI, sic LMD rectangulum est ad rectangulum HKG. & permutando vt LDB rectangulum est ad rectangulum LMD, sic HGI rectangulum ad rectangulum HKG. sed LDB, LMD rectangula ostensa sunt æqualia, igitur & rectangulum HGI æquale est rectangulo HKG. Quod erat demonstrandum.

a Ex 17. huius.
b 47 huius.
c Ex elementis.

PROPOSITIO CIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD & ordinatim ad illam posita CD contingant in A & C lineæ AE, CE conuenientes in E. ductáque AC, ponatur ordinatim BG quę EC, AC lineis occurrat in F, & H.

Dico HB quadrati dimidio æquale esse rectangulum FB, HG.



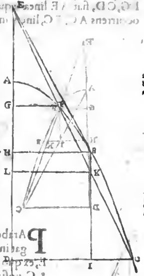
Demonstratio.

ERigatur ex C diameter CI, occurrens BG lineę in K, fiatque HB æqualis KL. Quoniam igitur KG, BG, [d] HG proportionales sunt, & BH differétię ponitur ęqualis LK, rectæ GH, HB [e] BL quoq; proportionales sunt, adeoque BH quadrato æquale rectangulum LB, HG. Rursum [f] cùm AI in E, ac propterea HK in F diuisa sit bifariam, & HB lineæ æqualis ponatur KL, erit & LB reliqua in F diuisa bifariam; quare FB, HG rectangulum dimidium est rectanguli LB, HG, adeoque & æquale dimidio quadrari HB. Quod erat demonstrandum.

d 42. huius.
e 9. De progressionibus.
f 18. huius.

PROPOSITIO CV.

PArabolam ABC cuius diameter AD contingat in B linea BE, conueniens cum diametro in E; demissaque ex E linea EC, quæ parabolam secet in F & C, ducantur ordinatim lineæ FG, BH, CD. Dico FG, BH, CD lineas in continua esse analogia.



Demonstratio.

DEmittatur ex B diameter BI secans EC lineam in K: ponaturque KL parallela HB. Quoniam BE linea sectionem contingit, erunt EF, EK, [a] EC proportionales, adeoque & FG, [b] KL, CD continuæ proportionales: sed HB linea æqualis est KL, igitur FG, BH, CD lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

a 81. huius.
b Per elementa.

Corollarium.

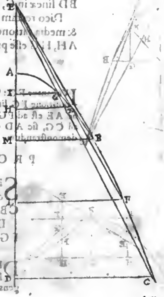
EAdem manente figura sumatur in AD diametro quodcumque punctum E, extra parabolam, ex quo in parabolam secans demittatur EFC, ductisque ordinatim FG, CD, fiat AE lineæ æqualis AH, & ex H, ordinatim ponatur HB: dico FG, BH, CD lineas esse proportionales; iuncta enim BE [c] erit contingens. vnde per præcedentem constat veritas assertionis.

c Ex 17. huius.

PROPOSITIO CVI.

ESto ABC diameter AD, in qua assumpto extra sectionem puncto quouis E, demittantur ex E duæ quæuis EC, EF secantes parabolam in G, K, C, F: ponanturque ordinatim GI, KH, FL, CD.

Dico esse vt GI ad KH, sic FL ad CD.



Demonstratio.

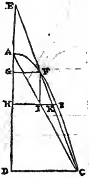
DEmittatur ex E contingens EB, & ex B ordinatim ducatur linea BM. erunt igitur tam GI, BM, CD [d] lineæ, quàm HK, BM, FL proportionales. quare cùm BM linea sit vtrique seriei communis & media proportionalis inter easdem lineas, GI, CD [e] rectangulum æquale est rectangulo HKFL; igitur vt [f] GI ad KH, sic FL ad CD. Quod erat demonstrandum.

d 105. huius.
e Ex elementis.
f ibid.

PRO-

PROPOSITIO CVII.

ESto ABC parabolę diameter AD, in qua assumpto extra sectionem puncto quouis E, demittatur ex E secans EFC, positisque ordinatim FG, CD, fiat AE lineæ æqualis AH, & ex H ordinatim ponatur HB occurrens AC, FC, lineis in I & K.



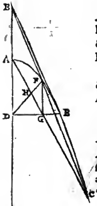
Dico EC lineam extrema & media ratione proportionali in F & K esse diuisam: id est CE esse ad EF vt CK ad KF.

Demonstratio.

IVngantur FI. Quoniam AH linea æqualis ponitur AE, rectæ FG, BH, a CD proportionales sunt, & FG, IH b lineæ æquales, adeoque & FI parallela AE. quare vt EC ad EF, sic AC ad AI, id est AD ad AH, id est AH ad AG, (cum AD, AH, AG proportionales sint.) id est DH ad c HG. id est CK ad KF. Quod erat demonstrandum.

a Coroll. 105 huius.
b Ex 70 huius.
c 1. De progressionibus.

PROPOSITIO CVIII.



PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in B linea BE, conueniens cum diametro in E, ex quo recta ducatur EC, occurrens parabolę in F & C, positaque ordinatim BD, ducatur AC occurrens BD lineæ in G, & recta FD secans AC in H.

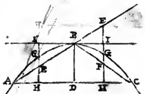
Dico rectam AC diuisam esse in H, & G, extrema & media ratione proportionali: id est AC, CG: & AH, HG esse proportionales.

Demonstratio.

IVngantur FG: Quoniam ostensum est in præcedenti propositione FG lineam æquidistare AE, vt AC ad CG, sic AE est ad FG: sed AE est æqualis d AD, igitur vt AC ad CG, sic AD est ad FG, id est AH ad HG. Quod erat demonstrandum.

d 17. huius.

PROPOSITIO CIX.



SIt ad ABC parabolæ diametrū BD, ordinatim posita AC: iunctisque AB, CB ducatur quæuis diameter EF.

Dico esse vt AD ad DH, sic HE ad EG.

Demonstratio.

DIameter EF, primò AB lineæ occurrat in E extra sectionem. ponatur per B contingens IB: vt AD ad AH, sic DB id est IH ad

ad HE; quia verò a I G, I F (id est I E) & I H proportionales sunt, vt H I ad I E siue I F, prima ad secundam, sic H I cum I F vel I E, id est H E, prima cum secunda, ad I E vnà cum I G id est E G, secundam cum tertia, igitur vt A D ad D H, sic H E ad E G. Quod erat demonstrandum. a 42. huius.

Occurrat iam diameter H G rectæ A B in E intra parabolã, erit igitur vt A H ad A D, sic H E ad B D, id est ad H I, & vt A D ad H D, sic H I ad I E, sed vt H I ad I E prima ad secundam (quia H I, I E, I G b proportionales sunt) sic H E c est ad E G, igitur vt A D ad D H, sic H E est ad E G. b Ibid. c 1. De progressionibus.

Est hæc Archimedis prop. 4. de quadratura Parabolæ aliter demonstrata.

Corollarium.

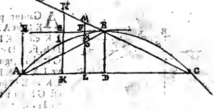
Hinc sequitur lineam H I ad I G, rationem habere duplicatam eius quam habet H F ad F G: cùm enim sint continuæ proportionales d H I, F I, G I, erit ratio H I ad I G, duplicata rationis H I ad F I, id est e H F ad F G. d Ex 93. huius. e 1. De progressionibus.

PROPOSITIO CX.

Parabolam A B G cuius diameter B D, contingat in B linea B E, qua diuisa in F & G, vt B F, B G, B E sint proportionales, demittantur diametri F H, G I, E A ductaq; ex A ad B D ordinatim linea A C, quæ F H, G I rectas secet in K & L, agatur per B ex C, linea C M occurrens F H, G I diametris in M & N.

Dico rationem L M ad M H duplicatam esse rationis K N ad N I.

Demonstratio.



Quoniam B F, B G, B E lineæ continuæ proportionales sunt, diametri quoque F H, G I, E A in continua sunt f analogia. Quare ratio A E ad F H, id est L F ad F H, duplicata est rationis A E ad G I, id est K G ad G I; sed L F ad F H, duplicatam habet rationem, L O ad O H, (cùm L F, F O, F H g proportionales sint) id est per præcedentem L M ad M H, similiter & K G ad G I, duplicatam habet eius quam habet K N ad N I, igitur & ratio L M ad M H, duplicata est rationis K N ad N I. Quod erat demonstrandum. f Ex 33. huius. g 42. huius.

PROPOSITIO CXI.

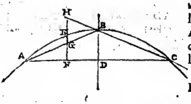
Iisdem positis ducatur linea A B secans F L lineam in O.

Dico M H L F rectangulum esse æquale rectangulo M L F O.

Demonstratio.

Quoniam ratio L F ad F H tam duplicata est rationis L M ad M H, quàm F L ad F O, erit vt L M ad M H, sic F L ad F O: quare rectangulum M H L F æquale est rectangulo M L F O. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXII.



SIt ad A B C parabolæ diametrum B D ordinatim posita linea A C, iunctisque punctis A B, C B, ducatur diameter quæcunque E F occurrens A B, C B lineis in G & H.

Dico esse vt H F ad F G, sic H E ad E G.

Demonstratio.

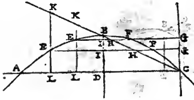
a 109 huius. b ibid. VT A D ad D F, id est D C ad D F, sic F H, a est ad H E. sed etiam vt A D ad D F, sic b F G est ad G E, igitur vt F H ad H E, sic F G est ad G E, & permutando vt H F ad F G, sic H E ad E G. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXIII.

SIt ad A B C parabolæ diametrum B D ordinatim posita A C, iunctisque punctis B C ducantur ordinatim lineæ E F occurrentes C G, B D diametris in G & I, & C B rectæ in H.

Dico rectangulum G I E H æquari rectangulo G E I F.

Demonstratio.



c 109 huius. AGantur per E diametri K L, vt A D c ad D L, sic L K est ad K E, sed vt A D ad D L, sic C D est ad D L, id est G I ad I E, igitur G I est ad I E, vt L K ad K E. est autem vt L K ad K E, sic L C ad E H, id est G E ad E H, igitur vt G I ad I E, sic G E ad E H. vnde G I, E H rectangulum æquale est rectangulo G E, I E id est G E, I F. Quod erat demonstrandum.

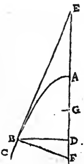
PARABOLÆ
PARS TERTIA

Sectionis focum & mutuas parabolarum intersectiones Geometricè designat.

PROPOSITIO CXIV.

PArabolam ABC cuius axis AD, contingat in B quæuis BE, occurrens axi in E: positaque ordinatim BD, ponatur BF normalis ad BE, occurrens axi in F.

Dico DF lineam æquari dimidio lateris recti quod axi inseruit.



Demonstratio.

SVmatur AG æqualis lateri recto. quoniam BD ordinatim ponitur ad axem, quadratum BD æquale est rectangulo DAG: quia verò angulus EBF rectus est, erit & quadrato BD æquale a rectangulum EDF. igitur EDF, DAG rectangula sunt inter se æqualia, & vt ED ad AD, sic AG est ad DF: est autem ED dupla b ipsius AD, cùm EB, sit contingens; igitur & AG dupla est rectæ DF: adeoque DF æqualis dimidio lateris recti. Quod erat demonstrandum.

a Per ch... mensa.

b Ex 17 huius.

PROPOSITIO CXV.

EAdem manente figurâ: sit AG latus rectum & illius dimidio æquetur DF: ponatur autem ordinatim DB, & BE contingens, iunganturque BF.

Dico angulum EBF rectum esse.

Demonstratio.

CVm EB sit contingens, & BD ordinatim posita, erit c ED dupla rectę AD: & quia AG dupla ponitur DF, erit DAG rectanguli d æquale rectangulo EDF: sed DAG rectangulo ęquale est quadratum BD, igitur & quadratum DB æquale est rectangulo EDF, vnde cùm DB normalis ponatur ipsi EF, patet e angulū EBF esse rectum. Quod erat demonstrandum.

c Ibid.

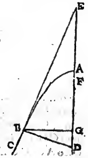
d 16. Sexti.

e Ex elementis.

PROPOSITIO CXVI.

PArabolam ABC cuius axis AD, contingat linea BE, conueniens cum axe in E: positaq; BD ad EB rectam normaliter, diuidatur ED bifariam in F.

Dico FA quartam partem esse lateris recti.



Demonstratio.

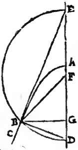
POnatur BG ordinatim ad axem; cùm igitur ED in F bifariam sit diuisa, & EG in A (ob EB contingentem) vt ED ad EF, sic EG est ad EA, vnde & residuum AF ad residuum GD, vt torum ED est ad dimidium sui EF: AF igitur dimidium est GD: hoc est quarta pars lateris recti: cùm GD lateris recti dimidium sit. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXVII.

PArabolam A B C cuius axis A D, contingat recta quævis B E, & angulo B E A æqualis fiat angulus E B F.

Dico F A lineam æqualem esse quartæ parti lateris recti; & si F A sit quarta pars lateris recti, dico lineas F B, F E, & consequenter angulos B E F, E B F esse inter se æquales.



Demonstratio.

POnatur ordinatim linea B G [a] & B D normalis ad contingentem E B. Quoniam anguli E B F, B E F ex hypothesi æquales sunt, erunt & F B, F E lineæ quoque æquales, vnde cùm & angulus E B D rectus sit, si centro F, interuallo F E circulus describatur, transibit [a] is per B & D. Quare & E F, F D lineæ æquales, adeoque F A æqualis [b] quartæ parti lateris recti. Quod erat primum.

a Per elementa.

b 116. huius.

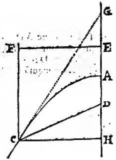
Rursum cùm angulus E B D ponatur rectus, & B G ordinatim applicata ad axem A D, erit D G æqualis dimidio [c] lateris recti, adeoque dupla A F: quare E A ad E G, vt A F ad G D, & componendo vt E F ad E D, sic A F ad G D: quare E D dupla est ipsius E F, & circulus centro F interuallo F E descriptus, transibit per B & D; eruntq; lineæ F B, F E & anguli F B E, F E B inter se æquales: Quod erat demonstrandum.

c 114. huius.

PROPOSITIO CXVIII.

ESto A B C parabolæ axis A D æqualis quartæ parti lateris recti: factaq; A E æquali A D, ducatur ex D linea D C occurrens parabolæ in C; & ex C erigatur diameter C F, occurrens E F (quæ normalis sit ad axem A D) in F.

Dico D C, F C lineas esse inter se æquales.



Demonstratio.

AGatur per C contingens C G, conueniens cum axe in G; ad quem ordinatim ponatur C H. Quoniam C G est contingens, rectæ A G, A H [d] æquales sunt, additis igitur æqualibus A D, A E totæ G D, E H æquales sunt; sed D C recta est [e] æqualis G D, igitur & D C æquatur lineæ H B, id est C F. Quod erat demonstrandum.

d 17. huius.

e 117. huius.

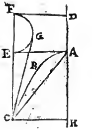
PROPOSITIO CXIX.

PArabolam A B C cuius axis A D productus extra sectionem, sit æqualis lateri recto, contingat in A linea A E, demissaq; ex A secante A C, erigatur ex C diameter C F, occurrens A E contingenti in E, & D F quæ parallela sit A E in F, factoque super E F vt diametro, semicirculo F G E, ducatur ex C, linea C G quæ semicirculum contingat in G.

Dico A C, C G lineas esse inter se æquales.

Demon-

Demonstratio.

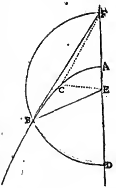


POnatur ex C ordinatim C H, quadratum A C æquale est quadratis A H, H C: sed H C quadratum æquale est rectangulo H A D (quia A D per hypothesim est æqualis lateri recto) quadratum igitur A C æquale est quadrato A H vnà cum rectangulo H A D, id est rectangulo A H D, id est rectangulo E C F; est autem & E C F rectangulo æquale quadratum C G, quadrata igitur A C, C G adeoque & lineæ inter se æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXX.

ESto A B C parabolæ axis A D: & A E linea æqualis quartæ parti lateris recti: centro E, interuallo quouis E F circulus describatur occurrens axi in F & D, parabolæ verò in B: iunganturque F B.

Dico F B rectam contingere parabolam in puncto B.



Demonstratio.

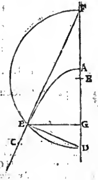
SI enim non contingat, ponatur ex F contingens F C: cadet illa inter B & A; vel vltra B. Cadat primò inter B & A, iunganturque B E, C E. Quoniam F C linea est contingens, & A E quarta pars lateris recti, [a] linea C E æqualis est rectæ F E, hoc est E B. Quod absurdum. igitur F C contingens non cadet inter B & A. similiter ostenditur F C non cadere vltra B. Quare F B sola parabolam contingit. Quod erat demonstrandum.

[a] 117. huius.

PROPOSITIO CXXI.

ESto A B C parabolæ axis A D, & A E linea quarta pars lateris recti: centro E, interuallo quouis E F circulus describatur, occurrens axi in F & D, parabolæ autem in B: & ex B recta ducatur B G ordinatim ad axem.

Dico D G lineam, dimidium esse lateris recti.

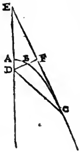


Demonstratio.

IVngantur puncta F B, B D. erit igitur angulus F B D in semicirculo rectus: est autem per præcedentem F B contingens, [b] D G igitur dimidium est lateris recti. Quod erat demonstrandum.

[b] 114. huius.

PROPOSITIO CXXII.



PArabolam ABC cuius axis AD contingat in C linea quæuis CE, conueniens cum axe in E, diuisaque bifariam CE in F, ducatur FD normalis ad EC contingentem occurrens axi in D.

Dico AD lineam, quartá esse partem lateris recti.

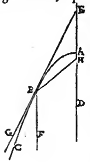
Demonstratio.

IVngantur puncta CD. Quoniam FD normalis est ad tangentem EC, anguli EFD, CFD æquales sunt; sunt autem & rectę EF, FC ex hypothesi æquales, & FD communis, triangula igitur EDF, CDF, & ED, CD latera æqualia sunt: quare & anguli CED, ECD æquantur; & AD [a] linea est æqualis quartę parti lateris recti. Quod erat demonstrandum.

a 117. huius.

PROPOSITIO CXXIII.

PArabolam ABC cuius axis AD, contingat in B recta quæuis BE conueniens cum axe in E, demissaque ex B linea BF parallela axi, fiat angulo FBG, æqualis angulus EBH.



Dico AH lineam æqualem esse quartæ parti lateris recti: & si AH fuerit quarta pars lateris recti, & BF, parallela axi, dico angulos EBH, FBG esse æquales.

Demonstratio.

QVoniam FB æquidistat ED, angulus AEB æqualis, est angulo FBG hoc est angulo HBE: vnde AH linea [b] æqualis est quartæ parti lateris recti. Quod erat primum.

b ibid.

Rursum cùm AH linea sit quarta pars lateris recti, angulus HBE æqualis est angulo [c] AEB, hoc est FBG, cum FB, ED æquidistent. vocetur autem punctum H focus parabolæ.

c ibid.

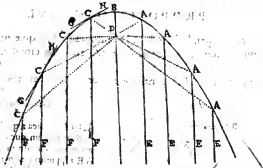
PROPOSITIO CXXIV.

DAtæ parabolæ focum exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt datæ parabolæ ABC, axis BD, cui quotuis ponantur æquidistantes, AE, CF agatur autem per C contingens GH; ductáque ex C rectâ CD, fiat angulo FCG, æqualis angulus HCD: constat per præcedentem propositionem punctum D, esse focum parabolæ, adeoque BD quartam esse partem lateris recti. & quoniam CF linea est quæcunque parallela axi, si in reliquis quoque angulo incidentiæ æqualis fiat angulus reflexionis, radij reflexi omnes conuenient in D puncto quod quartam lateris recti partem designat. datæ igitur parabolæ focum exhibuimus.

Porro focum indigitamus punctum D, quod in illo fiat combustio, & radij reflexi præcisè in



in illo coeuntes, intensissimum producant calorem. quia verò punctum D (quod quartam lateris recti partem determinat à vertice initio sumpto) latitudinem nullam admittit; fit vt forma parabolica; omnium sit aptissima radijs solis recipiendis & reflectendis; multoq; vehementiores, quàm reliqua figura, causet effectus.

Quod autem in propositione radios C F, A E *omnes parallelos axi assumamus, id eadem de causa fecimus qua idem Optici, Gnomonici, & Statici in pōderibus deorsum tendentibus, assumere coguntur, & hactenus vt fundamentum ac principium ab omnibus (si Neothericos paucos excipias) habitum est, non quod à parte rei solares radij paralleli sint, sed quod ob immensum nos inter & solem spatium, radij in speculum incidant ac si verè paralleli essent, sic vt nulla ad inuicem inflexio perceptibilis sit: & si è plano speculi duas lineas versus solem eductas, quantumuis minimo angulo ad inuicem inclines, conuenient illa multo ante, quàm ad solarem discum peruenire possint: & si vicissim ex solis centro angulo physico, quantumuis minimo, duos educas radios, non cadent illi in superficiem speculi, sed immenso vtrimque interuallo à speculo decident. ratio vtriusque est, immensa solis à terra distantia: radij igitur solares in speculum incidentes vt verè paralleli assumuntur. quo posito demonstrari facile posset, focum in circulo & omni sectione coni (præterquam in parabola) latitudinem admittere, adeoq; figuram parabolicam ad comburendum omnium esse præstantissimam: sed de his alio tempore & loco, si Deus vitam dederit.*

PROPOSITIO CXXV.

Parabolam A B C cuius axis A D contingat in B recta quæuis B E conueniens cum axe in E: ductaque ex B linea B D normali ad contingentem, quæ axi occurrat in D: si A D linea fuerit maior dimidio lateris recti.

Dico rectam B D minorem esse A D.



Demonstratio.

Ducatur ex A per B, linea A B F: & ex D recta D G normalis ad A F. quoniam angulus E B D rectus ponitur, angulus A B D recto minor est, adeoque F B D angulus obtusus; quare D G cadet inter A & B. fiat ergo B G æqualis G H, iunganturque H D: cum A H linea diuisa bifariam in I, ponatur D I. cùm igitur H G, G D lineæ æquales sint rectis B G, G D, & anguli illis contenti recti; linea D H æqualis est B D, & angulus G H D recto minor. Rursum cùm A I, I D lineæ æquen-

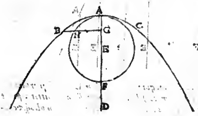
tur

tur lineis HI, ID. triangula AID, HID æqualia sunt. quare AD, subtendens angulum obtusum AID, maior est recta HD hoc est BD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXVI.

ESto ABC parabolæ axis AD: sumptâq; AE quæ non sit maior dimidio lateris recti, centro E interuallo AE circulus describatur AHF.

Dico circulum AHF contingere intus parabolam in A.



Demonstratio.

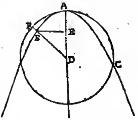
Fiat AD linea æqualis lateri recto, & ordinatim ducatur quæuis GB occurrens circulo in H. Quoniam AE supponitur non maior dimidio lateris recti, cadet F punctum supra, vel in ipsum D, adeoque AGF rectangulum minus est rectangulo GAD; igitur & HG quadratum, minus est quadrato BG. punctum igitur H cadet intra parabolam. eodem modo demonstrantur reliqua omnia circuli puncta, præter A cadere intra parabolam: circulus igitur AHF, parabolam ABC interius in A contingit. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXVII.

ESto ABC parabolæ axis AD maior dimidio lateris recti: centroque D, interuallo AD circulus describatur AFG.

Dico circulum illum intersecare parabolam.

Demonstratio.



Fiat AE linea æqualis dimidio lateris recti & per E recta ponatur ordinatim EB: ducaturque ex D per B, linea DBF occurrens circulo in F & parabolę in B. Quoniam AD maior est dimidio lateris recti, a recta DB minor est AD hoc est DF. punctum igitur F cadet extra parabolam. quare circulus AFG parabolam secat. Quod erat demonstrandum.

a 125. huius.

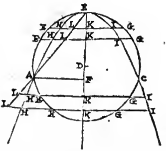
PROPOSITIO CXXVIII.

ESto ABC parabolæ axis BD maior dimidio lateris recti, centroq; D interuallo DB circulus describatur AEB occurrens parabolæ in A; ductaque ex A ordinatim linea AF, ducantur quotuis EG parallelæ AF, occurrentes circulo in E & G, parabolæ in H & I, axi in K.

Dico EHG rectangulum esse ad rectangulum EHG, vt FKB rectangulum, est ad rectangulum FKB.

Demon-

Demonstratio.



IVncta A B occurrat E G lineis in L. Quoniam E G linea in circulo A E B, ad angulos rectos in K secat diametrum B D, recta E G in K, diuisa est bifariam. sed & H I in parabola A B C, quoque in K diuisa est bifariam; rectæ igitur E H, I G inter se æquales sunt. Rursum vt A L B rectangulum ad [a] rectangulum A L B, sic E L G rectangulum ad rectangulū E L G, item H L I rectangulum ad [b] rectangulum H L I: sed E L G rectangulum æquale est rectangulis H L I, E H G, igitur & E H G rectangulum est ad rectangulum E H G, vt A L B rectangulum ad rectangulum A L B; id est F K B rectangulum, ad rectangulum F K B. Quod erat demonstrandum.

a 49. huius.

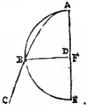
b Per elementa.

PROPOSITIO CXXIX.

ESto A B C parabolæ axis A D maior dimidio lateris recti: centroque D interuallo A D, circulus describatur A B E: occurrat is parabolæ in B & axi in E. ducaturque ex B, linea B F ordinatim ad axem.

Dico lineam F E æqualem esse lateri recto.

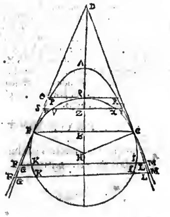
Demonstratio.



QVoniam B F ordinatim ducta est ad axem, quadratum F B æquale est rectangulo super F A & latere recto: sed & F B quadratum quoque æquale est rectangulo A F E: rectangulum igitur A F E æquale est ei quod fit super A F & latere recto. quare F E linea lateri recto est æqualis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXX.

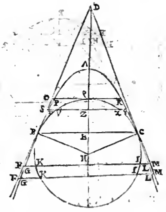
PArabolam A B C cuius axis A E contingat in B linea B D, occurrens axi in D, ponatur autem ex B linea B H normalis ad contingentem, occurrens axi in H: centroque & interuallo H B circulus describatur B Q C: ponaturque ad axem normales quotcunque I K, occurrentes parabolæ in G L, contingenti B D in F F: & circulo intra parabolam intercepto in I & K.



Dico G K I rectangulum esse ad rectangulum G K I, vt quadratum F B ad quadratum F B.

Demonstratio.

POnatur B C æquidistans F I, occurrens parabolę in C; iunctaque



a Ex 17. huius.
b Ex elementis.
c Ibid.
d 87. huius.

DC occurrat FL rectis in M. Quoniam BC ordinatim ponitur ad axem DE; recta BC in E bisecta est, & BE, EC lineæ æquales sunt. vnde DC [a] parabolam in C contingit. quia verò B punctum in perimetro circuli est, punctum quoque C [b] in circuli est perimetro, & quia DBH angulus rectus est, angulus quoque DCH rectus est [c] & DC linea circulum contingit. igitur vt FB quadratum ad quadratum FB, sic FKM rectangulum ad rectangulum FKM; sed cũ FB, CM lineæ parabolam quoque contingant, vt FB quadratum ad quadratum [d] FB sic GFL rectãgulum est ad rectangulum GFL, residuum igitur rectangulum GKI ad GKI rectangulum, est vt quadratum FB ad quadratum FB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXI.

EAdem manente figura si AH linea maior sit dimidio lateris recti. Dico circulum BQC parabolam intus in duobus punctis contingere.

Demonstratio.

e 115. huius. POnatur per Q linea OPR æquidistans BC, & altera quæuis STVXY eidem parallela. quia AH maior est dimidio lateris recti, [e] AH linea maior est BH; & circulus BQC cadit infra A. deinde vt OB quadratum ad quadratum SB, f 87 huius. sic [f] POR rectangulum ad rectangulum TSX: sed est quoq; vt quadratum OB ad quadratum SB, sic quadratum OQ ad rectangulum VSX, igitur POR rectangulum ad rectangulum TSY, vt quadratum OQ ad rectangulum VSX, & permutando conuertendo vt quadratum OQ ad rectangulum POR, sic VSX g 6. secundi. rectangulum ad rectangulum TSY: sed OQ [g] quadratum maius est rectangulo POR, igitur & VSX rectangulum maius est rectangulo TSY. vlterius, rectan- h Ibid. gulum TSY vnà cum [h] quadrato TZ æquale est quadrato SZ, est autem & quadrato SZ æquale rectangulum VSZ vnà cum quadrato VZ, quadratum igitur VZ vnà cum rectangulo VSX æquale est quadtato TZ, vnà cum rectangulo TSY: ostensum autem est VSX rectangulum maius esse rectangulo TSY, quadratum igitur VZ minus est quadrato TZ: quia punctum V cadit intra parabolam: similiter ostendentur reliqua omnia puncta perimetri circularis BQC cadere intra parabolam, præter B, & C; circulus igitur BQC parabolam intus in duobus contingit punctis.

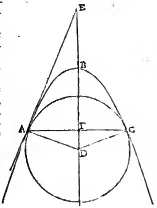
PROPOSITIO CXXXII.

ADato in axe puncto circulum describere qui parabolam intus in duobus punctis contingat.

Constru-

Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabolæ axis BD, & in eo punctum datum D, oportet centro D circulum describere, qui parabolam interius contingat in duobus punctis: oportet autem BD lineam maiorem esse dimidio lateris recti, fiat DF æqualis dimidio lateris recti: & per F recta agatur FAC, ordinatim ad axem: iunganturque puncta D, A: tum centro D interuallo DA circulus describatur, dico illum contingere interius parabolam in duobus punctis. agatur enim per A contingens AE conueniens cum axe in E. Quoniam linea AE parabolam contingit in A, & FD æqualis est dimidio lateris recti, angulus [a] EAD rectus est; est autem ex hypothesi BD maior dimidio lateris recti; ergo per præcedentem circulus centro D, interuallo DA descriptus parabolam continget interius in duobus punctis: à dato igitur in axe puncto D circulum descripsimus, &c. Quod erat faciendum.



a 115. huius.

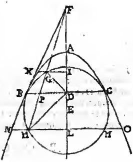
PROPOSITIO CXXXIII.

PArabolam ABC cuius axis AD contingat interius in duobus punctis B & C circulus HBG, actaq; per B contingente parabolam in B, quæ axi occurrat in F, ducatur ex F, linea FH, secans circulum in G & H, dein per G & H, normales ducantur KGI, NHL occurrentes parabolæ in K & N, axi verò in I & L.

Dico esse vt HL ad GI, sic NL ad KI.

Demonstratio.

QVoniam circulus BGC parabolam intus contingit in B & C, & FB linea per B ducta parabolam in B contingit, eadem BF circulum quoque contingit in B; igitur vt HF ad FG, sic [b] HP est ad PG: & vt LF ad FI, sic LD ad DI; sed vt LF ad FI, sic LH ad IG; igitur LD est ad DI, vt LH ad IG. quia verò LF in D & I, extrema & media ratione proportionali diuisa est, & FD [c] bissecta in A, proportionales sunt [d] AI, AD, AL: vnde LA ad AI, duplicatã habet rationem LA ad DA, id est [e] LD ad DI: sed ratio quoque LA ad AI, duplicata est rationis [f] LN ad KI, igitur NL est ad KI, vt LD ad DI, id est LH ad GI. Quod erat demonstrandum.



b 30. De circulo.

c Ex 17. huius.

d 4. De linearum potentiis.

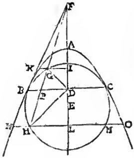
e 1. De progressionibus.

f 1. Huius.

PROPOSITIO CXXXIV.

IIsdem positis:

Dico rectas KI, GD; item NL, HD esse inter se æquales.



Demonstratio.

OStensum est rectas AL, AD, AI in continua esse analogia, vnde quoque proportionales erũt IK, BD, LN: sed etiam sunt cõtinuę GD, BD, HD: igitur GD, KI lineæ, & NL, DH sunt inter se æquales. nam rectangulũ GDH, rectangulo KINL est æquale, & ostensum insuper est GD ad DH, eandem habere rationem quam ID ad DL, hoc est KI ad NL.

PROPOSITIO CXXXV.

IIsdem positis:
Dico quadratum DL æquari rectangulo NHO.

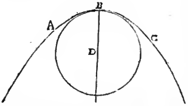
Demonstratio.

QVadratum HD est æquale quadratis HL, LD: est autem quadrato æquale quadratum NL, igitur NL quadratum est æquale quadratis HL, LD. sed etiam quadratum NL æquale est quadrato HL & rectangulo NHO, dempto ergo communi quadrato HL, erit NHO rectangulum æquale quadrato DL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXVI.

IN datæ parabolæ axe punctum assignare quo centro circulus describatur maximus illorum, qui parabolam intus in vno tantùm contingunt puncto.

Constructio & demonstratio.



ESto ABC parabolæ axis BD, oportet in illo punctum assignare D, quo centro circulus describatur maximus eorum qui parabolam in vno tantum puncto contingunt. fiat DB linea æqualis dimidio lateris recti: centroque D, interuallo BD circulus describatur: dico illum satisfacere proportioni. quoniam DB æqualis ponitur dimidio lateris recti,
a 116. huius. circulus radio DB descriptus, intus a parabolam in B contingit, quod verò contingentium circulorum maximus sit, ex illo patet quod circuli omnes qui centrum
b 117. huius. habent vltra D, parabolam b intersecent; quorum verò centrum inter D & B, cadit, semidiametrum semper minorem habeant semidiametro DB, ac proinde illi circuli minores sunt: circulus igitur radio DB descriptus, contingentium circulorum maximus est. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

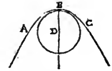
PROPOSITIO CXXXVII.

EX dato in axe parabolæ puncto, lineam ad peripheriam ducere, breuissimam illarum quæ ex eodem puncto duci possunt.

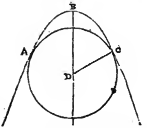
Constructio & demonstratio.

ESto ABC parabolæ axis BD, & in eo punctum datum D: oportet ex D puncto lineam ducere breuissimam illarum, quę ex eodem puncto ad parabolæ perimetrum educi possunt.

Primò recta B D non sit maior dimidio lateris recti, dico B D lineam esse quæsitam: describatur enim centro D interuallo D B circulus; continget is per præcedentem parabolam interius in puncto solo B: igitur reliquæ omnes lineæ ex D ad peripheriam ductæ maiores sunt lineâ B D.



Secundò B D maior sit dimidio lateris recti: centro D circulus describatur [a] contingens A B C parabolam in duobus punctis A, C. ducaturque recta D C: erit illa minima (vt patet) illarum quę ex D duci poterunt ad peripheriam parabolæ: ex dato igitur puncto D, lineam duximus, &c. Quod erat faciendum. a 131 huius.



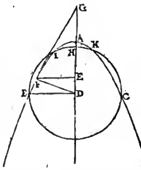
PROPOSITIO CXXXVIII.

SIt A B C parabolæ axis A D maior latere recto, ductaque ex D ordinatim lineâ D B, centro D, interuallo D B circulus describatur B H C. Dico illum intersecare parabolam in quatuor punctis.

Demonstratio.

SVmatur E D æqualis dimidio lateris recti, positâque ordinatim E F, agatur per F contingens F G, conueniens cum axe in G. Quoniam F G est contingens, & E D æqualis dimidio lateris recti, angulus [b] D F G rectus est. quia verò A D linea maior est dimidio lateris recti, F D minima est earum [c] quæ ex D ad peripheriam duci possunt: adeoque & minor B D ordinatim positâ; circulus igitur centro D interuallo D B, descriptus cadet vltra F, & secundùm aliquam sui partem extra parabolam. Rursum cùm D B, minor [d] sit rectâ A D, (cū D A maior sit latere recto,) cadet circulus B H C infra punctum A: & secundùm aliquam sui partem intra parabolam: Quare & in alio puncto quàm A parabolam intersecabit. Similiter ostenditur circulū B H C, versus partem A C occurrere parabolæ in alio puncto quàm in C; circulus igitur centro D, interuallo D B descriptus, parabolam secat in quatuor punctis. Quod erat demonstrandum.

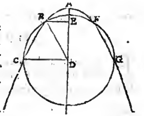
b 115 huius.
c 137. huius.
d 10. huius.



PROPOSITIO CXXXIX.

SIt A B C parabolæ axis A D maior latere recto, positâq; ad illum ordinatim D C, centro D interuallo D C circulus describatur C B F; occurret ille parabolæ in quatuor punctis C, B, F, G, & ex B puncto intersectionis ducatur B E ordinatim ad axem:

Dico E D lineam æqualē esse lateri recto.



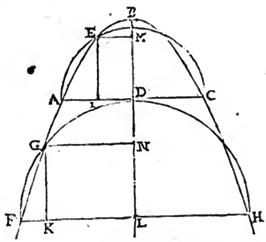
Demonstratio.

IVngantur BD. Quoniam BD est æqualis DC, & EB, CD, ordinatim ponuntur ad axem, ED linea [a] æqualis lateri recto est. Quod erat demonstrandum.

a Ex conuersa 14. huius.

PROPOSITIO CXL.

SI parabolam ABC cuius axis BD, secuerint quotcunque semicirculi AEC, FGH quorum singuli occurrunt parabolæ in quatuor punctis; demissæ autem ex E & G, intersectionum punctis rectæ fuerint EI, GK normales ad lineas AC, FH quæ ordinatim positæ sunt ad axem.



Dico EI, GK lineas esse æquales.

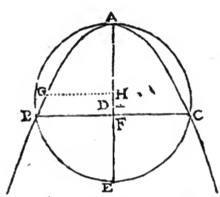
Demonstratio.

DVcatur enim ordinatim EM, GN: erit per præcedentem tam MD quàm NL æqualis lateri recto axeos; igitur & æquales inter se. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXLI.

ESto ABC parabolæ axis AD maior dimidio lateris recti: centroq; D interuallo DA, circulus describatur ABC, occurrens axi in E: oportet exhibere puncta intersectionum B & C.

Constructio & demonstratio.



SVmatur EF linea æqualis lateri recto, & per F recta agatur FBC ordinatim ad axem: dico circulum ABC occurrere parabolæ in B & C. cùm FC ordinatim posita sit ad axem; quadratum illius æquatur AFE rectangulo, quia FE lateri recto assumitur æqualis: sed rectangulo AFE in circulo ABE, æquale quoque est quadratum FB: igitur B punctum pertinet & ad parabolam ABC, & ad circulum ABE. idem discursus aptetur puncto C. præstitimus ergo quod imperatum fuit.

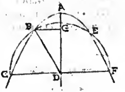
PROPOSITIO CXLII.

ESto ABC parabolæ axis AD maior latere recto: actaq; per D ordinatim linea CDF, centro D interuallo CD, circulus describatur CBE, occurret is parabolæ in quatuor punctis: oportet illa exhibere.

Constru-

Constructio & demonstratio.

SVmatur D G æqualis lateri recto, ponaturque ordinatim G B: dico B punctum vnum esse intersectionis. iungatur B D. Quoniam B G, C D ordinatim ponuntur ad axem, & G D æqualis lateri recto est, linea C D æqualis est B D: circulus igitur centro D, interuallo D C descriptus, transibit per B. eodem modo ostenditur, eundem circulum transire per E: quod verò per C & F, transeat, manifestum est: exhibuimus igitur puncta quatuor intersectionis. Quod erat faciendum.



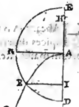
a 10. huius.

PROPOSITIO CXLIII.

ESto A B G parabolæ apex A, centroque A, interuallo quouis A E circulus describatur E G B: oportet exhibere B punctum intersectionis cum parabola.

Constructio & demonstratio.

POsito axe A D sumatur A H æqualis lateri recto, positaque per A contingente A G quæ circulo occurrat in G; quadrato A G fiat æquale rectangulum H I A; & per I ordinatim ducatur I B: dico punctum B, esse id quod quæritur. iungatur A B. Quoniam I B ordinatim applicata est ad axem, & A H linea æqualis lateri recto, quadrato A B, b æquale est rectangulum H I A, sed H I A rectangulum quoque æquale est quadrato A G per constructionem; igitur A G, A B quadrata æqualia sunt. igitur circulus centro A interuallo A G descriptus, transit per B. exhibuimus igitur punctum intersectionis B. Quod erat postulatum.



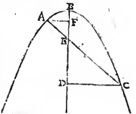
b 13. huius.

PROPOSITIO CXLIV.

ESto A B C parabolæ diameter B D quam secet vtcunque recta quæuis A E, occurrens parabolæ in A: oportet exhibere C, punctum aliud intersectionis.

Constructio & demonstratio.

DVcatur ex A linea A F ordinatim ad diametrum; fiantque proportionales B F, B E, B D: & per D, ordinatim ducatur D C, occurrens A E lineæ in C puncto. quoniam igitur B F, B E, B D proportionales sunt, & A F, D C ordinatim positæ, punctum c C est ad parabolam: est autem & C punctum in recta A E: igitur C communis intersectio est A E lineę cum parabola. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

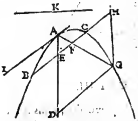


c Coroll. 151 huius.

PRO-

PROPOSITIO CXLV.

Esto A B C parabolæ diameter A D : & ordinatim ad illam posita B C, ducatur autem ex A quæuis A F, secans B C lineam in F: quæ producta occurret parabolæ in puncto quouis G. oportet illud exhibere.



Constructio & demonstratio.

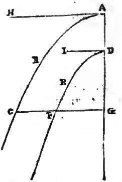
Factum sit: positaque ordinatim G D, erigatur G H parallela diametro A D, occurrens B C in H. sit autem A I latus rectum. Quoniam G H æquidistat A D diametro, F E H rectangulum, hoc est rectangulum F E G D, æquale est quadrato a C E, hoc est B E. sed & quadrato B E æquale b est rectangulum I A E: ergo rectangula igitur E A I, F E G D æqualia sunt. quare vt F E ad A E, sic A I est ad G D: & G D quidem fiat æqualis recta K. erit igitur K linea data. Rursum cùm G D ordinatim posita sit ad diametrum A D, vt A I ad G D, hoc est c ad K, sic K est ad A D: igitur & A D linea positione data est. quare componendo fiat vt F E ad A E, sic A I ad K, & vt A I ad K, sic K ad A D, ducaturque ex D ordinatim linea D G, constat factum esse quod petebatur.

a 41. huius.
b Ex 8. huius.
c Ibid.

PROPOSITIO CXLVI.

Habeant A B C, D E F parabolæ ad eundem axem A G constitutæ apices diuersos A, D; & A B C quidem superior, habeat A H latus rectum maius latere recto I D parabolæ D E F.

Dico sectiones illas in infinitum productas nusquam conuenire.



Demonstratio.

Ponatur ordinatim ad axem A G, quæcunque linea C G, occurrens A B C parabolæ in C, & D E F in F. erit igitur F G quadratum æquale rectangulo I D G, & C G quadratum æquale rectangulo H A G: sed I D G rectangulum minus est rectangulo H A G, (quia I D latus rectum minus ponitur ipso H A & D G minor ipsa A G) igitur & quadratum F G minus est quadrato C G: & F punctum cadit inter C & G. & quia idem de quouis puncto parabolæ D E F ostenditur, patet sectiones illas in infinitum productas nusquam conuenire. Quod erat demonstrandum.

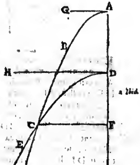
PRO-

PROPOSITIO CXLVII.

Sint duæ parabolæ ABC, DCE ad eundem axem constitutæ, & ABC parabolæ latus rectum, minus sit latere recto parabolæ DCE, nec vertex A communis sit.

Dico parabolas illas concurrere. oportet autem punctum concursus assignare.

Constructio & demonstratio.



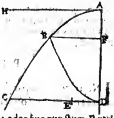
Sit AG latus rectum parabolæ ABC, & DH latus rectum parabolę DCE, lineæ AD adjiciatur quędam DF, vt AF sit ad FD, sicut HD est ad AG. & ex F ordinatim ponatur FC occurrens parabolæ DCE in C: dico illud esse punctum intersectionis. Quoniam est vt HD ad AG, sic AF ad FD, erit HDF rectangulo, æquale rectangulum GAF. sed HDF rectangulo æquale est a quadratum FC; igitur & GAF rectangulo æquale quoque est quadratum FC. vnde punctum C est ad parabolas ABC, DCE. exhibuimus ergo punctum concursus. a Ibid.

PROPOSITIO CXLVIII.

Habeant parabolæ ABC, DBF communem axem AD, & vertices oppositos A, D.

Oporteat autem earum intersectionum puncta exhibere.

Constructio & demonstratio.

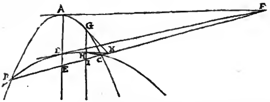


Sit ABC parabolę latus rectum AH, & DB parabolæ latus rectum ED; secetur que AD in F, vt HAF rectangulo æquale sit rectangulum FDE: & per F ordinatim ponatur FB, occurrens parabolæ ABC in B. dico B punctum esse intersectionis. cùm enim FB in ABC parabola ordinatim ducta sit ad axem AD, FAH rectangulum æquale est quadrato FB. sed FAH rectangulum æquale ponitur rectangulo FDE; quadratum igitur FB æquale quoque est rectangulo FDE, quare FB ordinatim applicata est ad FD axem, in parabola DB: adeoque punctum B vtrique parabolę est commune. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CXLIX.

Sint duæ parabolæ ABC, BDC inæquales, habentes communem rectam AE, quæ quidem axis sit parabolæ ABC, diameter verò parabolæ BDC: secent que se in B & C punctis, oportet illa exhibere.

Constructio & demonstratio.



FActum sit quod petitur: actâ per A contingente AF, ducatur linea per B & C, conueniet illa cum AF in puncto quouis F: si enim non conueniat, æquidistet AF: erit igitur CB, ordinatim posita ad axem AE in parabola ABC, & quia in E bisecta est, in BDC parabola quoq; ordinatim erit ducta, ipsique DE diametro ad angulos rectos. igitur DE axis est parabolę BDC: quod est contra hypothesim: concurret ergo CB, cum AF in puncto quouis F. ponatur ergo ex F linea FD, contingens parabolam BDC in puncto quouis D. Quoniam AF est contingens, in parabola ABC, lineæ FB, FE, FC [a] proportionales sunt, sed & in parabola BDC eædem sunt proportionales; punctum igitur D contingentis DF, [b] in diametro est DE. Rursum ducatur diameter quęuis alia GH occurrens parabolis in G & H, & BC lineę in I, actaque per G contingente GK, quæ cum BF conueniat in K, ducatur ex K linea KH, contingens parabolam BDC in puncto quouis H. Quoniam igitur GK linea contingit parabolā ABC, rectæ KB, KI, KC [c] continuæ proportionales sunt: sed & eædem quoque sunt proportionales in parabola BDC, igitur H punctum contingentis HK, in [d] diametro est HI. igitur componendo cùm A, D puncta data sint, agantur per A & D, contingentes, quæ conuenient in puncto quodam F. ductaque diametro quauis GH; agantur per G & H, contingentes quę etiam conuenient in K: igitur data sunt puncta F, K, E, I: quare & data erunt puncta B, C: quæ in FK linea esse per resolutionem ostendimus. igitur exhibuimus duarum parabolarum CBC, BDC intersectiones. Quod erat præstandum.

a 81. huius. b Ex eadem. c ibid. d ibid.

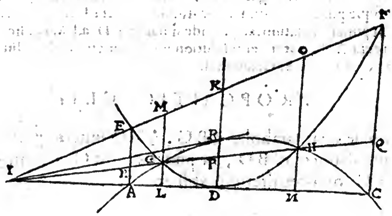
PROPOSITIO CL.

INtersecent sese parabolæ duæ ABC, EDF inuersè positæ, habentes axes parallelos: oportet G & H, puncta intersectionum exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt EDF parabolę axis DB, & factum sit quod petitur: actaque per D linea AC quę EDF parabolam contingat in D, ponatur per G & H, puncta intersectionum recta GH, quæ conueniet cum AC in puncto quouis I. si enim non conueniat, æquidistet AC. recta igitur GH in parabola EDF, ordinatim posita est ad axem DB, adeoque & diametrum BD in parabola [e] ABC ad angulos secatur recto: & quia GH à BD, linea bisecta est, recta BD axis est parabolæ ABC, quod est contra hypothesim. igitur HG non æquidistat AC, sed producta cum illa conuenit in puncto quouis I. ducatur ergo ex I recta IB, contingens parabolam ABC in puncto quodam B. quoniam ID recta est contingens, lineæ IG, [f] IP, IH continuæ sunt proportionales in parabola EDF: sed & eædem quoque sunt proportionales in parabola ABC, punctum igitur contactûs B lineæ

e Defin. 1. huius. f 81. huius.



neæ IB eſt in diametro a BD. Rurſum erigatur ex A diameter AE occurrens EDF parabolæ in E: & IG rectæ in R. ducaturque per E ex I, linea IF, occurrens parabolæ EDF in F, & iungantur puncta CF. Quoniam AE,KD, rectæ parallelæ ſunt, vt AI ad DI, ſic EI eſt ad KI: ſed vt AI ad DI, ſic b AD eſt ad DC (quia IA,ID,IC proportionales ſunt) & vt EI ad KI, ſic EK eſt ad KF, quia EI,KI,FI proportionales ſunt; igitur vt AD eſt ad DC, ſic EK eſt ad KF, adeoque FC linea æquidiſtat KD: vlterius per G & H, poſitis diametris LM, NO, producatur GH linea donec FC occurrat in Q. erit igitur vt ADC rectangulum ad rectangulum ANC, c ſic BD linea ad lineam HN: ſed vt ADC rectangulum ad rectangulum ANC, (hoc eſt vt EKF rectangulum ad rectangulum EOF,) ſic KD linea quoque eſt ad lineam HO; igitur vt BD ad HN, ſic KD eſt ad OH: & permutando inuertendo vt KD ad BD, ſic OH eſt ad HN, hoc eſt FQ ad QC, hoc eſt MG ad GL, hoc eſt ER ad RA.

a Ex eadem

b 1. De progreſſionibus.

c 47. huius.

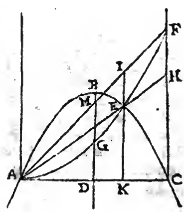
Componendo igitur, inuento axe DB parabolæ EDF, cùm data ſint puncta D & B, acta per B contingente BI, agatur per D quoque contingens parabolam EDF in puncto D, ſecans ABC, in A & C: conueniet illa cum BI (vt oſtendi) in puncto quouis I: data igitur ſunt puncta I, A, C. erigantur ergo ex A & C, diametri AE, CF occurrentes parabolæ EDF, in punctis E & F: ductaque ex I per E linea occurret illa rectę CF in F, (vt oſtenſum eſt) & BD lineæ in K. vnde & K punctum quoque datum eſt. fiat igitur vt KD ad BD, ſic ER ad RA, vel FQ ad QC, ducaturque recta IR vel IQ. patet per reſolutionem, in illa eſſe puncta interſectionum B & C. igitur exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CLI.

Esto ABC parabolæ axis BD, & ordinatim ad illum poſita AC, per A verò deſcribatur parabola AEF cuius vertex ſit A, & AC linea contingens; occurrat quoque AEF parabola, parabolæ ABC in E, oportet E punctum interſectionis exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.

Factum ſit quod petitur: erectaque ex C diameter CH occurrat parabolæ AEF in F; ducaturque FA, occurrens BD lineæ in M: dein per E rectæ ponantur AEH, IEK; & AE quidem occurrat FC in H, IK verò æquidiſtet axi BD. erit igitur vt ADC rectangulum ad rectangulum AKC, ſic BD linea ad lineam EK: ſed vt ADC rectangulum ad rectangulum AKC, hoc eſt vt AMF rectangulum ad rectangulum AIF, ſic MG linea ad lineam IE: igitur vt BD ad EK, ſic MG eſt ad IE; & permutando vt BD ad MG, ſic EK eſt ad IE, hoc eſt CH eſt ad FH.



Igitur per compoſitionem cùm AC, BD lineæ &

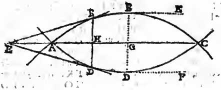
 puncta

puncta B D, C G data sint, erigatur ex C diameter C F, occurrens A E F parabolæ in F, erit F quoque punctum datum: ducatur dein recta F A occurrens B G lineæ in M, erit & M punctum datum. ac proinde si fiat vt B D, ad M G, sic C H ad H F, ducaturque recta A H, patet per resolutionem, E punctum esse in linea A H. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CLII.

INtersecent se duæ parabolæ A B C, A D C inuersè positæ, habentes communes diametros B D, in punctis A & C: datumq; sit vnum punctorum C: oportet alterum exhibere.

Constructio & demonstratio.



AGantur per B & D puncta contingentes B E, D F. quæ primò æquidistent, ducaturque ipsi B E parallela C A, occurrens A B C parabolæ in A, & B D rectæ in G; erit igitur A C linea in parabola A B C, ordinatim posita ad diametrum B D, adeoque in G diuisa bifariam. sed etiam A C æquidistat D F contingenti: igitur & A C in parabola A D C ad B D, ordinatim ducta est, & in G diuisa bifariam: igitur A punctum vtrique parabolæ est commune.

Secundò concurrant in E contingentes per B & D actæ: ducaturque recta E C, occurrens B D diametro in H, & A B C parabolæ in A. erunt a igitur proportionales E A, E H, E C. sed eædem quoque lineæ sunt proportionales in parabola A D C, & H, G, C puncta data sunt: igitur & A punctum datum est, estque illud A D C parabolæ commune. exhibuimus ergo alterum punctum occursus A. quod fieri postulabatur.

a 81. huius.

PARABOLÆ

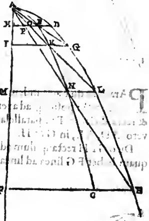
PARS QVARTA

Proprietates contemplatur parabolarum sese inuicem vel circulos intersecantium.

PROPOSITIO CLIII.

HAbeant ABC, ADE parabolæ communem axem AF, & verticem A: ex quo demissâ linea AG quæ parabolis occurrat in B & G; ponantur per B & G ordinatim ad axem lineæ DH, GI: & GI quidem parabolæ ABC occurrat in K puncto, per quod ex A secans ponatur AL & ex L ordinatim recta LM, occurrens ABC parabolæ in N: dein per N ponatur AE, & ex E ordinatim linea ECF.

Dico DH, KI lineas, item LM, CF inter se æquales esse.



Demonstratio.

RAtio AH ad AI, hoc est HB ad IG, duplicata est rationis HB ad IK, hoc est HD ad IG. igitur HB, IK, IG proportionales sunt, & vt IK ad IG, sic HB ad IK, sed HB est ad HD, vt est IK ad IG: igitur HB est ad HD, vt HB ad IK. æquales igitur sunt HD & IK. eadem ratione ostendetur lineas LM, CF æquales esse.

PROPOSITIO CLIV.

IIsdem positis, rectæ AL, AE secent DH lineam in O & P.

Dico rectas EF, LM, GI, DH, BH, OH, PH in continua esse proportione.

Demonstratio.

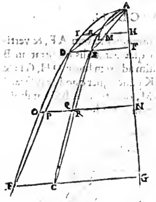
QVoniam NM æqualis est ostensa GI, & EF, [a] LM, NM proportionales sunt, erunt & EF, LM, GI lineæ in continua analogia: & quia LM, GI, KI proportionales sunt, & KI lineæ æqualis linea DH, continuabût quoq; LM, GI, DH rationem cum EF, LM, GI: est autem præterea vt GI ad DH, sic DH ad BH, proportionales igitur sunt EF, LM, GI, DH, BH, vlterius cùm sit vt GI ad KI, sic BH ad OH, sit autem vt GI ad KI, sic GI ad DH, & DH ad BH, rectę GI, DH, BH, OH continuæ proportionales sunt. iterum cùm OH sit ad PH, vt LM ad NM, id est ex demonstratis LM ad GI, id est GI ad DH, hoc est DH ad BH, hoc est BH ad OH: erunt GI, DH, BH, OH, PH lineæ; adeoque omnes EF, LM, GI, DH, BH, OH, PH in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

[a] 41. huius.

PROPOSITIO CLV.

HAbeant ABC, ADE parabolæ communem axem AF, positisque ad illum ordinatim lineis FBD, GCE, iungantur AB, AD, BC, DE ducanturq; HI, NO parallelę FD, & HI quidem secet parabolas in I & L, lineas AD, AB in K & M, recta verò NO, occurrat DE, BC, lineis in P & R, parabolis in Q & O.

Dico esse vt LM ad RQ, sic IK ad OP.



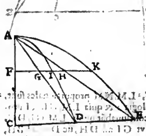
Demonstratio.

VT IH ad LH, sic DF ad BF; sed vt DF ad BF, sic KH ad MH, igitur vt IH ad LH, sic KH ad MH, & IK ad LM, vt IH ad LH; id est vt DF ad BF. sed vt DF ad BF, sic ON quoque est ad QN, & PN ad RN. igitur vt ON ad QN, sic PN ad RN: & OP ad QR, vt ON ad QN, id est DF ad BF, id est ex demōstratis IK ad LM, & permutando vt IK ad OP, sic LM ad RQ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLVI.

PArabolæ duæ ad eundem axem AC constitutę communem habeant apicem A: positaq; ad axem ordinatim CDE, iungantur AD, AE, & recta ducatur FK parallela CE, secans parabolas in I & K, rectas verò AD, AE, in G & H.

Dico GFH rectangulum ad rectangulum IFK eam habere rationem, quam habet FG linea ad lineam CD.



Demonstratio.

a 41. huius.

RAtio rectanguli GFH ad IFK, rectangulum composita est ex ratione FG ad FI, & ex HF ad FK; est autem vt FG ad FI, sic [a] FI ad CD; & vt FH ad FK, sic FK ad CE; ratio igitur rectanguli GFH ad rectangulum IFK, composita est ex rationę FI ad CD, & ex FK ad CE: sed FK est ad CE, vt FI est ad CD: rectangulum igitur GFH ad IFK rectangulum duplicatam habet rationem eius quam habet linea FI ad CD: id est rectangulum GFH ad IFK rectangulum, est vt FG ad CD, quia FG, [b] FI, CD proportionales sunt. Quod fuit demonstrandum.

b ibid.

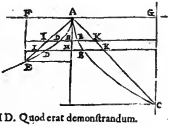
PRO-

PROPOSITIO CLVII.

Contingant se exterius in vertice, parabolæ duæ ABC, ADE, positisque ex A secantibus AE, AC, & contingente AH, ducantur quotcunque IK parallelæ axi communi FAG.

Dico IHD rectangulum, esse ad rectangulum IHD, vt KHB rectangulum ad rectangulum KHB.

Demonstratio.



Rectangulum IHD ad rectangulum IHD, triplicatam habet rationem eius [a] quam habet IH ad IH, id est AH ad AH. sed & BHK rectangulum ad rectangulum BHK, triplicatam habet rationem eius quam habet HK ad HK, id est AH ad AH: igitur vt BHK rectangulum est ad rectangulum BHK, sic IHD rectangulum est ad rectangulum IHD. Quod erat demonstrandum.

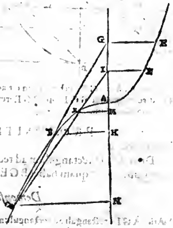
a 154. huius.

PROPOSITIO CLVIII.

Contingant se rursum exterius in vertice parabolæ duæ ABC, AEF, ad eundem axem GH constitutæ, sumptoque in ABC perimetro puncto quouis C ducantur ex C lineæ CG, CI secantes ABC parabolam in B & K, & axem GH in G & I: dein ordinatim ponantur BH, KM, IE, GF.

Dico HB lineam ad lineam MK, duplicatam habere rationem eius quam habet GF linea ad lineam IE.

Demonstratio.



Ducatur ex C ordinatim linea CN. Quoniam tam NA, AI, AM lineæ quàm NA, AG, AH [b] continuæ proportionales sunt & NA prima vtrique seriei communis, ratio AH ad AM, tertiæ ad [c] tertiam, duplicata est eius quam habet AG ad AI, secunda ad secundam: sed AH ad AM, duplicatā quoque rationem habet BH ad KM; igitur BH est ad KM, vt AG est ad AI: & HB ad MK duplicatam habet rationem eius quam habet GF ad IE. Quod erat demonstrandum.

b 61. huius.

c 27. De progressionibus.

PROPOSITIO CLIX.

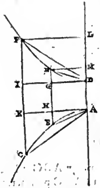
Esto ABC parabolæ axis AD æqualis lateri recto; & per D parabola descripta DEF æqualis

parabolæ

parabolæ ABC apicem habeat D, obuersum apici parabolę ABC & axem communem; dein quæuis ducantur diametri EB, FC occurrentes parabolis in B, C, E, F punctis; actæ verò per A & D, contingentes, diametros EB, FC secent in G, H, I, K.

Dico EGB rectangulum esse ad rectangulum FIC, vt est quadratum ED ad quadratum FD.

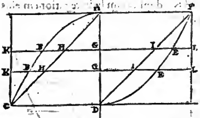
Demonstratio.



Ponantur ordinatim lineæ FL, EM. Quoniam AD linea, æqualis ponitur lateri recto, & EM, FL ordinatim applicatæ sunt, quadratum ED (hoc est quadrata EM, MD) æquale est rectangulo DMA: & quadratum FD (hoc est quadrata FL, LD) æquale rectangulo DLA; igitur vt ED quadratum ad quadratũ FD, sic DMA rectangulum ad rectangulũ DLA: sed DMA id est GEH, rectangulo æquale est rectangulum EGB; & DLA æquatur FIC: rectangulum igitur EGB ad FIC, rectangulum est vt quadratum ED ad quadratum FD.

PROPOSITIO CLX.

Sint ABC, DEF parabolæ, ad eundem axem AD inuersè positæ; ductisque ex A & D, ordinatim lineis AF, DC, iungantur puncta AC, FD; ducantur præterea quotuis BE parallelæ AF occurrentes parabolis in B & E, rectis AC, FD in H & I, & axi AD in G.



Dico quadratum BG, rectangulum BGE & quadratum GE in continua esse analogia.

Demonstratio.

Vt BG linea ad lineam GE; sic quadratum BG est ad rectangulum BGE: sed etiam vt BG ad GE, sic BGE rectangulum est ad quadratum GE; igitur vt quadratum BG ad rectangulum BGE, sic BGE rectangulum est ad quadratum GE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXI.

Isdem positis:

Dico AGD rectangulum ad rectangulum AGD, duplicatam habere rationem eius quam habet BGE rectangulum ad rectangulũ BGE.

Demonstratio.

Ratio AGD rectanguli ad rectangulum AGD composita est ex ratione AG ad AG, & ex GD ad GD: ratio verò rectanguli BGE, ad BGE rectangulum, composita est ex ratione BG ad BG, & ex GE ad GE: sed ratio AG ad AG, dupli-

duplicata est rationis BG ad BG, & ratio GD ad GD, duplicata est rationis GE ad GE, ratio igitur rectanguli AGD ad rectangulum AGD, duplicata est eius quam habet BGE rectangulum ad rectangulum BGE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXII.

Iisdem positis erigantur ex C & F diametri CK, FL occurrentes lineis BE in K & L.

Dico rectangula KGL, BGE, HGI in continua esse analogia.

Demonstratio.

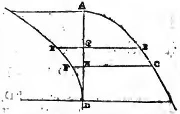
Rectangulum KGL ad rectangulum BGE, rationem habet compositam ex KG ad BG, & ex GL ad GE: & BGE rectangulum ad rectangulum HGI, rationem habet compositam ex BG ad HG, id est KG ad BG, & ex GE ad GI: id est GL ad GE: rectangulum igitur KGL est ad rectangulum BGE, vt BGE rectangulum ad rectangulum HGI. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXIII.

Sint rursum parabolæ duæ ABC, DEF: & ABC parabolæ quidem apex sit A, parabolæ verò DEF sit apex D, in quo contingat axem AD in D: factisque AG, DH lineis æqualibus, agantur per G & H, normales ad AD, lineæ EB, FC occurrentes parabolis in E, B, F, C.

Dico EGB rectangulum ad rectangulum FHC quintuplicatam habere rationem eius quam habet GB linea ad lineam HC.

Demonstratio.



Ratio EGB rectanguli ad rectangulum FHC, composita est ex ratione EG ad FH, hoc est duplicata GD ad HD; id est AH ad AG, (cùm AG, HD lineæ æquales sint) hoc est ex quadruplicata ratione GB ad HC, & ex ratione GB, ad HC: rectangulum igitur EGB ad FHC rectangulum quintuplicatam habet rationem GB ad HC. Quod fuit demonstrandum.

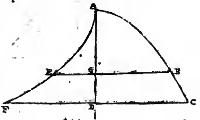
a Ex 33. huius.

PROPOSITIO CLXIV.

Sit ABC parabolæ axis AD, & AEF parabolæ vertex A, in quo illam contingat linea AD, positaque EGB ordinatim ad AD ducatur & altera FDC, vt GB, FD rectæ æquales sint.

Dico rationem EG ad DC quintuplicatam esse eius quam habet GB ad DC.

Demonstratio.



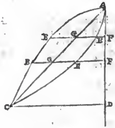
Ratio EG ad DC componitur ex ratione EG ad FD, hoc est duplicata AG ad AD. hoc est quadruplicata rationis GB, ad DC,

& ex ratione GB. hoc est FD, ad DG igitur ex quintuplicata ratione GB ad DC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLXV.

Sit ad ABC parabolæ diametrum AD ordinatim posita CD, describatur autem per A & C, parabola AEC habens verticem in A & AD, contingentem, iunctisq; AC ponantur ad AD, ordinatim lineæ BG, EF.

Dico GFE rectangulum esse ad rectangulum GFE in sextuplicata ratione FB ad FB.



Demonstratio.

a 54. huius.

Rectangulum GFE ad GFE [a] rectangulum triplicatam habet rationem GF ad GF, id est AF ad AF; sed AF ad AF, rationem habet duplicatam eius quam habet BF ad BF; rectangulum igitur GFE ad GFE, rectangulum sextuplicatam habet rationem FB ad FB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVI.

Iisdem positis:

Dico EFB rectangulum ad rectangulum EFB quintuplicatam habere rationem eius quam habet FB ad FB.

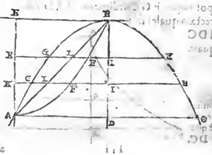
Demonstratio.

Rectangulum EFB ad EFB, rectangulum rationem habet compositam ex EF ad EF, id est ex duplicata rationis AF ad AF, id est ex quadruplicata rationis FB ad FB, & ex ratione FB ad FB; ratio igitur EFB rectanguli ad rectangulum EFB quintuplicata est rationis FB ad FB.

PROPOSITIO CLXVII.

Parabolam ABC cuius axis BD, contingat in B linea BE, in qua assumpto quouis puncto E demittatur EA, occurrens ABC parabolæ in A. tum per A & B parabola describatur AFB habens verticem in A, occurrens ABC parabolę in B. sitque eius axis AE: ducatur autem KH secans AFB parabolam in F, axem BD in I.

Dico GK, FK, HK lineas esse proportionales.



Demonstratio.

b 41. huius.

c 43. huius.

Iuncta AB secet HG lineam in L. Quoniam BD æquidistat diametro AE, & IK ordinatim ad illam applicatur, rectangulo LKI [b] æquale est quadratum FK, sed & LKI rectangulo æquale est rectangulum GKH, quadratum igitur FK æquale quoque

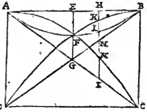
quoque est rectangulo G K H. & G K, F K, H K lineæ in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.

Esto A B C D parallelogrammum, descriptâq; per A & C, parabolâ cuius diameter sit A D, & contingens A B, describatur & altera per B & D, cuius diameter sit B C & contingens A B. occurrat autem parabolæ A E C in E: deinde per A, E, C puncta tertia describatur parabola communes habens cum alijs diametros.

Dico iunctas A C, B D, parabolam A E C contingere in A & C.

Demonstratio.



Agatur per E diameter E F secans D B lineam in G. vt F E ad A D, sic F B quadratum ad [a] quadratum A B, & vt F E linea, ad lineam B C, sic A F, quadratum ad quadratum A B: sunt autem A D, B C lineæ per hypothesim æquales, igitur & F B quadratum est ad quadratum A B, vt A F quadratū ad quadratū A B: quadrata igitur A F, F B æqualia sunt, & linea A B dupla A E, vti A D dupla F G: quare F E etiam A C lineæ occurrit in G puncto, quo bifariam à D B, alterâ parallelogrammi diametro secatur. Rursum quia A B quadratum quadruplum est quadrati F B, erit & B C linea, quadrupla lineæ F E: est autem A D id est B C, ostensa dupla F G, igitur F G dupla est F E, & F E, E G lineæ æquales. vnde B D linea [a] est contingens: similiter ostenditur A C lineam, parabolam A E B contingere. Quod erat demonstrandum.

a Ex 17. huius.

Corollarium.

Hinc patet A G, B D lineas, in illo puncto se intersecare, vbi E G est æqualis rectæ F E: quod singulatim & explicitè annotare verbo placuit.

PROPOSITIO CLXIX.

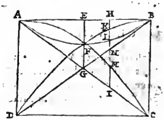
Iisdem positis: oportet E punctum intersectionis exhibere.

Constructio & demonstratio.

Diuisâ A B bifariam in F, demittatur ex F diameter F E, æqualis quartæ parti lineæ B C: dico E, terminum lineæ F E, designare punctum intersectionis. sit enim E punctum intersectionis inuentum & per E diameter agatur E F. erit E F, vt in præcedenti propositione ostendimus, æqualis quartæ parti lineæ B C; igitur per compositionem cùm F E diameter detur æqualis quartæ parti lineæ B C, patet E punctum esse intersectionis, &c. Quod erat exhibendum.

PROPOSITIO CLXX.

Iisdem positis ducatur quæuis diameter H I secans parabolas in K, L, M. Dico H K, H L, H M lineas in continua esse analogia.



a 47. huius.
b Ex 17. huius.
c 47. huius.
d 94. huius.
e Ibid.

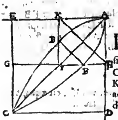
Demonstratio.

REcta H I secet B D lineam in N, & A C in I. vt B H A rectangulum ad rectangulum B F A a sic H L linea est ad lineam F E, id est E G; & vt B N D rectangulum ad rectangulum c B G D, sic K N ad E G: est autẽ B H A rectangulum ad rectangulum B F A, vt B N D rectangulum ad rectangulum B G D; igitur vt H L ad E G, sic K N ad E G: adeoque H L, K N æquales sunt lineæ; & dempta communi K L, manet H K æqualis L N: similiter ostẽditur I M linea æqualis lineæ H L: quare vt H M ad M I, sic H M est ad H L: sed vt H M ad M I, sic d A I est ad I C, id est A H ad H B; igitur vt H M ad H L, sic A H ad H B, id e est H L ad L N, id est H L ad H K. proportionales igitur sunt H K, H L, H M. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXI.

PArabolam A B C cuius diameter A D contingat in A linea A E, demissaq; ex E, diametro E C, describatur per A & C parabola A F C cuius diameter sit A E & contingens A D: dein linea ducatur G H parallela A E, secans A F C parabolam in F, & A C lineam in I puncto; per quod diameter ponatur I B K, iunganturque B F, H K.

Dico B F, H K lineas æquidistare.



f Ex 67. huius.
g Ex elementis.

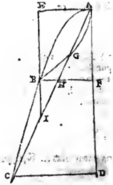
Demonstratio.

POnatur ex C ordinatim ad diametrum A D linea C D: ratio K B ad E C, duplicata f est rationis K I ad E C: similiter ratio H F ad C D, duplicata est rationis H I ad C D, id est A K ad A E, id est K I ad E C; igitur vt K B ad E C, sic H F ad C D, & vt K B ad K I, sic H F ad H I. æquidistant igitur g F B, H K lineæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXII.

PArabolam A B C cuius diameter A D, contingat in A linea A E, demissaq; diametro E B, quæ A B C parabolæ occurrat in B, ponatur ex B ordinatim linea B F: descriptaque per A & B parabolâ A G B cuius diameter A E, & contingens A D, ducatur ex A linea A C occurrens A G B parabolæ, & lineis B F, E B in G, H, & I.

Dico A G, A H, A I, A C lineas esse continuè proportionales.



h 71. huius.

Demonstratio.

QVoniam E B æquidistat contingenti A D, & F B, diametro A E; rectæ A G, h A H, A I continuæ sunt propor-

proportionales. sunt autem & A H, A I, [a] A C lineæ etiam in continuata ratione; igitur A G, A H, A I, A C eandem continuant analogiam. Quod erat demonstrandum. a Ex 67. huius.

PROPOSITIO CLXXIII.

Iisdem positis ponatur ordinatim C D.

Dico A G ad A C triplicatam habere rationem eius quam habet B F ad C D.

Demonstratio.

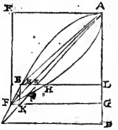
QVoniam A G, A H, A I, A C lineę per præcedentem continuæ proportionales sunt, ratio A G ad A C [b] triplicata est eius cuius A H ad A C est duplicata: sed A H ad A C, id est A F ad A D, rationem habet duplicatam B F ad C D; igitur A G ad A C rationem habet triplicatam eius quam habet B F linea ad lineam C D. Quod erat demonstrandum. b Ex 17. de progressionibus.

PROPOSITIO CLXXIV.

PArabolam A B C cuius diameter A D contingat in A linea A E; positisq; ordinatim C D, F G, per F & A parabola describatur A H F cuius tangens A D, diameter A E: ductaque A F, ponatur A C, secans A H F parabolam in I, rectam F G in K puncto, ex quo erectâ diametro K B, ducatur ordinatim linea B L, occurrens A F lineæ in M, rectæ A G in N, & parabolæ A H F in H.

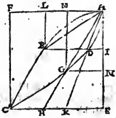
Dico C D, F G, B L, M L, N L, H L lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.



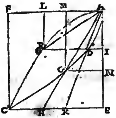
ERigatur ex F diameter F E. Quoniam B K æquidistat diametro A D, rectæ C D, F G, B L proportionales sunt: sed & F G, B L, M L quoque sunt proportionales; eandem igitur continuant rationem C D, F G, B L, M L. Rursum cûm ratio N L ad K G, id est ad B L, id est ratio A L ad A G, duplicata sit rationis B L ad F G, id est L M ad L B, rectæ quoque B L, M L N L proportionales sunt. postremò quia F G linea ad lineam H L duplicatam habet rationem A L ad A G, id est quadruplicatam L B ad G F, id est L B ad L M, lineæ L H, L N, L M, L B, L F proportionales sunt; igitur continuant eandem rationem lineæ C D, F G, B L, M L, N L, H L. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXV.



PArabolas æquales A B C, A D C, & communem habentes verticem, contingant in A lineæ A E, A F æquales lateribus rectis; secent autem sese parabolæ in C, & ex C ordinatim ducantur C E, C F, demissisque ex A lineis æqualibus A B, A G; quarum altera A B, quidem secet A B C parabolam in B,

 A G ve-



AG verò parabolam ADC in C & producta, CE lineam in H. ducatur ex B ordinatim linea BI secans ADC parabolam in D, & per D ex A linea ducatur AK occurrens EC in K.

Dico AD ad AK, duplicatam habere rationem eius quam habet AG ad AH.

Demonstratio.

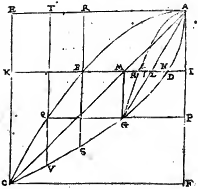
DVcantur ex B & G punctis, diametri BL, GM, GN: ac BL, & GM quidem occurrant AF lineæ in L & M; GN verò, rectæ AE in N. Quoniam tam ABC, ADC parabolæ, quàm AB, AG lineæ æquales sunt, erit LB linea quoque æqualis GN, & IB æqualis MG. Rursum ratio LB ad FC, id est AI ad AE; id est AD ad AK duplicata est rationis IB ad EC, id est MG ad EC; sed vt MG ad EC, sic AN ad AE (nam AL id est IB æqualis est rectæ AN, & EC ipsi
a 9 huius. AE, [a] est æqualis) hoc est AG ad AH; igitur ratio AD ad AK, duplicata est eius quam habet AG ad AH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVI.

PArabolas æquales ABC, ADC communem habentes verticem contingant in A lineæ AE, AF, secentque sese inuicem parabolæ in C; ex quo ductis ordinatim lineis CE, CF, describatur per A parabola AHG habens verticem in A, & contingentem AE, occurrens autem ADC parabolæ in G. iunctisque punctis AC, AG, erigatur ex G diameter GM secans AC lineam in M, puncto per quod ordinatim ducatur linea IK secans parabolas in B, H, D, lineam AG in L.

Dico rationem IH ad IB triplicatam esse eius, cuius IL ad IM, habet duplicatam.

Demonstratio.



b 41. huius. c 74. huius. d ibid. INueniatur inter ID & IL media IN; quoniam igitur ID, IL, [b] IM, proportionales sunt, & IN media inter ID, IL, erunt tam ID, IN, [c] IL, IH lineæ, quàm ID, [d] IL, IM, IB continuæ proportionales: quare ratio IH ad IB, quartæ ad quartam, tripli-

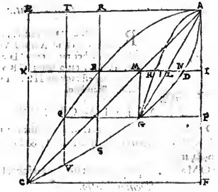
triplicata [a] est rationis IN ad IL, secundę ad secundam, cuius IL ad IM, tertia ad tertiam, rationem [b] habet duplicatam. Quod erat demonstrandum. a 27. De progressionibus. b Ibid.

PROPOSITIO CLXXVII.

Iisdem positis: agatur per G ordinatim QP.

Dico ID ad IH, rationem habere triplicatam eius quam habet IH ad GP. & rationem ID ad IB, triplicatam esse rationis IB ad GF.

Demonstratio.



Cum enim IN media sit inter ID & IL, rectæ ID, IN, IL, [c] IH, GP proportionales sunt, quare ID ad IH, prima ad quartam, triplicatam habet rationem IH ad [d] GP, quartæ ad quintam. Quod erat primum. Rursum cum IL media sit [e] inter ID, IM, rectæ [f] ID, IL, IM, IB, IK id est CF continuæ proportionales sunt. quare ID ad IB, prima ad quartam, triplicatam habet rationem eius quam habet IB ad CF, quarta ad quintam. Quod erat demonstrandum. c 174 huius. d 27. De progressionibus. e Ex 42. huius. f 174. huius

PROPOSITIO CLXXVIII.

Iisdem positis agantur per Q & B diametri TV, RS occurrentes ADC parabolæ in V & S, & AE lineæ in T & R.

Dico rationem ID ad GP, octuplicatam esse rationis RS ad TV.

Demonstratio.

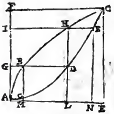
Est enim ratio ID ad GP, duplicata rationis [g] AI ad AP, id est RB ad TQ: id est quadruplicata eius quam habet RA ad TA. sed ratio RA ad TA, duplicata est rationis RS ad TV, cum ordinatim sint positę ad AE; igitur ratio ID ad GP, octuplicata est rationis RS ad TV. Quod erat ostendendum. g Ex 1. huius.

PRO.

PROPOSITIO CLXXIX.

PArabolas A B C, A D C communem habentes verticem, contingant in A lineæ A E, A F, secent autem sese parabolæ in C puncto, ex quo ordinatim ponantur lineæ C E, C F: assumptoque in A F puncto quouis G, ducatur ex G ordinatim linea G D, secans A B C, A D C parabolas in B & D. actâque per D diametro D H, quæ A B C parabolæ occurrat in H, ducatur per H ordinatim linea I K, secans A F lineam in I.

Dico G B ad G D quadruplicatam habere rationem eius quam habet I H ad I K.



Demonstratio.

RAtio G B ad I H, id est G D duplicata est rationis A G ad A I: sed A G ad A I, duplicatam habet rationem G D ad I K, id est I H ad I K, ratio igitur G B ad G D, quadruplicata est rationis I H ad I K. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXX.

PRoductâ H D donec A E lineæ occurrat in L, demittantur ex B & K diametri B M, K N occurrentes A E lineæ in M, & N, & B M quidem A D C parabolæ in O.

Dico rationem O M ad D L, quadruplicatam esse rationis D L ad K N.

Demonstratio.

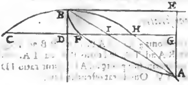
ESt enim ratio O M ad D L duplicata rationis A M ad A L, id est G B ad I H: id est quadruplicata rationis A G ad A I, id est L D ad N K. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXXI.

PArabolâ A B C cuius axis B D contingat in B linea B E, in qua assumpto quouis puncto E, demittatur ex E diameter E A: descriptâ deinde per A & B parabola B F A cuius axis B E, & contingens B D, ducatur ad B D quæuis ordinatim linea H C, occurrens parabolis in C, F, H; & B D, B A, E A lineis in D, I, G.

Dico H I C rectangulum, æquari rectangulo G D I F.

Demonstratio.

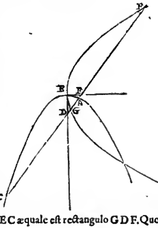


a 42. huius.
b 67. huius.
c 5. secundi.

REctangulum G D I, æquale est [a] quadrato H D: sed H D quadratum æquale est quadrato I D, id est [b] rectangulo F D B, unà cum [c] rectangulo H I C, rectangulum igitur G D I, æquale est rectangulis F D G, H I C. est autem idem G D I rectangulum, æquale quoque rectangulis F D G, G D I F: rectangula igitur F D G, H I C, æqualia sunt rectangulis F D G, G D I F. dempto igitur communi rectangulo F D G, manet H I C rectangulum æquale rectangulo G D I F. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXII.



PArabolam A B C cuius diameter B D contingat in B, linea B E, deſcriptaq́; per B parabolâ F B G, cuius diameter B E, & contingens B D, ducatur linea quæcunq; F C, occurrens parabolis in A, & G, F, C, diametris verò in E & D.

Dico A E C rectangulum, æquari rectangulo G D F.

Demonſtratio.

QVoniam E B linea contingens eſt, rectæ A E, D E, a C E proportionales sũt, adeoque A E C rectangulum æquale quadrato E D: ſed E D quadrato æquale eſt b rectangulum G D F, rectangulum igitur A E C æquale eſt rectangulo G D F. Quod erat demonſtrandum.

a 11. *huius.*

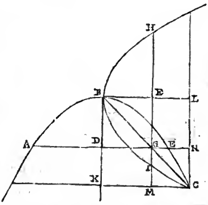
b *ibid.*

PROPOSITIO CLXXXIII.

IIſdem poſitis: occurrant ſibi parabolæ duæ A B C, C B H in C. iunctâque B C, ponatur in A B C parabola ordinatim ad B D, linea A D F, occurrens rectæ B C in G: & per G recta agatur H I parallela B D, occurrens diametro B L in E.

Dico I G H rectangulum eſſe ad rectangulum F G A, vt quadratum I E ad quadratum F D.

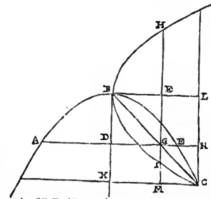
Demonſtratio.



POnantur ex C ordinatim ad diametros B D, B E, lineę C K, C L. quoniam B C, B G parallelogramma communem habent diametralem B G C, vt C L ad G E, ſic K C eſt ad G D; ſed vt C L ad G E, ſic I E quadratum eſt ad c quadratum G E, & vt C K linea ad lineam G D, ſic F D quadratum eſt ad quadratum G D; igitur vt I E quadratum ad quadratum G E, ſic F D quadratum eſt ad quadratum G D, & permutando vt I E quadratum ad quadratum F D, ſic quadratum G E ad quadratum G D. eſt autem quadratum I E æquale quadrato G E, vnà cum rectangulo I G H; & F D quadratum æquale quadrato G D, vnà cum rectangulo F G A; igitur & I G H rectangulum eſt ad rectangulum F G A vt I E quadratum ad quadratum F D. Quod erat demonſtrandum.

c *Ex 41. huius.*

PROPOSITIO CLXXXIV.



Iisdem positis, producta linea G H, occurrat C K lineæ in M, & A F producta lineæ L C in N.

Dico I M H rectangulũ esse ad rectangulum F N A, vt I G H rectangulum est ad rectangulum F G A.

Demonstratio.

a 6.secundi.

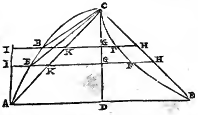
Ostensũ est præcedenti propositione, quadratum K C ad C L, eandem habere rationem quam D G quadratum ad quadratum G E, ac proinde, quã quadratũ D F ad E I, quadratum: sed quadratum K C hoc est D N æquatur D F quadrato, vnà cum a rectangulo F N A; similiter quadratum C L hoc est E M, æquale est quadrato E I, vnà cum rectangulo I M H; cùm igitur sit quadratum E M ad D N, sicut quadratum E I ad D F, rectangulum quoque I M H est ad rectangulum F N A, vt quadratum E I ad D F quadratum, hoc est per præcedentem vt rectangulum I G H ad F G A rectangulum. quod oportuit demonstrare.

PROPOSITIO CLXXXV.

Esto A B C parabolæ axis C D, æqualis lateri recto, actaque per D ordinatim linea D A, producatur in E, vt A D, D E lineæ æquales sint iunganturque A C, E C: dein per C & E parabola describatur C F E, habens verticem in C & contingentem C D; ducanturq; B G parallelę A D, occurrentes parabolis in B & F, & iungantur B C.

Dico esse vt quadratum B C, ad quadratum B C, sic K F lineam ad lineam K F.

Demonstratio.



b 41.huius.

c 67.huius.

Erigatur ex A diameter A I occurrens B G lineis in I. quadratum C B æquale est quadratis B G, C G: est autem b quadratum B G æquale rectangulo K G I, & quadrato C G c siue G H, (cùm C D, D E adeoque & C G, G H lineæ æquentur) æquale est rectãgulum F G I; quadratum igitur B C æquale est rectangulis F G I, K G I; hoc est rectangulo I G K F: sed I G K F rectangulum est ad rectangulum I G K F, vt F K linea ad lineam K F; quadratum igitur C B est ad quadratum C B, vt K F linea est ad lineam K F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXXVI.

Iisdem positis:

Dico F G ad G B, triplicatam habere rationem eius quam habet G B ad A D.

Demon-

Demonstratio.

QVoniam tam AD, a BG, KG, quàm DE, b GH, GF proportionales sunt, & AD prima, æqualis primæ DE, ratio KG ad GF, c duplicata est rationis BG ad GH, id est BG ad KG, cùm enim AD, DC d lineæ æquales sint, æquantur etiam KG, GC. est autem ratio FG ad GB, composita ex ratione FG ad GK, id est ex duplicata ratione KG ad GB, hoc est BG ad AD, (cùm AD, BG, KG, proportionales sint) & ex ratione KG ad GB id est iterum BG ad AD, igitur FG ad GB, triplicatam habet eius quam habet GB linea ad lineam AD. Quod fuit demonstrandum.

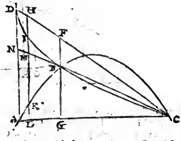
a 42. huius. b 67. huius. c 26. De progressionibus. d 9. huius.

PROPOSITIO CLXXXVII.

INtersecent iterum sese parabolæ duæ ABC, CBD in punctis B, C, habentes communes diametros FG, HKL, DA quas in M & N, secet recta CB.

Dico IM ad MK eandem habere rationem quam habet DN ad NA.

Demonstratio.



VT DHC rectangulum est ad rectangulum DFC, sic ALC ad AGC, rectangulum. sed vt DHC ad DFC, sic HI e ad FB, & vt ALC ad AGC, sic LK linea est ad GB lineam; igitur vt HI ad FB, sic KL ad BG: & permutando conuertendo vt FB ad BG, sic HI ad KL. est autem vt FB ad BG, sic HM ad ML; igitur vt HI ad KL, sic HM ad ML: vnde & IM f est ad MK, vt HM ad ML, id est DN ad NA. Quod fuit demonstrandum.

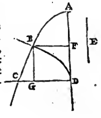
e 47 huius. f 19. quinti.

PROPOSITIO CLXXXVIII.

ESto ABC parabolæ diameter AD quam in D secet ordinatim linea DC: dein per D parabola describatur DB, habens AD contingentem & diametrum DC & commune cum altera sectione latus rectum E. occurrat autem DB parabola, parabolæ ABC in B, & ordinatim ducatur linea BF.

Dico AF lineam ad lineam FB, rationem habere duplicatam eius quam habet FB ad FD.

Demonstratio.



POnatur BG æquidistans AD. Quoniam igitur E latus rectum vtrique sectioni commune est, & FB, BG ordinatim positæ, erunt tam E, FB, AF lineæ, quàm E, BG, id est FD, & DG proportionales. vnde cùm E prima sit communis, ratio g AF ad DG, id est ad FB, duplicata est rationis FB ad BG id est ad FD. Quod fuit demonstrandum.

g 27. De progressionibus.

 Corolla-

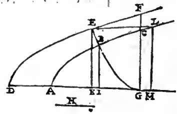
Corollarium.

HInc ſequitur AF ad FD, rationem triplicatam eius eſſe rationis, quæ eſt inter AF & FD. eſt enim ratio AF ad FD, compoſita ex ratione AF ad FB. hoc eſt duplicata BF ad FD, & ex ratione BF ad FD: hoc eſt triplicata AF ad FD.

PROPOSITIO CLXXXIX.

HAbeant ABC, DEF parabolæ ad eundem axem conſtitutæ, commune latus rectum H. aſſumptoq; in axe puncto quouis G, ex eo ordinatim ducatur linea GCF, deſcribaturq; per G parabola, habens axem GC, occurrens parabolis ABC, DEF in B & E punctis; ex quibus ordinatim demittantur lineæ BI, EK.

Dico rationem IA ad KD, quadruplicatam eſſe rationis GI ad GK.



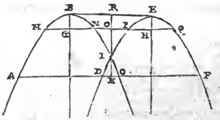
Demonſtratio.

DVctâ enim ex E linea EL parallelâ GD, occurrente ABC parabolæ in L, demittatur ex L ad diametrum GD, ordinatim linea LM: erit igitur quadratum LM æquale quadrato EK, vnde & rectangulum ſub H & MA, æquale eſt rectangulo ſub H & KD, adeoque & MA linea æqualis KD. eſt igitur ratio IA ad KD, ſiue ad MA, duplicata rationis IB ad LM, ſiue ad EK. eſt autem ratio IB ad EK, duplicata rationis GI ad GK: ratio igitur IA ad KD, quadruplicata eſt rationis eius, quam habet GI ad GK. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXC.

INterſecent ſeſe inuicem in I parabolæ duæ ABC, DEF parallelos habentes axes BG, EH. actaque per I diametro, ducantur ordinatim rectæ MQ, AF.

Dico NOM rectangulum eſſe ad rectangulum POQ, vt CKA rectangulum ad rectangulum DKF.



Demonſtratio.

VT IO eſt ad IK, ſic NOM rectãgulum ᵃ eſt ad rectangulum CKA; ſed vt IO ad IK, ſic QOP rectangulum eſt ad rectangulum DKF. igitur vt NOM rectangulum ad rectangulum CKA, ſic QOP rectangulum eſt ad rectangulũ DKF. & permutando, NOM eſt ad rectangulum QOP vt rectangulum CKA ad rectangulum DKF. Quod fuit demonſtrandum.

ᵃ Ex 14. huius.

PROPOSITIO CXCI.

Iisdem positis: si A B C, D E F parabolæ eandem habuerint altitudinem & communem contingentem B E.

Dico N O M rectangulum esse ad rectangulum P O Q, vt B R quadratum ad quadratum R E.

Demonstratio.

VT linea R I ad lineam O I, sic B R quadratum ad rectangulum N O M: & vt R I ad O I, sic R E quadratum ad rectangulum Q O P; igitur vt B R quadratum ad N O M rectangulum sic quadratum R E ad rectangulum P O Q, & permutando vt quadratum B R ad quadratum R E, sic N O M rectangulum ad rectangulum Q O P. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

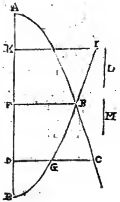
Hinc patet etiam rectangulum A K C esse ad rectangulum D K F, vt B R quadratum ad quadratum R E.

PROPOSITIO CXCII.

ESto A B C parabolæ axis A D ductaque ordinatim C D, sumatur in axe quæuis recta D E, & per E describatur parabola cuius axis sit E A, secans parabolam A B C in B, & C D lineam in G. factaq; A K æquali D E; ducantur K I ordinatim ad A E in parabola E G B, & B F ordinatim ad A B C.

Dico C D quadratum esse ad quadratum I K, vt E F linea ad F A.

Demonstratio.



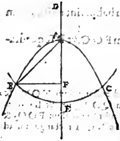
SIt A B C parabolæ latus rectum L, & parabolæ E G B latus rectum M. quadratum C D æquale est rectangulo D A L: & quadratum I K æquale rectangulo K E M, est autem A D linea æqualis K E, quia A K, E D æquales ponuntur: quadratum igitur C D est ad I K quadratum, vt L ad M. Rursum quia quadrato B F tam est æquale rectangulum F A L quàm F E M: rectangula quoque F A L, F E M æqualia sunt. igitur vt A F ad F E, sic M ad L. sed vt M ad L, sic I K quadratum est ad C D quadratum, igitur vt A F ad F E, sic I K quadratum est ad quadratum C D.

PROPOSITIO CXCIII.

SIt A B C parabolæ axis A D æqualis lateri recto centroque A interuallo quouis, circulus describatur occurrens parabolæ in B, C; axi in E, ponaturque ad axem ordinatim B F.

Dico D F, A E, A F lineas continuè esse proportionales.

 Demon-



Demonſtratio.

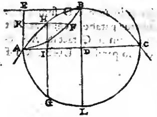
a 34 huius.

RECta AE æqualis eſt AB: ſed AF, a AB, DF proportionales ſunt, igitur & AF, AE, DF eandem continuant rationem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXCIV.

SIt ad ABC parabolæ axem BD, ordinatim applicata AC, actâque per B contingente BE, quæ erectæ ex A diametro, occurrat in E, deſcribatur per AB parabola AFB, cuius axis AE, centroq́; D interuallo AD, circulus deſcribatur AGC, quem in G, ſecet recta quædam HG, æquidiſtans axi BD, occurrenſq́; ABC parabolæ in H, & AC lineæ in I: denique per H ponatur KF parallela EB, occurrens AFB parabolæ in F & AE in K.

Dico GI, FK lineas eſſe inter ſe æquales.



Demonſtratio.

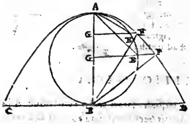
b 47. huius.

PRoducta BD, occurrat circulo in L: vt AK ad AE, id eſt HI ad BD; ſic FK quadratum eſt ad quadratum BE: ſed etiam vt HI ad BD, ſic b AIC rectangulum eſt ad rectangulum ADC, id eſt IG quadratum ad quadratum DL; igitur vt quadratum FK ad quadratum BE, ſic IG quadratum ad quadratum DL, id eſt AD, id eſt EB, quare IG, FK, quadrata adeoque & lineæ inter ſe æquantur.

PROPOSITIO CXCV.

SVper ABC parabolæ axe AB æquali lateri recto, circulus deſcribatur AEB, quem in E ſecent vtcunque ordinatim poſitę GF, ad axem parabolæ, iunganturque AE.

Dico AE, GF lineas æquari.



Demonſtratio.

QVoniam AB, lateri recto æqualis eſt, quadratum FG æquatur rectangulo GAB, ſed & GAB rectangulo æquale quoque eſt quadratum AE, quia AGE angulus rectus eſt, quadrata igitur AE, FG adeoque & lineæ inter ſe æquantur. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXCVI.

Iſdem poſitis, iungantur F B.
Dico F B quadratum æquari quadratis A G, G E, G B ſimul ſumptis.

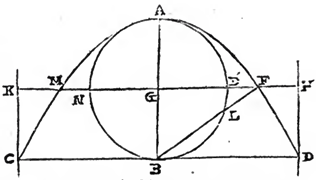
Demonſtratio.

QVadratum F B, æquale eſt quadratis B G, G F. ſed F G quadratum æquale eſt quadrato A E, id eſt quadratis A G, G E, quadratum igitur F B æquale eſt quadratis A G, G E, G B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXCVII.

Iſdem poſitis: occurrat F G linea diametris D H, C K. in H & K.
Dico H F K rectangulum æquari rectangulo A B G.

Demonſtratio.



QVadratum H G æquale eſt quadrato F G, vnà cum rectangulo H F K; eſt autem quadrato H G ſiue B D, æquale [a] quadratum A B, (cùm A B æqualis ponatur lateri recto) igitur & quadratum A B, æquale eſt quadrato F G vna cũ rectangulo H F K. ſed A B quadratum quoque eſt æquale rectangulis G A B, G B A, id eſt [b] quadrato G F vnà cum rectangulo G B A, quadratum igitur F G vnà cum rectangulo G B A, æquale eſt quadrato F G cum rectangulo H F K: dempto igitur communi quadrato F G, reſidua rectangula A B G, H F K ſunt inter ſe æqualia. Quod erat demonſtrandum.

[a] 91 huius.

[b] Ex 195. huius.

Corollarium.

EX dictis patet F E M rectangulum æquari quadrato A G. nam F E M rectangulum vnà cum quadrato E G, æquatur quadrato F G, id eſt A E, id eſt quadratis A G, G E: dempto igitur communi quadrato G E, manet F E M rectangulum æquale quadrato A G.

PROPOSITIO CXCVIII.

Iſdem poſitis: occurrat F B, circulo in L.
Dico B F L rectangulo, æquari quadratum A G.

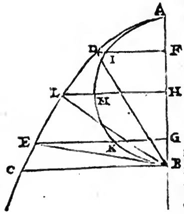
Demonſtratio.

BF L rectangulum æquale eſt rectangulo N F E, id eſt M E F. ſed [c] M E F rectangulo æquale eſt quadratum A G; igitur & rectangulo B F L æquale eſt quadratum A G. Quod erat demonſtrandum.

[c] Coroll. præcedens.

PRO-

PROPOSITIO CXCIX.



SIt A B axis parabolæ A B C lateri recto, sumptisq; A F, B G æqualibus, ponantur ordinatim ad axem rectæ F D, G E.

Dico iunctas B D, B E esse inter se æquales.

Demonstratio.

SVper A B describatur circulus occurrens F D, G E lineis in I & K. quoniam A F, B G lineę æquales sunt, & F I, G K normales ad axem A B, rectæ F I, G K, item A G, B F inter se æquales sunt: est autem quadratum B D æquale [a] quadratis A F, F I, F B; & B E quadratum æquale quadratis B G, G K, G A; quadratum igitur B D æquale est quadrato B E, & B D linea æqualis B E. Quod erat demonstrandum.

a 196. huius.

PROPOSITIO CC.

IIsdem positis, ducatur ex H centro circuli A I B, recta H M L, parallela F D; iunganturque B L.

Dico B L lineam breuissimam esse omnium quæ ex B ad peripheriam parabolæ duci possunt.

Demonstratio.

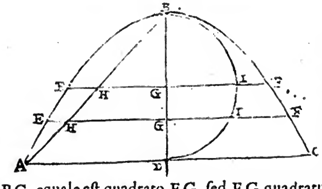
POnatur quęuis alia B D, & ordinatim D F; erit igitur quadratum B L, æquale quadratis A H, H M, H B: & B D quadratum æquale quadratis A F, F I, F B; quia verò A H, H M, H B semidiametri sunt, quadrata illarum minora sunt quadratis A F, F I, F B (vt facile ex elementis ostenditur) igitur & quadratum B L minus est quadrato B D. & B D linea omnium breuissima, quę ex B ad peripheriam duci possunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCI.

ESto super A B C parabolę axi B D æquali lateri recto descriptus semicirculus B I D, quem in I secent quæcunque ordinatim ad axem positę F G E, actaq; per D ordinatim A C, ducatur A B, occurrens E F lineis in H.

Dico rectangulo F H E æquari G I quadratum.

Demonstratio.



QVoniam axis B D æqualis ponitur lateri recto, & A D ordinatim applicata, rectæ A D, [b] B D adeoque & H G, G B inter se æquales sunt. quia verò E F linea in G diuisa est bifariam & non bifariam in H, rectangulum E H F vnà cum [c] quadrato H G, id est B G, ęquale est quadrato E G. sed E G quadratum est æquale rectangulo [d] G B D, id

b 9. huius.

c Ex elementis.

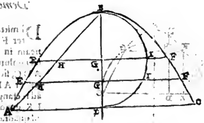
d Ex 8. huius.

id est quadrato B G vnà cum rectangulo B G D; igitur quadratum B G vnà cum rectangulo B G D æquatur E H F rectangulo vnà quadrato H G, cum id est B G; dempto igitur communi quadrato B G, manet E H F rectangulum æquale rectangulo B G D, id est quadrato G I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCII.

Iisdem positis.
Dico F I, G H, I E lineas proportionales esse.

Demonstratio.



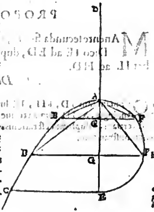
Quoniam E F linea diuisa est bifariam in G & non bifariam in I, rectangulum F I E vnà cum quadrato I G, id est vnà cum rectangulo B G D, æquale est quadrato G F, id est [a] rectangulo G B D id est quadrato B G vnà cum rectangulo B G D id est cum quadrato G I; dempto igitur communi quadrato I G, manet F I E rectangulum æquale quadrato B G id est quadrato H G. proportionales itaque sunt F I, G H, I E. Quod erat demonstrandum. a *Ibid.*

PROPOSITIO CCIII.

Esto super A B C parabolæ axe A C æquali lateri recto descriptus semicirculus A F E, sumptaque A D æquali A E, ducatur ordinatim quæuis B F secans axem A E in G, occurrens circulo in F iunganturque A B, A F.

Dico D G ad D A, rationem habere duplicatam eius quam habet A B ad A F.

Demonstratio.



Quoniam A F quadratum æquale est quadratis F G, A G id est rectangulo D A G rectæ A G, A F, D A continuæ sunt proportionales: sed & A G, A B, G D sunt in [b] continua ratione; igitur cum A G prima vtrique seriei communis sit, D G ad D A, tertia ad tertiam, in duplicata est ratione [c] A B ad A F, secundæ ad secundam. Quod erat demonstrandum.

b *34. huius.*

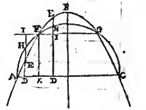
c *27. De progressionibus.*

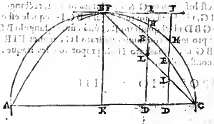
PROPOSITIO CCIV.

PArabolam ABC subtendat recta AC normalis ad diametrum ED; super AC verò vt axe describatur semiellipsis vel semicirculus AF, GC occurrens parabolæ in F & G, vel eandem contingens in B; ducaturque FI parallela ipsi AC, & ID lineæ ponantur æquidistantes ED, occurrentes parabolæ in E, ellipsi vel semicirculo in H, FI lineæ in I, & ipsi AC in D.

Dico DE, DH, DI lineas esse continuè proportionales.

Demonstratio.





a 47. huius.

DEmittatur ex F diameter FK, secans AC lineam in K. vt AKC rectangulum ad rectangulum ADC, sic FK est ad a ED: sed vt AKC rectangulum ad rectangulum ADC, sic FK quadratum quoque est ad quadratum HD, igitur vt FK linea est ad lineam ED, sic quadratum FK est ad quadratum HD; recta igitur FK, id est ID, ad ED, duplicatam habet rationem eius, quam habet ID ad HD: quare DE, DH, DI lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCV.

MAnente secunda figura, ducatur BC, occurrens ID lineis in L L; Dico IE ad ED, duplicatam habere rationem eius quam habet IL ad HD.

Demonstratio.

b 67. huius. c 104. huius. d 17. De progressionibus.

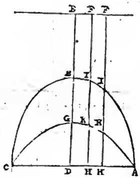
QVoniam tam ID, b IL, IE lineæ, quàm ID; c HD, ED in continua sunt analogia, & ID prima vtrique seriei est communis, ratio IE ad ED, tertiæ ad tertiam, d duplicata est rationis IL ad HD, secundæ ad secundam. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CCVI.

SInt ABC ellipseos vel circuli diametri coniugatæ AC, BD; ductaque quauis EF parallela AC, secante BD productam in E, fiant ED, BD, GD continuę proportionales; descriptaque per AGC puncta, parabolâ, cuius diameter GD, ponantur lineæ quotcunque FH parallelæ ED, secantes ellipsim in I, parabolam in K, & AC lineam in H.

Dico FH, IH, KH lineas esse proportionales.



Demonstratio.

VT AHC rectangulum ad rectangulum ADC, sic HK linea ad lineam DG, & IH quadratum ad quadratum BD; igitur HK linea ad lineam DG duplicatã habet rationem eius, quam habet IH linea ad lineam BD. vnde cùm ED, BD, GD positione sint proportionales, & ED, FH primę inter se æquales, sit autem & ratio DG ad KH, tertię ad tertiam; duplicata rationis DB ad HI, secundæ ad secundam, erunt a FH, IH, KH in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

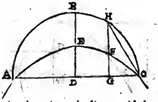
a Ex conuersa 27. De progressionibus.

PROPOSITIO CCVII.

IN semicirculo ABC decussent sese orthogonaliter in D diametri duæ AC, BD, quarum alterâ BD bifariam in E diuisâ, describatur per A, E, C parabola, cuius axis ED, ductaque diametro FG, quæ semicirculo occurrat in H; ponatur HC.

Dico FG ad GC duplicatam habere rationem eius, quam habet HG ad HC.

Demonstratio.



QVoniam AC dupla est BD, & illa dupla ED, rectæ AC, BD, ED proportionales sunt, est autem ED ad FG, in duplicata ratione DB ad GH, cùm sit vt ADC rectangulum ad rectangulum AGC, id est BD quadratum ad quadratum HG; rectæ igitur GF, b HG, AC in continua sunt analogia, sed & AC, HC, GC c lineæ proportionales sunt; igitur FG ad GC, tertia ad tertiam, duplicatam d habet rationem eius, quam habet HG ad HC, secunda ad secundam. Quod erat demonstrandum.

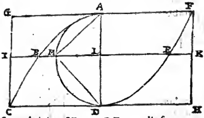
b Ex conuersa 27. de progressionibus.
c Ex elementis.
d 27. De progressionibus.

PROPOSITIO CCVIII.

PArabolas æquales ABC, DEF inuersè ad eundem axem AD, qui æqualis sit lateri recto constitutas, contingant in A & D, lineæ GF,

HC: & GF quidem parabolæ DEF, occurrat in F, HC verò parabolæ ABC in C; erectisque ex C & F, diametris quæ FG, CH lineis occurrant in G, & H, ducatur quævis IK, parallela FG, secans parabolas in B & E, rectas CG, HF in I & K, axem AD in L. dein super AD vt diametro, describatur semicirculus AMD, occurrens IK lineæ in M.

Dico ILM rectangulum æquari rectangulo ELB.



Demonstratio.

Qvoniam AD æqualis est lateri recto, lineæ AD, CD, item AM, LB, item MD, LB æquales sunt. rectangulum igitur AMD æquale est rectangulo ELB: sed & AMD rectangulo quoque est æquale rectangulum ADML, id est ILM: rectangula igitur ILM, BLE æqualia sunt.

PROPOSITIO CCIX.

Iisdem positis:

Dico rectangulum ILBM æquari rectangulo BLEK.

Demonstratio.

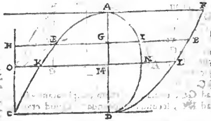
a Per elementa. b Ex elementis.

Qvoniam ILM rectangulum æquale est rectangulo ELB, vt IL ad a LE, id est LK ad LE, sic LB est ad LM: & permutando vt LK ad LB, sic EL est ad LM: & EK reliquum ad MB, vt LK ad LB, id est IL ad LB: b rectangulum igitur ILBM æquale est rectangulo BLEK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCX.

Iisdem positis quæ priùs: fiat BGE rectangulo æquale rectangulum HGI: & per A, I, D puncta ellipsis describatur, cuius axis sit AD. ducaturque recta quævis LK parallela BE, occurrens parabolis in K & L, axi AD in M, ellipsi in N, diametro CH in O.

Dico KML rectangulum æquari rectangulo OMN.



Demonstratio.

c 4. De ellipsi. d Ex 1. sexti. e Ex elementis. f 1. huius.

Qvoniam AD axis est ellipseos, & ad illam ordinatim ponuntur IG, MN, vt IG c quadratum ad quadratum NM, sic AGD rectangulum est ad rectangulum AMD: rectangulū igitur AGD ad AMD rectangulum, rationem habet duplicatam, IG ad NM, id est rectanguli HGI ad d rectangulum OMN: & quia ratio rectanguli AGD, ad AMD rectangulum, composita est ex ratione AG ad e AM, id est ex duplicata f ratione BG ad KM, & ex GD ad MD, id est ex duplicata ratione GB ad ML, ratio AGD rectanguli ad AMD rectangulum quoque duplicata est eius, quam habet BGE rectangulum ad rectan-

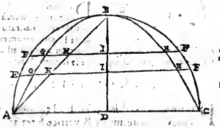
rectangulum KML. igitur vt HGI rectangulum, ad rectangulum OMN, sic BGE rectangulum ad rectangulum KML: & permutando vt HGI rectangulum ad rectangulum BGE, sic OMN rectangulum est ad rectangulum KML; sed HGI, BGE rectangula per hypothesim æqualia sunt, igitur & OMN, KML rectangula inter se æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXI.

SEcent ABC semicirculum orthogonaliter diametri duæ AC, BD: descriptâq; per A, B, C, parabolâ, cuius axis BD, ducantur rectæ quotcunque EF, parallelæ AC, occurrentes circulo in E & F, parabolę in G & H, axi verò in I.

Dico EGF rectangulum esse ad rectangulum EGF, vt BID rectangulum ad rectangulum BID.

Demonstratio.



POnatur AB, secãs EF lineas in K. vt BKA rectangulũ ad rectangulum BKA, sic EKF ᵃ rectangulum est ad rectangulum EKF. sed vt BKA rectangulum ad rectangulum BKA, sic GKH ᵇ rectangulũ est ad rectangulum GKH: igitur vt EKF rectangulum est ad rectangulum EKF; sic GKH rectangulum est ad rectangulum GKH. residuum igitur EGF rectangulum, est ad rectangulum EGF, vt EKF rectangulum ad rectangulum EKF, id est rectangulum BKA ad rectangulum BKA, id est rectangulum BID ad rectangulum BID. Quod erat demonstrandum.

a Ex 35. tertij.

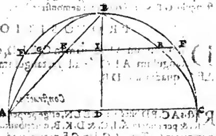
b 49. huius.

PROPOSITIO CCXII.

SEcent ABC semicirculum orthogonaliter diametri duæ AC, BD: descriptaq; per A & B parabolâ cuius axis BD, describatur & altera per B & C, habens axem DC & verticẽ C ducaturq; linea EF parallela AC occurrens circulo in E & F, parabolis in G, & H, axi BD in I, & AB iuncta in K.

Dico EI quadratũ esse ad quadratũ GI, vt IH linea est ad lineam IK.

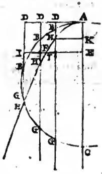
Demonstratio.



QVoniam tam AD, ᶜ GI, KI lineæ, quàm DC, FI, HI proportionales sunt, & AD, CD vtriusque seriei primæ æquales, ratio HI ad IK, tertiæ ad tertiam, duplicata est rationis FI ad IG, id est EI ad IG secundæ ad secundam. igitur vt HI linea ad lineam IK, sic EI quadratum ad quadratum GI. Quod erat demonstrandum.

c 42. huius.

PROPOSITIO CCXIII.



SEmicirculum A B C, cuius diameter A C, contingat in A linea A D; descriptâque per A parabolâ, cuius axis A C, & contingens A D, sumatur A E æqualis lateri recto; actâque per E ordinatim E F, ducatur in parabola diameter quæcunq; D G occurrens circulo in B & G, parabolæ in H, & F E ordinatim positæ in I.

Dico B D G rectangulum, æquari rectangulo H D I.

Demonstratio.

DVcatur per H ordinatim linea H K: Quoniam A D linea in A circulũ contingit, rectangulum B D G æquale est [a] quadrato A D, id est quadrato H K; sed & H K quadratum est æquale [b] rectangulo K A E, id est H D I (quia A E per hypothesim æqualis est lateri recto) rectangulum igitur B D G æquale est rectangulo H D I. Quod erat demonstrandum.

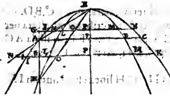
a Ex elementis.
b Ex 8. huius.

PROPOSITIO CCXIV.

PArabolas duas A B C, D B E ad eundem axem B F positas, & contingentes sese interius in B vertice secet in H & A diameter quæcunque G H, iunctisque A B, H B ducatur ordinatim linea I K, secans parabolas in, I K, L, & M, rectas A B, H B, A H in G, N, O, & axem B F in P.

Dico I L K rectangulum æquari rectangulo G P N O.

Demonstratio.



REctangulum G P N æquale est [c] quadrato I P. sed I P quadratum est æquale quadrato L P, id est [d] rectangulo G P O, [e] vnà cum rectangulo I L K rectangulum igitur G P N æquale est rectangulis G P O, I L K: est autem G P M rectangulum, æquale rectangulis G P O, [f] G P N O, dempto igitur communi rectangulo G P O, manet I L K rectangulum æquale rectangulo G P N O. Quod erat demonstrandum.

c 42. huius.
d Ibid.
e Ex elementis.
f Ex elementis.

PROPOSITIO CCXV.

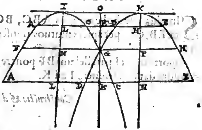
DAtam lineam A B diuisam in C, E, I, D, denuo ita partiri in E vt rectangulum A E C sit ad rectangulum B E D sicut quadratum A E C quadratum D B.

Constructio.

REctis A C, B D bisectis in L E L N, erige perpendiculares L I, N K æquales inter se, & per puncta A, I, C, & D, K, B, describantur parabolæ N K, sibi mutuo occurrentes in G. Tum ex G duæ G E normales ad A B. Dico factum.

De-

Demonstratio.



Iunge puncta I, K, & E G produ- ctam in O. per F duc F M P H paral- lelam ad K B & I K. Quoniam tam I L, O E, K N, quàm I K, F H sunt parallelę, erit quadratū I O ad qua- dratum O K vt quadratum M G ad P G quadratum hoc est vt F G quadratum ad G H quadratum. de- inde a A C quadratum est ad qua- dratum F G vt L I ad M I, hoc est vt N K ad P K; hoc est vt quadra- tum D B ad quadratum G H. ergo permutatim A C quadratum est ad quadratum D B, vt quadratum F G ad quadratum G H, hoc est (sicur antè ostendi) vt quadra- tum I O ad quadratum O K. Atqui b rectangulum A E C est ad rectangulū B E D vt quadratum I O ad quadratum O K, Ergo etiam rectangulum A E C est ad re- ctangulum B E D vt quadratum A C ad quadratum D B. Factum igitur est quod petebatur.

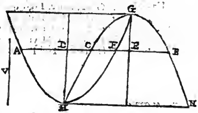
a 1. huius.

b 191. huius & illius Corollarium.

PROPOSITIO CCXVI.

Datam rectam A B diuisam in C, iterum secare in D, vt rectangū- lum B D C æquale sit quadrato D A.

Constructio & demonstratio.



Biseca C B in E, & fiat vt A E ad C E, ita C E ad F E. deinde A F etiam biseca in D. Dico factum quod petitur.

Ex punctis E ac D erige nor- males, quarum vna E G sit magni- tudinis placitę, altera D H infinita. Deinde per puncta C, G, B, descri- batur parabola axem habens E G & occurrens ipsi D H in H. Rursum per puncta A H F descripta intelli- gatur parabola axem habens D H. poterunt autem E G, D H axes esse parabolarum, cùm ambæ ex constru- ctione rectas C B; F A ad angulos rectos bifariam secent. Quoniam igitur ex constructione A E, C E, F E sunt con- tinuæ; colligitur ex 167. huius parabolam A H F transire per G verticem alterius parabolę. Ergo per eandem illam propositionem B D, F D, C D sunt continuæ. sed F D, A D æquales sunt ex constructione, ergo B D, D A, C D sunt continuæ, er- go rectangulum B D C æquatur quadrato D A. Quod erat faciendum.

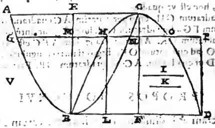
P R O-

PROPOSITIO CCXVII.

SInt duæ parabolæ æquales ABC, BCD ad axes parallelos constitutæ EB, CF, per apices mutuos transeuntes, ex B sit ordinatim ducta BF.

Oporteat GH parallelam BF ponere, quę diuidatur à recta BE, x secundùm datam rationem I ad K.

Constructio & demonstratio.



DIuidatur BD linea secundùm rationem quadrati I, ad K quadratum, in puncto L: erigatur deinde LH, quæ æquidistet axi CF, occurratq; sectioni in H. & per H ponatur GH parallela BD, secans BE in puncto M. Dico rectam GH esse sectam in M, secundùm rationem I ad K; erigatur ex D parallela ad FE occurrens ipsi GO in P. Quoniam rectangulum HMO æquatur a quadrato MN, erunt MH, MN, MO continuæ. Ergo quadratum MH ad quadratum MN, vt MH ad MO, hoc est vt MH ad HP, hoc est vt BL ad LD, hoc est vt quadratum K ad quadratum I; sed quadratum MN æquatur quadrato GM; ergo quadratum MH est ad quadratum GM vt quadratum K ad I. & inuertendo ergo GM est ad rectam MH vt recta I ad K. posuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

a 167. huius.

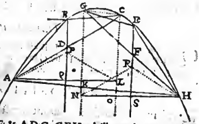
PARABOLÆ
PARS QVINTA

Sæpius parabolam quadrat.

PROPOSITIO CCXVIII.

SEcent ABC parabolam diametri duæ æquales BD, EF: positisque per D & F, ordinatim lineis AC, GH, iungantur ABC, GEH. Dico ABC, GEH triangula esse inter se æqualia.

Demonstratio.

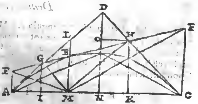


IVnctis, G, C; ponatur AH linea, quam in K & I secent demissæ ex G & C diametri: illas autem secent orthogonaliter in L, M, N, O rectæ AML, HON: & AL quidem occurrat BD lineę in Q, HN verò ipsi EF in S; factisque PQ, SR æqualibus, ipsis BD, EF, iungantur APL, HRN. quoniam igitur æquales sunt diametri BD, EF; & ADC, GFH ad illas ordinatim positæ, iunctę [a] CG, AH siue IK æquidistant: sed & GK, CI diametri parallelę sunt, parallelogrammum igitur est GCIK, & GK, CI lineæ æquales, est autem vt GK ad IC sic AKH rectangulum ad [b] rectangulum AIH, rectangula igitur AKH, AIH æqualia sunt; ideoque & [c] æquales lineę AK, HI. quia verò est vt AK ad KI, sic AM ad ML, & vt HI ad IK, sic HO ad ON, igitur vt AM ad ML, sic HO ad ON: æquales autem sunt lineæ NO, ML (quia AML, HON orthogonales sunt ex constructione, ad GM, GL, æquidistantes, adeoque MO parallelogrammum est) rectæ igitur AM, HO, adeoque totæ AL, HN æquales sunt: sed & PQ, RS per constructionem æquales sunt, triangula igitur APL, NRH id est ABC, GEH æqualia sunt, Quod erat demonstrandum.

Est hęc Archimedis, aliter demonstrata.

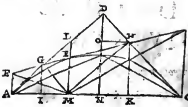
a Ex Coroll. 17. huius.
b 47. huius.
c Ex elementis.

PROPOSITIO CCXIX.



PArabolam ABC, contingant duæ quæuis AD, CD conuenientes in D. secetque illas in G & H recta quædam EF, contingens quoque parabolam in B occurrens AE, CF diametris in E & F; demittantur autem ex G & H diametri GI, HK, occurrentes AC in I & K. Dico rectam IK, dimidium esse AC.

Demon-



Demonstratio.

a 18. huius.

QVoniam AG, BG sectionem contingunt, recta EG [a] aequalis est GB: similiter & BH aequalis HF. GH igitur dimidium est totius EF. sed cum AE, CF, GI, HK aequidistent, erit AC in I & K, diuisa, vt EF diuisa est in G & H; igitur & IK dimidium est AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXX.

IIsdem positis, ponatur per B diameter LM.
Dico esse vt GB ad BH, sic LB ad BM.

Demonstratio.

b 94 huius.

QVoniam AL est contingens, LB est ad BM, vt [b] AM ad MC, hoc est EB ad BF: sed vt EB ad BF, sic GB est ad BH, igitur vt GB ad BH, sic LB est ad BM. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXI.

EAdem manente figura, ducantur rectae MG, MH.
Dico MD esse parallelogrammum.

Demonstratio.

c Ex elementis.
d Ex elementis.

ESt enim vt HB ad BG, sic MB ad BL; per praecedentem & permutando vt HB ad MB, sic GB ad BL: sunt autem anguli ad B lateribus proportionalibus contenti aequales, triangula igitur MBH, GBL [c] similia sunt: & MH [d] parallela GL: eodem modo si KH producatur donec cum AD conueniat, ostenditur GM, aequidistare ipsi DH: parallelogrammum igitur est DM. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXII.

EAdem manente figura, ducantur AB, BC.
Dico triangulum ABC aequale esse parallelogrammo MD.

Demonstratio.

k Ex 119. huius.

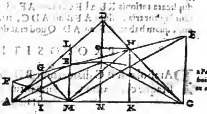
ESt enim BEM triangulum triangulo ABM aequale, similiter triangulum BFM aequale BMC triangulo; igitur totum triangulum EMF toti triangulo ABC est aequale. est autem EMF triangulum duplum trianguli GMH, (quia basis EF dupla [k] est baseos GH.) igitur MD parallelogrammo aequale est triangulum ABC, Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXIII.

EAdem manente figura, demittatur ex D diameter DN.
Dico lineas GI, HK simul sumptas, aequari rectae DN:

Demon-

Demonstratio.



DVcatur H O parallela A C, occurrens N D lineæ in O. Quoniam I M, G I, æquidistant lineis D O, H O: est autem & G M [a] æqualis & parallela D H; triangula I G M, D O H, adeoque & latera D O, G I æqualia sunt: est autem H K æqualis O N. Igitur G I, H K simul sumptæ, sunt æquales lineæ D N.

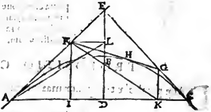
[a] Per 131. huius & ex elemētis.

PROPOSITIO CCXXIV.

SIt ad A B C parabolæ axem B D ordinatim ducta A C, actæque per A & C, contingentes conueniant in E: ponatur autem & F G contingens in B, quæ A C, C E lineas secet in F & G, tum rectæ demittantur F I, G K, axi æquidistantes.

Dico trapezium F I K G, æquale esse triangulo A E D.

Demonstratio.



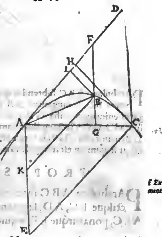
POnatur F L parallela A C, iunganturque L A, F K. Quoniam F L æquidistat A C, & I K est [b] æqualis A D, dimidio [c] scilicet A C, triangula A L D, I F K æqualia sunt. Rursum cùm in triangulis F K G, A E L, tam bases [d] K G, E L, quàm altitudines [e] I K, A D æquales sint, triangula quoque F K G, A E L sunt inter se æqualia: trapezium igitur F I K G æquale est triangulo A E D. Quod erat demonstrandum.

[b] 119. huius
[c] Ex 18. huius.
[d] Ex 123. huius.
[e] 119. huius

PROPOSITIO CCXXV.

PArabolam A B C subtendat A C quęcunque, ponatur autem per A contingens A D, coueniens cum C D diametro in D: ponatur quoque diameter quęuis B G, occurrēs A D lineæ in F, iunganturq; A B.

Dico triangulum A F B ad triangulum A D C triplicatam habere rationem lineæ A F ad A D.



Demonstratio.

DEmissa ex A diametro A E, ducantur lineæ B K, C E parallelæ contingenti A D; & ex C, & B rectę C H, B I normales ipsi A D. ratio A F B trianguli ad triangulum A D C composita est ex ratione A F ad A D, & ex [f] ratione I B ad H C: sed vt I B ad H C, sic F B ad C D, id est A K ad A E: igitur ratio trianguli A F B ad A D C triangulum composita est ex ratione A F ad A D, & ex ratione A K ad A E: est autē ratio A K ad A E,

[f] Ex elementis.

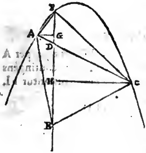
 dupli-

duplicata rationis KB ad EC, id est AF ad AD; (quia FK, DE parallelogramma sunt) igitur triangulum AFB ad ADC, triangulum; triplicatam habet rationem eius, quam habet AF ad AD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXVI.

Parabolæ ABC diametrum BD, secet in D recta quæuis AC, positaque ordinatim CE, iungantur AB, BC.

Dico triangulum ABD ad BCE, triangulum, duplicatam habere rationem lineæ AD ad DC.



Demonstratio.

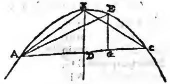
Ponantur ex A & C lineæ AG, CH normales ad diametrum BE. iunganturque AE. vt AD ad DC, sic a BD est ad BE: sed vt AD est ad DC, sic GD est ad DH, hoc est AG ad CH: igitur vt BD ad BE, sic AG est ad CH. est autem ratio trianguli ABD ad BCE triangulum, composita ex ratione BD ad BE, & AG ad CH; igitur ratio trianguli ABD ad BCE triangulum duplicata est rationis AD ad DC. Quod erat demonstrandum.

a Coroll. 59. huius.

PROPOSITIO CCXXVII.

Datæ parabolæ terminatæ maximum inscribere triangulum.

Constructio & demonstratio.



Parabolam ABC subtendat quæuis AC, quâ diuisâ bifariam in D, ponatur diameter BD. & iungantur AB, CB. Dico triangulum ABC esse quæsitum. erigatur enim quæuis alia GE, parallela BD diametro: Quoniam ADC rectangulum ad AGC b rectangulum eam rationem obtinet, quam DB à GE, igitur recta DB, maior est rectâ GE: ergo etiam triangulum ABC, maius triangulo AEC: igitur maximum est triangulorum ABC. Quod demonstrare oportuit.

b 47. huius.

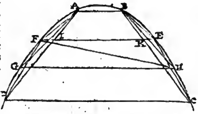
PROPOSITIO CCXXVIII.

Parabolam ABC intersecent duæ quæuis parallelæ AB, DC: iunctisque BC, AD, segmento CB triangulum inscribatur maximum AEC, ponaturque EF, æquidistans AB, & iungantur AFD;

Dico

Dico AFD triangulum, illorum esse maximum quæ AFD segmento inscribi possunt. & contra si triangula AFD, BEC fuerint maxima, dico FE æquidistare AB.

Demonstratio.

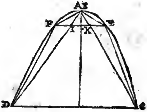


219. huius

QVoniam AB, CD, FE æquidistant, recta FI æquatur KE, adeoque triangula FAI, FID æqualia sunt triangulis, KBE, KEC: si igitur AFD triangulum non sit maximum, sit aliud AGD, maius triangulo AFD: positaque GH parallela AB, iungantur BHC: ostendetur vt priùs, triangulum BHC, æquari triangulo AGD: sed AGD maius est triangulo AFD, id est vt ostendi, BEC, triangulum igitur BHC maius quoque est triangulo BEC: quod est contra hypothesim. non igitur AGD triangulum maximum est, sed AFD. Quod erat primum.

Sint iam AFD, BEC triangula maxima, dico iunctam FE æquidistare AB: sin verò; ponatur FH æquidistans AB, iunganturque BHC: triangulum igitur BHC maximum est eorum quæ BEC segmento inscribi possunt, adeoque & maius BEC triangulo, quod absurdum: non igitur FH æquidistat AB, sed FE. Quod erat demonstrandum.

Quod si AB contingat parabolam, eadem inferri possunt quæ priùs, eademque prorsus est demonstratio.

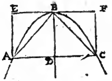


PROPOSITIO CCXXIX.

ESto ABC parabolæ inscriptum triangulum maximum ABC.

Dico illud maius esse dimidio parabolæ ABC.

Demonstratio.



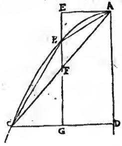
PErficiatur rectangulum ACF; manifestum igitur est EC parallelogrammum maius esse parabolâ ABC: igitur & ABC triangulum, dimidium scilicet parallelogrammi EC maius est dimidio parabolæ ABC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXX.

SIt ad ABC parabolæ diametrum AD, posita ordinatim CD; iunctâq; AC diuisâ in F bifariam, ponatur diameter BF iunganturque AB, CB.

Dico CAD triangulum quadruplum esse trianguli ABC.

Demonstratio.



AGatur per A contingens A E, occurrens B F lineæ in E, quæ producta secet D C in G. quoniam igitur æquidistant A E, C D, vt C F ad F A, sic G F est ad F E. ponitur autem A C in F bifariam diuisa, igitur & E F æqualis est F G & E A F triangulum æquale triangulo C F G: sed E A F triangulo æquale est triangulum C B A: igitur & C F G triangulum æquale est triangulo A B C, quia a E B, B F lineæ æquales sunt: est autem C A D quadruplum trianguli C F G quia A D dupla est F G & C D dupla C G, igitur & quadruplum erit trianguli A B C. Quod erat demonstrandum.

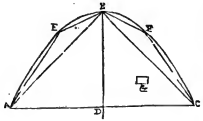
a Ex 17. huius.

PROPOSITIO CCXXXI.

ESto A B C parabolæ inscriptum triangulum maximum A B C: inscribantur autem & residuis segmentis triangula maxima: & hoc semper fiat.

Dico toti triangulorum seriei æqualem esse parabolam A B C.

Demonstratio.



SI enim non sit æqualis, maior igitur est vel minor. sit primùm parabola maior totâ triangulorum serie, & excessus ponatur quantitas G. quoniam igitur triangulum A B C maximum est illorum, quæ parabolæ inscribi possunt, maius b quoque illud erit dimidio parabolę cui inscriptum est. similiter triangula duo A E B, B F C maiora sunt dimidijs segmentorum quibus inscribuntur. quod cùm sine termino cnntinuari possit, relinquetur ex c parabola quantitas, datâ minor, ergo & minor quantitate G, ergo illa excessus non est, quo parabola triangulorum seriem excedit: ergo parabola maior non est totâ triangulorum serie.

b 129. huius.

c 1. decimi.

Quod verò neque minor illâ sit, manifestum est; cùm triangulorum series, ex hypothesi semper intra parabolam continuetur, ac proinde series illa quantumcunque aucta, plurium triangulorum additione, semper tamen pars maneat parabolæ: cùm igitur serie triangulorũ, nec maior, nec minor sit parabola, æqualis vt sit necesse est.

PROPOSITIO CCXXXII.

EAdem positâ figurâ:

Dico A B C parabolam ad triangulum maximum A B C eam habere proportionem quam quatuor ad tria.

Demonstratio.

TRiangulum d maximum A B C, quadruplum est triangulorum maximorũ A E B, B F C quæ residuis inscribuntur segmentis; & illa rursum simul sumpta, quadrupla triangulorum residuis segmentis inscriptorum, atque ita sine termino procedendo, cùm ablata semper quadrupla sint triangulorum, quæ residuis inscribuntur segmentis,

d Ex 130. huius.

gmentis, tota triangulorum series, id est [a] parabola ABC, [b] est ad triangulũ ABC, primum seriei terminum, vt quatuor ad tria. Quod fuit demonstrandum. a 231. huius. b 87. De progressionibus.

Corollarium primum.

Hinc manifestum est triangulum maximum ABC, triplum esse residuorum segmentorum AEB, BFC. cùm enim tota parabola, ad triangulum maximum inscriptum, sit vt quatuor ad tria; patet ipsum triangulum, tres quartas continere parabolæ; adeoque & residuorum esse triplum.

Corollarium secundum.

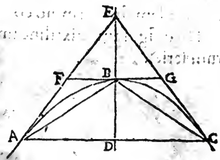
Sequitur secundò segmenta AEB, BFC esse inter se æqualia: triangula enim ABD, BDC singula singulorum tripla sunt, & inter se æqualia.

PROPOSITIO CCXXXIII.

Sit ad ABC parabolæ diametrum BD, ordinatim applicata AC, actisque per A & C contingentibus, quæ cum diametro BD conueniant in E, ponatur per B contingens, quæ AE, CE lineis occurrat in F & G.

Dico FEG triangulum, maius esse dimidio figuræ concauę AECBA.

Demonstratio.



Iungantur ABC. quoniam AE parabolam contingit, & AC ordinatim ponitur ad BD, [c] ED, AE, CE, in B, F, G punctis bissectæ sunt: quare EBF, ABF triangula, item EBF, EBG, ac proinde tota EFG, ABE æqualia sunt. sed AEB triangulum maius est dimidio figurę mixtilineæ ABCEA, cùm AB latus cadat intra parabolam conuexam, triangulum igitur FEG illo maius quoque est. Quod erat demonstrandum. c Ex 17. huius.

Corollarium primum.

Ex antè demonstratis facile deducitur triangulum FEG, maximum esse illorum, quæ intra triangulum AEC ab alia quauis contingente auferri possunt.

Corollarium secundum.

Sequitur quoque, ABC triangulum, duplum esse trianguli FEG; est enim ED [d] dupla EB. & AC dupla FG. d Ibid.

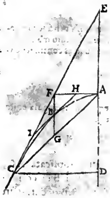
PROPOSITIO CCXXXIV.

Parabolam ABC cuius diameter AD contingat in C recta CE conueniens cum diametro in E, actaque per A contingente, quæ CE lineæ occurrat in F, demittatur ex F diameter FB, & per B ponatur contingens, quæ AF, EC lineis occurrat in H & I.

Dico triangulum AEF, quadruplum esse trianguli HFI.

Demon-

Demonstratio.



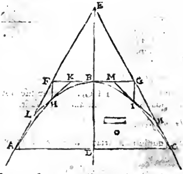
a 17. *huius.*
b 19. *huius.*
c 15. *huius.*
d *Ex elementis.*

POnatur recta A C, occurrens F B productæ in G. quoniam E C contingens est, & C D ordinatim applicata ad diametrum A D, [a] rectæ E A, A D, adeoque & E F, F C æquales sunt: est autem vt E F ad F C, sic A G ad G C, (cùm F G, E D diametri [b] æquidistent;) linea igitur A C in G bisecta est, adeoque I H [c] contingenti parallela. vnde F G, F A lineæ in B & H, bifariam quoque sunt diuisæ, & A F C triangulum [d] quadruplum trianguli F H I: est autem F A E, æquale triangulo F A C, quia F E, C E lineæ æquales sunt, igitur & F A E, quadruplum est trianguli F H I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXXV.

SIt ad A B C parabolæ diametrum B D, ordinatim applicata A C, positisque per A & C, contingentibus quæ diametro B D occurrant in E, ducatur per B, contingens, quæ A E, C E lineas secet in F & G, diametri deinde ponantur F H, G I; & per H & I, contingentes L K, M N: atque idem sine termino continuetur.

Dico figuram mixtilineam A E C, B A, æqualem esse toti triangulorum seriei.



Demonstratio.

e 33. *huius.*
f 1. *decimi.*

SI enim non sit æqualis; maior igitur vel minor vt sit necesse est. sit primum figura mixtilinea maior triangulorum serie, excessu quantitatis O. triangulum F E G maius [e] est dimidio figuræ concauæ A E C B A; similiter triangula L F K, M G N maiora sunt dimidijs mixtilineorum quibus inscribuntur, & id semper fit; igitur per ablationem illam continuatam, relinquetur ex mixtilineo [f] A E C B A quantitas datâ minor, ergo & minor quantitate O, ergo O excessus non est, quo mixtilineum A E C B A excedit triangulorum seriem: igitur nec illud serie totâ maius est. similiter ostendetur A E C B A figuram minorem quoque non esse totâ triangulorum serie. æqualis igitur vt sit necesse est.

PROPOSITIO CCXXXVI.

EAdem manente figura:

Dico parabolam concauam A E C B ad triangulum F E G, eam proportionem habere quam quatuor ad tria.

Demon-

Demonstratio.

QVoniam EFG triangulum quadruplum a est triangulorum LFK, MGN, & illa rursum simul sumpta, quadrupla illorum quæ residuis figuris mixtilineis inscribuntur, & ita sine termino procedendo, ablata semper quadrupla sunt triangulorum residuis figuris inscriptorũ, erit per 87. libri nostri de progressionibus tota triangulorum series id est concauum AECBA, ad FEG triangulum, vt quatuor ad tria. Quod erat demonstrandum. a 234. huius.

Corollarium.

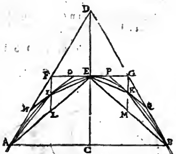
HInc patet FEG triangulum triplum esse residuorum AHBFA, CIBGC. est enim FEG triangulum ad figuram concauam ABCEA, vt tria ad quatuor: quare triangulum EFG tres quartas continet figuræ ABCEA, adeoque residuorum triplum est.

PROPOSITIO CCXXXVII.

IIsdem positis:

Dico AEB parabolam conuexam duplam esse figuræ concauæ AEBDA.

Demonstratio.



INscribantur tam concauę quàm conuexæ parabolæ; triangula maxima AEB, FDG. quoniam igitur AEB parabola est ad triangulum AEB vt b quatuor ad tria: eandem autem habeat proportionem figura concaua c AEBD, ad triangulum FDG, erit vt triangulum AEB ad parabolam conuexam, sic FDG triangulum ad figuram mixtilineam AEBD: & permutando vt AEB triangulum ad triangulum FDG, sic parabola AEB ad figuram concauam: sed AEB triangulum d duplum est trianguli FDG: igitur & parabola AEB dupla est figuræ AEBD. Quod erat demonstrandum. b 231. huius. c 236. huius. d Coroll. 233. huius.

PROPOSITIO CCXXXVIII.

IDem aliter demonstrare.

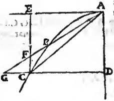
Demonstratio.

INscribantur segmentis residuis tam parabolæ conuexæ, quàm concauæ, triangula maxima AIE, EKB, NFO, PGQ. Quoniam triangulum AEB, e ablatum ex parabola duplum est trianguli FDG, ablati ex figura ADBEA; & iterum triangula AIE, EKB ablata ex residuo parabolę dupla triangulorum NFO, PGQ, ablatorum ex residuo figuræ ADBEA, insuper ostensum sit ablationem illam in proportione dupla, siue termino in vtraque figura posse f continuari, siue totam triangulorum maximorum seriem parabolę AEB inscriptorum, illi æquari; & figuram mixtilineam AEBDA æquari toti g triangulorum maximorum seriei figuræ illi inscriptorum, parabola AEB, h dupla est figuræ mixtilineæ ADBEA. Quod erat demonstrandum. e Ibid. f 231. huius. g 233. huius. h 85 De progressionibus.

PROPOSITIO CCXXXIX.

Dato segmento parabolico triangulum æquale exhibere.

Constructio & demonstratio.



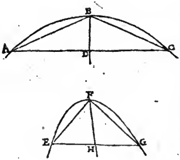
Sit ABC segmentum datum: ductâque diametro AD ponatur ordinatim CD, agaturque per A ipsi CD, æquidistans AE, occurrens erectæ ex C diametro in E: tum EC diuisa in F vt FC quarta pars sit EC, ducatur ex A per F, linea AG, occurrens CD in G. dico GAC triangulum æquale esse dato segmento ABC. Quoniam AE, CG lineæ æquidistant, vt CF ad FE, sic GC est ad EA: sed CF tertia pars est FE; igitur & GC, tertia pars est EA hoc est CD. Quare & GAC triangulum tertia pars est trianguli CAD: est autem ABC segmentum æquale tertiæ a parti trianguli CAD. igitur & GAC triangulo est æquale: dato igitur segmento parabolico æquale triangulum exhibuimus; quod erat imperatum.

a Ex Coroll. 231. huius.

Corollarium.

Hinc patet triangulum GAD æquale esse parabolæ ABCD. adeoque eadem praxi solui problema quo petitur datæ parabolæ, triangulum æquale exhiberi.

PROPOSITIO CCXL.



Parabolæ terminatæ eam inter se sortiuntur rationem quam triangula maxima illis inscripta.

Demonstratio.

Sint ABC, EFG parabolis terminatis triangula maxima inscripta ABC, EFG. dico parabolas illam inter se habere rationem quã triangula maxima. Triangulum b ABC est ad ABC, parabolam vt tria ad quatuor: triangulũ quoque EFG est ad parabolam EFG, vt tria ad quatuor: igitur vt ABC triangulum ad parabolam ABC, sic EFG triangulum ad parabolam EFG, & permutando vt ABC triangulum ad triangulum EFG, sic ABC parabola ad parabolam EFG. Quod erat demonstrandum.

b 231. huius.

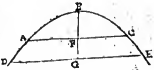
Corollarium.

Hinc si duæ parabolæ habeant eandem vel æqualem subtensam, erunt illæ inter se vt altitudines; & si altitudines fuerint æquales, erunt inter se vt bases.

PROPOSITIO CCXLI.

PArabolam ABC fecent duæ quæuis parallelæ AC, DE.
Dico ABC parabolam ad DBE parabolam esse in triplicata ratione AC ad DE.

Demonstratio.



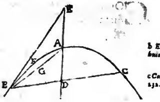
POnatur diameter BF ad quam ordinatim positæ sint AC, DE. Parabola ABC ad DBE parabolam eam habet rationem, quam [a] triangulum sub AC & BF ad triangulum sub DE, & BG: sed ratio trianguli sub AC & BF, ad triangulũ sub DE & BG, est triplicata rationis AC ad DE, quia composita ex ratione AC ad DF, & BF ad BG, hoc est ex duplicata ratione AC ad DE; igitur ABC parabola est ad parabolam DBE in triplicata ratione AC ad DE. Quod fuit demonstrandum.

a 140. huius.

PROPOSITIO CCXLII.

PArabolam ABC contingat in B linea EB, conueniens cum diametro quacunque AE in E, iunganturq́; AB.
Dico figuram concauam BFAEB, duplam esse conuexæ BFAGB.

Demonstratio.



POnatur ex B, ordinatim AC ad diametrum AD. Quoniam BE est cõtingens, erũt AD, AE lineæ [b] æquales, adeoque ABD, ABE triangula æqualia: est autem ABD triangulum, triplum [c] segmenti BFAGB, igitur & triangulũ ABE triplum est segmenti BFAGB. residua igitur figura concaua BFAEB dupla est conuexæ BFAGB. Quod erat demonstrandum.

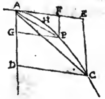
b Ex 17. huius.

c Coroll. 132. huius.

PROPOSITIO CCXLIII.

SInt ad ABC parabolæ diametrum AD, ordinatim positæ DC, GB: iunctisq́; AB, AC ponatur per A æquidistans ipsi DC, occurrens erectis ex B & C, diametris in F & E.
Dico esse vt ABF triangulum ad triangulum ACE siue ABG ad ACD rriangulum, sic AHBFA figurã concauã ad figuram AHCEA.

Demonstratio.



VT ABG triangulum ad triangulum ACD, sic AHB segmentum [d] ad segmentum ABC, sed vt AHB ad ABC segmentum, sic AHBF figura ad figuram ABCE, cùm [e] AHBF duplum sit segmenti AHB, & ABCE duplum ABC; igitur vt triangulum ABG ad ACD triangulum, sic AHBF figura ad figuram ABCE. Quod erat demonstrandum.

d 140. huius.

e 242. huius.

Corollarium.

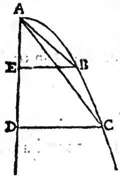
EAdem positâ figurâ sequitur esse vt GF parallelogrammum ad parallelogrammum DE, sic AGB parabolam ad parabolam ADC: item conuexum AHBF ad conuexum ABCE.

PROPOSITIO CCXLIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD secent vtcunque lineæ AB, AC: ducanturque ordinatim BE, CD.

Dico spatium parabolicum EBCD, quadruplum esse spatij CABC lineis AB, AC & parabolica BC contenti.

Demonstratio.



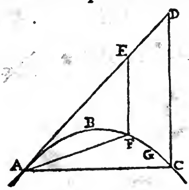
a Ex Coroll. 232. huius.

QVoniam parabola DABC quadrupla est a segmenti ABC & EAB parabola quadrupla segmēti AB, parabola DABC est ad segmentum ABC vt EAB parabola ad segmentum AB; igitur cùm parabola DABC ad ABC, totum ad totum sit vt EAB ablatum ad ablatum AB, erit reliquum EBCD, ad reliquum ACBA, vt DABC totum ad totum ABC: quare EBCD figura, quadrupla est figuræ lineis AC, AB & parabolica BC contentæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLV.

COntingat ABC parabolam linea quæcunque AD conueniens cum diametris quibusuis DC, FE in D & E. iunganturque AF, AC.

Dico concauum EDCGF duplum esse partis AFGC, lineis AF, AC contentæ.



Demonstratio.

b 242. huius.

COncauum ABCDA b duplum est parabolæ ABC: & concauum ABFEA duplum est segmenti ABF; igitur residuum EDCGF duplum est residui AFGCA. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLVI.

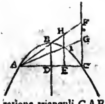
PArabolam ABC subtendat linea AC, qua diuisa in D & E, vt AD, AE, AC continuè proportionales sint, erigantur diametri DB, EI, CF. & per B & I, puncta ex A rectæ ponantur AG, AF secantes CF diametrum in F & G.

Dico EIGC ad spatium quadrilaterum BI triplicatam habere rationem AC ad AE.

Demonstratio.

c 1. De progressionibus.

QVoniam AD, AE, AC ponuntur continuè proportionales, vt CA ad EA, sic c CE ad ED, sed vt CE ad ED, sic CG est ad GF; igitur vt CA ad EA, sic CG ad GF: vnde triangulum CAG ad GAF triangulum, est vt CE ad ED, id est vt CA ad EA, id est FA ad HA, id est FG ad HI; est autem GAF triangulum



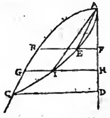
triangulum ad triangulū H A I in duplicata ratione F G ad H I, igitur cùm ratio trianguli C A G ad H A I componatur ex ratione trianguli C A G ad G A F, & ex G A F ad H A I, patet C A G triangulum esse ad triangulum H A I in triplicata ratione F G ad H I: quia verò ratio quadrilateri E G ad B I quadrilaterum, componitur ex ratione E G ad G H quadrilaterum, (id est ex ratione trianguli C A G ad triangulum G A F,) & ex ratione G H ad I B, quadrilaterum, (id est ex ratione trianguli G A F ad H A I triangulum, cùm F A, H A, B A proportionales sint) erit E G quadrilaterum ad quadrilaterum B I vt C A G triangulum ad triangulum H A I; igitur & E G quadrilaterum ad B I quadrilaterum rationem habet triplicatam A C ad A E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLVII.

Esto A B C parabolæ diameter A D. positaque ad illam ordinatim C D, describatur per A & C, parabola A E C, quam in A contingat A D, ponanturque ordinatim quæuis F B, H G secantes A E C parabolam in E & I.

Dico figuram concauam A F E A, ad figuram concauam A H I A, duplicatam habere rationem parabolæ B A F ad parabolam G A H.

Demonstratio.



Iungantur A E, A I. Figura mixtilinea A F E A ad figuram A H I A eam habet rationem quam A E F triangulum [a] ad triangulum A I H. ratio autem trianguli A E F ad triangulum A I H composita est ex ratione A F ad A H, hoc est duplicata rationis F B ad H G, & ex ratione F E ad I H, hoc est duplicata rationis A F ad A H, id est quadruplicata rationis F B ad H G: igitur A F E A figura ad figuram A H I A sextuplicatam habet rationem lineæ F B ad H G. sed B A F [b] parabola ad G A H parabolam triplicatam habet rationem F B lineæ ad lineam H G: igitur figura A F E A ad figuram A H I A, duplicatam habet rationem parabolæ B A F ad parabolam G A H. Quod erat demonstrandum.

a 243. huius.

b 240. huius.

Corollarium.

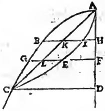
Hinc patet concauum A F E ad concauum A H I, triplicatam habere rationem A F ad A H: nam A E F triangulum ad triangulum A I H rationem habet compositam ex A F ad A H, & E F ad I H, id est ex duplicata rationis A F ad A H.

PROPOSITIO CCXLVIII.

Iisdem positis sint A H, A F, A D proportionales, iunganturque A C. Dico mistilineum I F ad E D mistilineum, rationem habere sextuplicatam, cuius ratio trapezij K F ad L D, trapezium est quadruplicata.

Demonstratio.

a Ex 143. huius.



QVoniam AH, AF, AD lineæ proportionales sunt, rectæ quoque IH, EF, CD, adeoque figuræ [a] concauæ AHIA, AFEA, ADCA in continua sunt analogia. igitur vt AHIA figura ad figuram AFEA, sic IF mistilineum est ad mistilineum ED; sed AHIA figura ad figuram AFEA, sextuplicatam habet rationem BH ad GF, igitur & IF mistilineum ad mistilineum ED sextuplicatam habet rationem BH ad GF. Rursum, quia AH, AF, AD proportionales sunt, triangula quoque AKH, ALF, ACD in continua sunt analogia. adeoque vt AKH triangulum est ad triangulum ALF, sic KF trapezium est ad trapezium LD: sed AKH triangulum ad triangulum ALF, duplicatam habet rationem lineæ AH ad AF, hoc est quadruplicatam rationis HB ad FG: igitur & KF trapezium ad trapezium LD quadruplicatam habet rationem lineæ HB ad FG, cuius IF mistilineum ad mistilineum ED habet sextuplicatam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLIX.

IN parabola ACB sit AB pars axeos æqualis lateri recto, ductaq; AF ad axem normali, ponatur quæuis FC parallela AB, secans parabolam in C, & ducantur AC, BF.

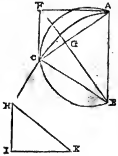
Dico has duas sese orthogonaliter intersecare & CG, FG, GA, GB continuè esse proportionales.

Demonstratio.

b Ex 8. huius.

c 6. sexti.

d Ex 13. sexti.



CVm BA æqualis sit lateri recto, erit [b] rectangulum BAFC æquale quadrato FA. Igitur sunt tres in continua analogia FC, FA, AB: ergo cùm anguli CFA, BAF æquales sint, similia sunt triangula [c] CFA, FAB. vnde angulus FAC æqualis angulo ABF. est autē angulus FAC vnà cum CAB, recto æqualis; igitur etiam angulus FBA vnà cum angulo CAB recto est æqualis, & consequenter angulus AGB rectus est. vlterius cùm tam angulus AFC quàm AGF rectus est, tres CG, GF, GA [d] proportionales sunt: quia verò anguli AGB, FAB recti sunt, lineæ quoque FG, GA, GB proportionales sunt; eandem igitur continuant rationem CG, FG, GA, GB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCL.

INter duas datas, duas medias exhibere organicè.

Constructio & demonstratio.

SInt duæ datæ HI, IK inter quas duas medias oporteat exhibere. constituantur hæ ad angulos rectos & conficiant triangulum orthogonum HIK. deinde describatur parabola ACB cuius latus rectum sit AB pars axeos, super quo segmentum circuli constituatur capiens angulum ACB æqualem IHK, occurrens parabolæ in C & ducantur CF, FA ad angulos rectos, ita vt CF sit æquidistans axi & iungantur AC, BF. Dico factum quod requiritur, nam ostensum est angulos ad G rectos esse

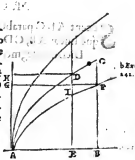
esse, estque angulus BCA seu BCH. æqualis angulo K. ergo BCG triangulum simile triangulo HIK; igitur cum FG, GA mediæ[a] sint inter CG, GB, etiam inter HI, IK inuentæ erunt mediæ. [a Ex 9. huius.]

PROPOSITIO CCLI.

HAbeant duæ parabolæ ABC, AFB communem axem; sitque AB linea lateri recto æqualis parabolæ ABC, ductisque ordinatim BFC, ED, sit ADE parabola æqualis AFB.

Dico AE, ED, medias esse inter FB, BA.

Demonstratio.



QVoniam AB ex hypothesi est latus rectum parabolæ ACB, rectangulum BAE æquatur[a] quadrato ED. igitur vt BA ad ED, sic ED ad AE. Deinde quia parabolæ æquales sunt, æquantur etiam[b] rectangula AED, ABF. Ergo vt BA ad ED, sic reciprocè AE ad BF. sed cùm ostendi vt BA est ED, sic ED esse ad AE, ergo vt ED ad AE, sic AE ad BF. liquet igitur quatuor rectas BA, ED, AE, BF esse in continua analogia: & proinde inter BA, BF, medias esse ED, AE. Quod erat demonstrandum. [b Ex Coroll. 241. huius.]

PROPOSITIO CCLII.

INter duas datas, duas medias exhibere.

Constructio & demonstratio.

DAtæ sint AB, BF, quibus ad angulum rectum dispositis describe parabolam AC circa axem AB, cuius rectum latus æquale sit ipsi AB. occurrat deinde BF, parabola AC in C, & circa communem axem AB aliam describe parabolam per A & F. Demum[c] ducatur ordinatim DE, faciens segmenta parabolica ADE, AFB æqualia. Dico DE, EA esse medias inter AB, BF: demonstratio ex præcedenti manifesta est. [c Ex 242. huius.]

PARABOLÆ
PARS SEXTA

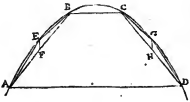
Segmenta primùm & parabolas inter se confert; dein figuras maximas sectioni inscribit.

PROPOSITIO CCLIII.

SEcent A B C parabolam parallelæ quæuis duæ A D, B C, ducanturque lineæ AB, C D.

Dico illas segmenta auferre æqualia.

Demonstratio.



a 218. huius.
b Ex 240. huius.

SEgmentis AB, CD triangula inscribantur maxima AEB, CGD; quæ cùm B C, A D, a æquidistent, inter se æqualia sunt: vnde & b segmenta æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCLIV.

EAdem manēte figurâ, oportet ex dato in peripheria puncto C, rectam ducere, quæ segmentum auferat æquale dato A B.

Constructio & demonstratio.

IVnctâ B C, ducatur A D parallela B C, iunganturque C D: manifestum est per præcedentem D C ex dato puncto eductam, segmentum auferre æquale dato A B, Quod erat requisitum.

PROPOSITIO CCLV.

DAto segmento A B C & diametro G H oportet ad illam ordinatim applicare lineam, quæ segmentum auferat dato æquale.

Constructio & demonstratio.

c 118. huius.
d 218. huius.
e 140. huius.

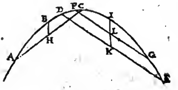
DIuisa AB bifariam in F, erigatur diameter F E, cui fiat æqualis G H: & per H ordinatim ponatur C D, dico factum esse quod petitur: iungantur enim A E B, C G D. quoniam E F, G H diametri æquales sunt, c triangula quoque A E B, C G D æqualia sunt: quæ cùm d maxima sint illorum quę segmentis A B, C D inscribi possunt, e segmenta quoque A B, C D æqualia sunt; applicuimus igitur ad datam diametrum, &c. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO CCLVI.

Data parabola ABC, & in illa segmento AC, oportet cuicunque ED æquidistantem ducere, quæ segmentum auferat dato æquale.

Constructio & demonstratio.

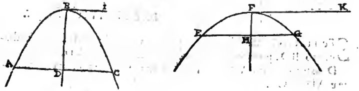


Diuisis AC, DE bifariam in H & K, erigantur diametri HB, IK: factáq; IL æquali HB, ponatur per L, FG æquidistans DE, patet per præcedentem FIG segmentum dato AC, æquale esse; igitur lineam duximus æquidistantẽ DE quæ segmentum FIG auferat æquale dato. Quod erat postulatum.

PROPOSITIO CCLVII.

Sit ad ABC parabolæ axem BD cuius latus rectum BI, ordinatim posita AC: sit autem & EFG parabola, cuius axis FH, & latus rectum FK; oportet ex EFG parabola segmentum auferre, quod ad segmentum ABC, rationem habeat quam BI ad FK.

Constructio & demonstratio.



Fiat vt IB ad FK, sic FH ad BD, & per H ordinatim ponatur EG. dico factum esse quod petitur: cùm enim sit vt IB ad FK, sic FH ad BD, rectangulum super IB BD idest a quadratum AD, æquale est rectangulo super FK, FH id est quadrato EH. vnde AC, EG inter se æquales: sunt triangulum igitur maximum segmenti EFG, ad triangulum maximum segmenti ABC est vt FH ad BD, id est per constructionem BI ad FK; ergo & segmentum b EFG ad segmentum ABC, vt IB ad FK: abstulimus igitur ex EFG parabola segmentum EFG, quod ad segmentum ABC eam rationem continet quam latus rectum BI, ad latus rectum FK. Quod exhibendum erat.

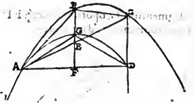
a Ex 8. huius.

b Ex 240. huius.

PROPOSITIO CCLVIII.

Sit ad ABC parabolæ diametrum BE ordinatim posita AC: ductáque AD normali, ad diametrum ex C demissam, fiant BE, FG lineæ æquales, & per AGD, parabola describatur, cuius axis GF.

Dico AGD segmentum æquari segmento ABC.



a 227. huius.
b 240. huius.

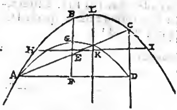
Demonstratio.

QVoniam BE, GF lineæ æquales sunt, triangula B C E, G D F, item B A E, G A F, ac propterea A B C, A G D triangula inter se æqualia sunt, sed quoque ª maxima sunt illorũ quæ segmentis A B C, A G D, inscribi possunt; segmenta igitur A B C, ᵇ A G D æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCLIX.

POnatur L K axis parabolæ A B C, æqualis diametro B E, & ordinatim per K linea H I.

Dico illam rectæ A D æqualem existere.



c Ex 218. & 240. huius.
d Ex conuersa 240. huius.

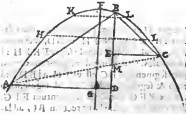
Demonstratio.

ESt enim per præcedentẽ A G D parabola æqualis parabolę A B C id est ᶜ H L I: igitur & triangula maxima A G D, ᵈ H L I sunt æqualia: sunt autem ex hypothesi illorum altitudines L K, F G æquales, igitur & bases A D, H I inter se æquales sunt. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CCLX.

SEcent A B C parabolam lineæ quæuis A B, B C; demissáq; ex B diametro B D, ponantur ad illam ex A & C normales A D, C E.

Dico segmentum A B esse ad segmentum B C in triplicata ratione lineæ A D ad C E.



e Ex conuersa 258. huius.
f 242. huius.

Demonstratio.

INuento axe F G applicentur ad illum ordinatim lineæ H I, K L: & H I quidem sit æqualis A D, K L verò rectæ C E: erit igitur segmento A B ᵉ æquale segmentum H F I, & segmento B C æquale segmentum K F L. sed H F I segmentum ad segmentum K F L, ᶠ triplicatam habet rationem lineæ H I ad lineam K L; igitur & segmentum A B ad segmentum B C, triplicatam habet rationem lineę H I ad K L, lineam, id est ex hypothesi A D ad E C. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

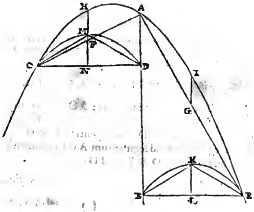
HInc sequitur iunctâ A C, quę occurrat B D in M, A B segmentum ad segmentum B C triplicatam habere rationem A M ad M G. patet, cùm sit vt A D ad C E, sic A M ad M G. ergo, &c.

PROPOSITIO CCLXI.

PArabolam ABC, secent duæ quæuis lineæ AB, AC: demissaque ex A diametro AD, ponantur ad illam ex B & C normales BE, CD: dein AB, AC lineis bifariam diuisis in F & G, erigantur diametri FH, GI.

Dico segmentum AHC ad segmentum AIB, rationem habere compositam, ex ratione FH ad IG, & CD ad BE.

Demonstratio.



DIuisis EB, CD lineis bifariam in L & N, erigantur normales LK, NM: & LK quidem æqualis IG: NM verò æqualis HF: & per E, K, B, item C, M, D puncta, parabolæ describantur, quarum axes sint LK, MN: iunganturque EKB, CMD. Quoniam LK æqualis est IG, segmenta EKB, [a] AIB æqualia sunt: eadē de causa æqualia sunt segmenta AHC, DMC; segmentum igitur AHC est ad segmentum AIB vt DMC segmentum, est ad segmentum EKB. sed DMC segmentum est ad segmentum EKB, [b] vt DMC triangulum ad triangulum EKB; igitur & AHC segmentum, ad segmentum AIB, est vt DMC triangulum ad triangulum EKB, & inuertendo vt triangulum DMC ad triangulum EKB, sic AHC segmentum est ad segmentum AIB: sed ratio trianguli DMC ad triangulum EKB est composita ex ratione NM, ad LK, id est FH ad IG, & ex DC ad EB; ratio igitur segmenti AHC ad segmentum AIB, composita est ex ratione HF ad IG, & DC ad EB. Quod erat demonstrandum.

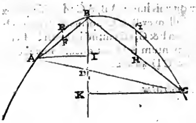
[a] 218. & 240. huius.
[b] 240. huius.

PROPOSITIO CCLXII.

AVferant AB, BC lineæ segmenta quæcunque, demissaq; ex B diametro BD, ponatur AC occurrens BD lineæ in D: dein AB, BC diuisis bifariam in F & H, ponantur per F & H, diametri EF, GH.

 Dico

Dico E F ad G H duplicatam habere rationem eius quam habet A D ad D C.



Demonstratio.

a 260. huius.

b 261. huius.

SEgmentum A B ad ᵃ segmentum B C in triplicata est ratione A D ad D C; sed ratio segmenti A B ad segmentum ᵇ B C composita est ex ratione E F ad G H, & ex A D ad D C, ratio igitur E F ad G H, duplicata est rationis eius, quam habet A D ad D C. Quod fuit demonstrandum.

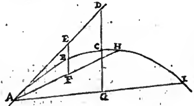
Corollarium.

HInc sequitur, ductis A I, C K normalibus ad diametrum B D, rectam E F ad G H duplicatam quoque habere rationem eius quam obtinet A I linea, ad lineam C K. vt patet ex demonstratione.

PROPOSITIO CCLXIII.

PArabolam A B C contingat in A linea A D: ducanturq́; ex A lineæ quævis A H, A I, quibus in F & G bifariam diuisis, ponantur diametri F B, G C, occurrentes A D contingenti in E & D.

Dico A B H segmentum, ad segmentum A C I, rationem habere compositam ex ratione A E ad A D, & E B ad D C.



Demonstratio.

c Ex 17. huius.

d 241. huius.

QVoniam A H, A I lineæ ordinatim ponuntur ad diametros B F, C G, & A D linea contingens, lineæ E B, B F, item D C, C G inter se ᶜ æquales sunt. vnde A B H triangulum æquale triangulo A E F, & A C I triangulum æquale triangulo A D G: est autem vt A B H triangulum ad triangulum A C I, sic ᵈ A B H segmentum ad segmentum A C I; igitur & segmentum A B H est ad segmentum A C I, vt A E F triangulum ad triangulum A D G. sed ratio trianguli A E F ad triangulum A D G, composita est ex ratione A E ad A D, & ex ratione E F ad D G, id est E B ad D C: igitur & segmentum A B H ad segmentum A C I rationem habet compositam ex ratione A E ad A D, & E B ad D C. Quod erat demonstrandum.

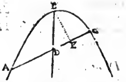
PROPOSITIO CCLXIV.

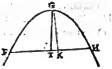
PArabolas duas A B C, F G H subtendant rectæ A C, F H segmenta auferentes æqualia; rectis autem A C, F H diuisis in D & I bifariam, ponantur diametri B D, G I, & ex B & G, demittantur B E, G K normales ad A C, F H.

Dico esse vt B E ad G K, sic F H ad A C.

Demon-

Demonstratio.





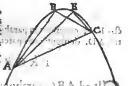
CVm enim segmenta ABC, FGH ponantur æqualia, triangula quoque illorum a maxima inter se æqualia sunt, vnde vt BE ad GK, sic b FH ad AC. Quod erat demonstrandum. a Ex conuersa 140. huius. b Ex elementis.

PROPOSITIO CCLXV.

PArabolæ ABC segmento ABC, triangula duo inscripta sint, & ABC quidem illorum maximum, quæ segmento inscribi possunt, alterum verò AEC quodcunque.

Dico segmenta AE, EC simul sumpta, maiora esse segmentis AB, BC simul sumptis.

Demonstratio.



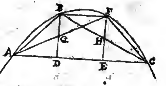
CVm triangulum AEC minus sit triangulo ABC, residua AE, EC segmenta, maiora sunt residuis segmentis AB, BC; eodem etenim excessu superat triangulum ABC triangulum AEC, quo segmenta super lineis AE, EC excedūt segmenta super AB, BC.

PROPOSITIO CCLXVI.

PArabolam ABC subtendat recta AC, quæ diuisa in quotuis partes æquales, in punctis D, E: erigantur diametri DB, EF, iunganturque AB, BF, FC.

Dico segmenta AB, BF, FC æqualia esse.

Demonstratio.

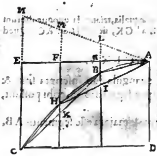


POnantur AF, BC & AF quidem occurrat BD in G; BC verò rectæ FE in H: vt AD ad DE, sic AG ad GF, sed AD, DE per hypothesim æquales sunt; igitur & AG, GF quoque inter se æquantur. quare ABC triangulum c maximum est eorum quæ ABF segmento inscribi possunt, & AB, BF segmenta d sunt æqualia. similiter æqualia ostenduntur segmenta BF, FC: segmenta igitur AB, BF, FC, æqualia sunt. c 227. huius. d Coroll. propos. 232. huius.

PROPOSITIO CCLXVII.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AE; quâ diuisâ in partes æquales, punctis E, F, G, demittantur diametri EC, FH, GB, occurrentes parabolæ in B, H, C; iunganturque AB, BH, HC: Dico segmenta AB, BH, HC esse inter se æqualia.

Demonstratio.



a 227. huius.

b Ex Coroll. 232. huius.

DVcantur AH, BC: & AH quidem occurrat GB lineæ productæ in I; BC verò ipsi FH in K. Quoniam IG, FH æquidistant & AG, GF ponuntur æquales, rectæ AI, IH inter se æquales sunt: quare AH ordinatim posita est ad diametrum IB, & ABH triangulum maximum a est eorum quæ segmento ABH inscribi possunt: adeoque & segmenta b AB, BH æqualia sunt. eodem modo ostenduntur segmenta BH, HC inter se æquari; segmenta igitur AB, BH, HC æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

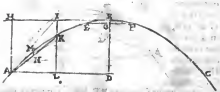
PRopositio quoque vera est si ex A ducta secans AN diuidatur in partes æquales punctis L, M: ex quibus in parabolam rectæ emittantur LB, MH, NC parallelę diametro AD. demonstratio patet ex præcedenti.

PROPOSITIO CCLXVIII.

SIt ad ABC parabolę axem BD ordinatim posita recta EF; actaq; per B contingente BH, sumatur in illa, portio HI æqualis EF: & ex H & I, diametri demittantur HA, IK, occurrentes parabolæ in A & K, iunganturque AK.

Dico segmentum AK, æquari segmento EBF.

Demonstratio.



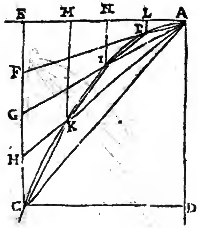
c 261. huius.

d 261. huius.

DIuisâ AK bifariam in N ducatur diameter NM. Quoniam AL, EF lineæ ponũtur æquales & MN ad BG in duplicata est ratione c AL ad EF, rectę MN, BG inter se ęquales sunt; sed ratio segmenti AK ad segmentum EBF composita est d ex ratione MN ad BG, & AL ad EF: segmentum igitur AK æquale est segmento EBF. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CCLXIX.



PArabolam A B C cuius diameter A D, contingat in A linea A E: in qua assumpto quouis puncto E, ponatur diameter E C, quę in F, G, H punctis secetur in partes æquales; ductisq; A C, A H, A G, A F lineis quę parabolæ occurrant in B, I, K: iungantur A B, B I, I K, K C.

Dico segmenta A B, B I, I K, K C esse inter se æqualia.

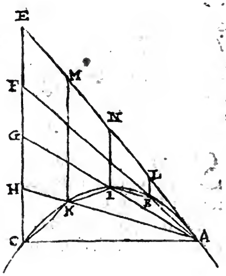
Demonstratio.

ERigantur ex B, I, K diametri B L, I N, K M: Quoniam B L, I N, K M, C E æquidistant axi, recta A E [a] in L, N, M diuisa est sicut E C diuisa in F, G, H: igitur lineæ A L, L N, N M, M E, æquales sunt: ac proinde segmenta A B, B I, [b] I K, K C inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

a Ex 94. huius.

b 167. huius.

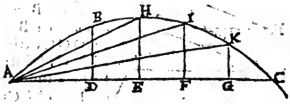
PROPOSITIO CCLXX.



PArabolam A B C subtendat quæuis A C normalis ad axem parabolæ, quâ diuisâ in D, E, F, G: vt A D, A E, A F, A G, A C proportionales sint, ponantur diametri D B, E H, F I, G K: iunganturque A B, A H, A I, A K.

Dico segmenta A B, A B H, A H I, A I K, A K C in continua esse analogia.

Demonstratio.

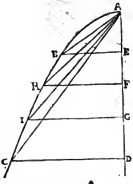


SEgmentum A B ad A B H segmentum [c] rationem habet triplicatam lineæ A D ad A E lineam: & A H segmentum ad segmentum A I triplicatam [d] habet rationem A E ad A F, & sic de ceteris; igitur cùm A D, A E, A E, A G, A C continuè sint proportionales, segmenta quoque in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

c Ex 241. huius.

d Ex eadem.

PROPOSITIO CCLXXI.



SIt ABC parabolæ diameter AD diuisa in E, F, G punctis vt AE, AF, AG, AD lineæ sint continuè proportionales: positisque ordinatim EB, FH, GI, CD, iungantur AB, AH, AI, AC.

Dico segmenta AB, ABH, ABI, ABC in continua esse analogia.

Demonstratio.

RAtio segmenti AB ad segmentum AH triplicata est eius quam habet [a] BE ad HF. rursum ABH segmentum ad segmentum ABI triplicatam habet rationem HF ad IG, & sic de cæteris: sed EB, FH, GI, CD lineæ continuè [b] sunt proportionales, quoniam AE, AF, AG, AD in continua ponuntur analogia: igitur & segmenta AB, ABH, AHI, AIC sunt in ratione continuata. Quod erat demonstrandum.

a Ex eadem.

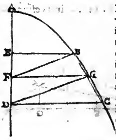
b 11. huius.

PROPOSITIO CCLXXII.

SIt ABC parabolæ diameter AD, diuisa in E & F, vt AE, AF, AD sint proportionales, & ordinatim ponantur EB, FG, DC: iunganturque BG, GC.

Dico segmentum BG ad segmentum GC rationem habere triplicatam eius, quam habet EB linea ad lineam FG.

Demonstratio.



DVcantur FB, DG. Quoniam AE, AF, AD lineæ proportionales sunt, EF est ad FD, [c] vt AE ad AF, id est vt quadratum EB ad quadratum FG. sed ratio trianguli FEB ad triangulum DFG [d] composita est ex ratione EF ad FD, & ex EB ad FG; triangulum igitur FEB ad DFG triangulum, triplicatam habet rationem EB ad FG. eodem modo triangulum FBG ad DGC, triangulum triplicatam habet rationem FG ad DC, (cùm rationem habeant compositam ex EF ad FD, altitudine ad altitudinem, & ex FG ad DC, id est EB ad FG: (cùm EB, FG, DC proportionales sint) igitur totum rectilineum EBGF est ad totum rectilineum FGCD in triplicata ratione EB ad FG; sed & mixtilineum EBGF est ad mixtilineum DFGC in triplicata ratione EB ad FG, nam cùm EB, FG, DC proportionales sint, parabolæ quoque EAB, FAG, [e] DAC in continua sunt analogia: adeoque vt ABE parabola est ad parabolam FAG, sic EBGF mixtilineum est ad mixtilineum FGCD. igitur & reliquum [f] segmentum BG est ad reliquum GC, in triplicata ratione EB ad FG. Quod erat demonstrandum.

c 1. De progressionibus.

d Ex elementis.

e Ex 141. huius.

f Ex 19. quinti.

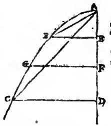
PRO-

PROPOSITIO CCLXXIII.

Sint denuo proportionales A E, A F, A D, & A F æqualis lateri recto diametri A D, & iungantur A B, A C.

Dico ſegmentum A B eſſe ad ſegmentum A C vt quadratum A B ad quadratum A C.

Demonſtratio.



Segmentum A B eſt ad ſegmentum A C, a in triplicata ratione E B ad D C, id eſt ſextuplicata E B ad F G, cùm E B, F G, D C proportionales ſint: ſed A B, quadratum ad quadratum A C rationem habet b ſextuplicatam lineæ E B ad F G, igitur vt quadratum A B ad quadratum A C, ſic A B ſegmentum ad ſegmentum A C. Quod erat demonſtrandum.

a 160. huius.

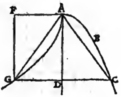
b Ex 51. huius.

PROPOSITIO CCLXXIV.

Parabolam A B C cuius diameter A D, contingat in A linea A F; dein per A deſcribatur parabola F A G cuius A F ſit diameter & contingens A D, ducaturque in A B C parabola ordinatim linea G C, occurrens F A G parabolæ in G, iunganturq; A C, A G.

Dico ſegmentum A G eſſe ad ſegmentum A B C, vt G D linea ad lineam D C.

Demonſtratio.



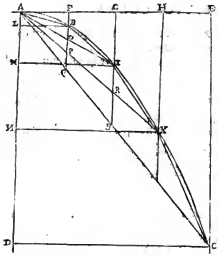
Erigatur ex G linea G F parallela contingenti A D, erit igitur ſegmentum G A, ad c ſegmentum A B C, vt F A G triangulum id eſt triangulum G D A, ad triangulum D A C; ſed G D eſt ad D C, vt G D A triangulum ad triangulum D A C: ſegmentum igitur A G eſt ad ſegmentum A C, vt G D linea ad lineam D C. Quod erat demonſtrandum.

c Ex 340. & ex Coroll. 336. huius.

Scholion.

Lubet hoc loco propoſitionem ducenteſimam ſexageſimam ſeptimam huius, ſecundùm proportiones quaſdam Arithmeticas contemplari, nimirum qua linearum, & ſegmentorum, tam connexorum quàm concauorum Arithmetica ſit progreſſio, ſiue incrementum.

Sit A B C *parabolæ diameter* A D, *& contingens* A E: *quâ diuiſâ in quotcunque partes æquales punctis* F, G, H *demittantur diametri* F B, G I, H K, E C *occurrentes parabolæ in* B, I, K, C: *ex quibus ordinatim ponantur* BL, IM, KN, CD: *ductiſq;* AB, AI, AK, AC *iun-*



A C *iungantur* B I, I K, K C, & F B, G I, H K *lineæ producantur, donec* A I, A K, A C *lineis occurrant in* O, P, Q, R, S, T *punctis.*

a 267. huius. *Erunt igitur* ^a *segmenta* A B, B I, I K, K C *inter se æqualia: item lineæ æquales* F B, B O, O P, P Q:

b Ex 94. huius. *cùm* F Q *linea* ^b *sit diuisa vt* A E.

Primò vt quadratũ A F *ad quadratum* A G, *sic* F B *eſt ad lineam* G I: *ſed* A G *quadratum quadruplũ eſt quadrati* A F *quia* A G *dupla eſt* A F; *igitur &* G I *quadrupla eſt linea* F B, *id eſt* A M *quadrupla ipſius* A L: *rurſum quadratum* A H *eſt ad quadratum* A F, *vt* 9. *ad* 1. *cùm* A H *tripla ſit* A F, *igitur &* H K *linea eſt ad lineam* A F, *id eſt* A N *ad* A L, *vt nouem ad vnum: iterum quadratum* A E *eſt ad quadratum* A F *eſt vt* 16. *ad* 1. *ergo &* E C *eſt ad* F B, *id eſt* A D *ad* A L, *vt* 16. *ad* 1. & *ſic de cæteris: igitur* A L *dat vnum; quorum* A M *quatuor;* A N *nouem;* A D *ſedecim.*

Rurſum cùm I R *ſit ad* O P, *vt* A I *ad* A O, *id eſt* A G *ad* A F, *ponatur autem* A G *dupla* A F, *erit &* I R *dupla* O P: *eadem methodo oſtenditur* K T *triplam eſſe* P Q *ſiue* O P, & *ſeſquialteram ipſius* I R. *vnde incrementum innoteſcit linearum* B O, I R, K T.

Secundò ſegmentorum conuexorum A B, A I, A K, A C *arithmetica proportio ſic inſti-*

c 242. huius. *tuitur. Triangulum* A B O *æquale eſt triangulo* A F B (*cùm* F B, B O *æquales oſtenſa ſint*) *adeoq; triplum ſegmenti* ^c A B: *quare totum triangulum* A B I, *ſextuplum eſt ſegmenti* A B; *additis igitur ſegmentis æqualibus* A B, B I, *erit totum ſegmentum* A B I *ad ſegmentum* A B *vt* 8. *ad* 1. *Rurſum triangulum* A I R, (*habens* I R *baſim duplam baſeos* O P, & I M *altitudinem duplam altitudinis* L B) *quadruplum eſt trianguli* A B O: *eſt autem triangulum* I K R *duplum trianguli* A B O, *quia eandem habent altitudinem, & baſis* I R *dupla eſt baſeos* O B, *igitur totum triangulum* A I K, *ſextuplũ eſt trianguli* A B O, *vnde eſt ad ſegmentum* A B, *vt* 18. *ad* 1. *addito igitur ſegmento* I K *æquali ſegmento* A B, & *ſegmento* A I, *quod octuplum eſt ſegmenti* A B, *erit totum ſegmentum* A K *ad ſegmentum* A B, *vt* 27. *ad* 1: *iterum, cùm* A K T *triangulum, baſim* T K *habeat triplam baſeos* O B, & N K *altitudinem triplam altitudinis* L B, *erit* A K T *triangulum noncuplum trianguli* A B O: *eſt autem triangulum* K C T *triplum trianguli* A B O, *igitur totum triangulum* A K C, *duodecuplum erit trianguli* A B O: *quare & ad ſegmentum* A B *eſt vt* 36. *ad* 1. *addita ergò ſegmento* K C, *æquali ipſi* A B, & A I K *ſegmento quod ad* A B *ſegmentum eſt vt* 27. *ad* 1, *erit* A K C *ſegmentum ad ſegmentum* A B, *vt* 64. *ad vnum: & ſic de cæteris.*

d 240. huius. *Tertiò parabola* A I M *eſt ad* A B L *parabolam*, ^d *vt* A I M *triangulum ad triangulum* A B L, *eſt autem* A I M *triangulum octuplum trianguli* A B L, (*cùm* A M *baſis oſtenſa ſit quadrupla baſeos* A L, & M I *altitudo dupla ipſius* L B;) *igitur* A I M *parabola octupla eſt parabolæ* A B L: *eodem modo cùm* A N *noncupla ſit* A L, & N K *tripla* L B, *erit triangulum* A K N *ad triangulũ* A B L *eſt vt* 27. *ad* 1. *vnde &* A K N *parabola toties continebit parabolam* A B L. *eadem praxi procedendo, reliquorum proportio habebitur.*

Sed & concauorum quoque ſegmentorum A F B, A G I, A H K, &c. *exceſſus eadem ra-*

e 243. huius. *tione innoteſcunt, cùm ſegmenta illa eandem ſeruent rationem* ^e *quam triangula* A F B, A G I, A H K, *quorum nota eſt proportio.*

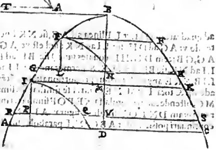
PRO.

PROPOSITIO CCLXXV.

Sit parabolæ A B C axis B D, ad quem ponantur ordinatim E F, G H, & I K, R S: ductis deinde diametris E L, I M. medijsque constitutis L N, M O inter G L, L H, & A M, M C, describantur circa axes E L, I M & puncta N & Q, parabolæ E L N, I P Q.

Dico parabolas has æquales esse.

Demonstratio.



Sit B T latus rectum axeos B V. erit ergo rectangulum V B T æquale quadrato V R, & rectangulum X B T æquale quadrato X I hoc est quadrato V P: itaque à rectangulo V B T dempto rectangulo X B T, remanet rectangulum V X B T, æquale rectangulo R P S, quod ex quadrato V R remanet per 5. 2. dempto quadrato V P. sed cùm ex constructione R P, P Q, P S sint continuæ, rectangulū R P S æquatur quadrato P Q. rectangulum igitur V X B T, hoc est I P B T æquatur quadrato P Q. ergo B T latus rectum est parabolæ I Q P. Atqui eodem plano discursu B T latus rectum est parabolæ E N L.[a] æquantur igitur parabolæ. Quod erat demonstrandum. a defin. huius.

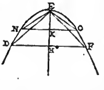
PROPOSITIO CCLXXVI.

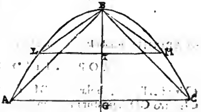
Omnis parabola, parabolæ similis est.

NOTA:

Duplici modo superficies duas curuilineas dici similes: Primo, quando similes figuræ in infinitum illis inscribi possunt: & hoc sensu Archimedes & Euclides, similia esse curuilinea quadam ostendunt. Secundo, similes dicuntur figuræ curuilineæ quarum essentiales proprietates eædem sunt. Nos duplicem hanc similitudinem parabolis inesse demonstrabimus.

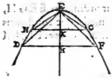
Demonstratio.

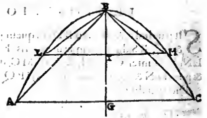




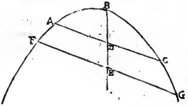
Ponantur A B C, D E F parabolarum axes B G, E H æquales lateribus suis rectis & per G & H, ordinatim A C, D F: iunganturque A B C, D E F. Quoniam E H, B G lineæ lateribus rectis æquales sunt & A C, D F ordinatim positæ, rectæ E H, D H, item A G, B G æquales sunt: & quia A G, D H ad axes ordinatim applicantur, anguli D H E, A G B recti sunt: vnde triangula D H E, A G B, ac proinde tota D E F, A B C similia sunt: Rursum diuisis A G, E H lineis proportionaliter in I & K, ponantur per I & K ordinatim L M, N O: iunganturque L B M, N E O. Quoniam igitur vt B I ad B G, sic E K est ad E H, vt L I quadratum ad quadratum A G, sic N K quadratum est

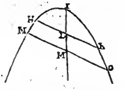
 ad





ad quadratum D H, vt L I linea ad A G, sic N K linea ad D H; & permutando inuertendo vt A G ad D H, sic L I ad N K: sed est vt A G ad D H, id est B G ad E H, (quia A G, G B item D H, H E æquales sunt) sic B I ad E K;) per constructionẽ igitur vt L I ad N K, sic B I est ad E K. & permutando vt L I ad B I, sic N K ad E K: quare cùm L I B, N K E anguli lateribus proportionalibus cõtẽti recti sint, triangula L I B, N K E, adeoq; & tota L B M, N E O inter se similia sũt: similiter si iungantur N D, O F, L A, M C, ostendetur triangula D N E, E O F similia triangulis B L A, B M C: adeoque figuram totam D N E O F similem figuræ A L B M C. quæ operatio cùm sine termino continuari possit: cõstat A B C, D E F parabolas similes esse primo modo.





Secundo autem modo parabolas parabolis esse similes, sic ostendo. sit A B C parabolæ diameter quæcunque A D diuisa vtcunque in D & E punctis, per quæ ordinatim ponantur A C, F G. sit autem & H I K parabolæ diameter I L diuisa proportionaliter in L & M, & per L & M ordinatim positæ H K, N O. Quoniam est vt B D ad B E, sic I L ad I M, erit vt quadratum A C ad quadratum F G, sic H K quadratum ad quadratum N O. eodem modo si rursum diametri B D, I L proportionaliter diuidantur, & per diuisionum puncta ordinatim ponantur lineę, ostendentur quadrata ordinatim positarum in vna parabola, proportionalia esse quadratis ordinatim positarum in altera. Quod cũ in infinitum semper fieri posit, patet A B C, H I K parabolas esse similes secundo modo. Quod erat demonstrandum.

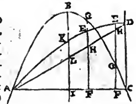
PROPOSITIO CCLXXVII.

SIt ad A B C parabolæ axem B I ordinatim posita A C, erectaque diametro C D, sumatur in ea punctum quoduis D, & per A & D, parabola describatur cuius diameter D C, iunganturq; A D: tum E F ponatur diameter, occurrens A B C parabolæ in G, & A E D in E, rectæ verò A D in H.

Dico A B C parabolam esse ad segmentum A E D, vt F G linea ad lineam E H.

Demon-

Demonstratio.



OCcurrat axis BI, parabolæ AEC in K, & AD in L, cùm igitur AC bifariam in I, sit diuisa, & CD æquidistet BI, erit & AD quoque in L bifariam diuisa & ordinatim ad LK diametrum posita: quia verò AC normalis ad CD, vtrique parabolę est communis, erit ABC parabola ad segmentum AED, a vt BI ad LK, (cùm rationem habeant b compositam ex ratione BI ad LK, & AC ad AC) sed vt BI ad LK, sic GF ad EH, quia LK est ad EH, vt BI ad FG, c id est ALD rectangulum ad rectangulum AHD, vt AIC ad AFC, rectangulum; igitur vt FG ad EH, sic ABC parabola est ad segmentum AED. Quod erat demonstrandum.

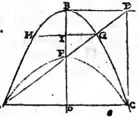
a Coroll. 240. huius.
b 261. huius
c Ex 47. huius.

PROPOSITIO CCLXXVIII.

SIt ad ABC parabolæ axem BD, ordinatim posita AC, contingens verò BE, quæ erectæ ex C diametro occurrat in E posita, autem AE quæ axem secet in F: & parabolam in G, per A, F, C parabola describatur, habens apicem in F, ponaturque ordinatim GH, occurrens axi BD in I.

Dico HBG parabolam ad parabolam AFC duplicatam habere rationem HG ad AC.

Demonstratio.



QVoniam EB, AC æquidistant, vt AF ad FE, sic FD est ad FB, & EB ad AD: sed AF, FE æquales sunt, æquantur igitur EB, AD, & BF, FD: quia verò d EF dupla est GF, id est BI dupla IF, erit & EB dupla GI; vnde tota HG æqualis est EB, id est AD dimidio rectæ AC; quare vt BI ad BF, id est FD, sic HG est ad AC, est autem ratio parabolæ HBG ad AFC parabolam composita ex ratione e BI ad FD, & HG ad AC: igitur ratio parabolæ HBG ad parabolam AFC duplicata est HG ad AC. Quod erat demonstrandum.

d 101. huius.
e 261. huius.

PROPOSITIO CCLXXIX.

IIsdem pósitis:

Dico ABC parabolam, octuplam esse parabolæ HBG.

Demonstratio.

QVoniam AD, HG lineæ æquales sunt ostensæ, & BD quadrupla ipsius BI, f triangulum ABC octuplum est trianguli HBG, sed ABC parabola est ad parabolam HBG, vt ABC triangulum ad triangulum HBG; octupla igitur est parabola ABC, parabolæ HBG. Quod erat demonstrandum.

f Ex elementis.

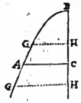
PROPOSITIO CCLXXX.

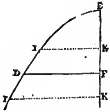
SInt ABC, DEF parabolarum axes BC, EF, diuisoque BC vtcunque in H diuidatur & EF proportionaliter in K, ponanturq; ordinatim HG, IK.

Dico GBH parabolam esse ad parabolam IEK, vt ABC parabola est ad parabolam DEF.

 Demon-

Demonstratio.





Ponantur ordinatim CA, FD: vt BH ad BC, sic EK est ad EF, igitur vt quadratum GH ad quadratum AC, sic IK quadratum ad quadratum DF, & inuertendo permutando vt AC quadratum ad quadratum DF, sic GH quadratum ad quadratum IK, & vt AC ad DF, sic GH ad IK. sed ABC parabola est ad parabolam GBH [a] in triplicata ratione AC ad GH; & DEF parabola ad parabolam IEK, in triplicata ratione DF ad IK, erit igitur vt parabola ABC ad parabolam GBH, sic DEF parabola ad parabolam IEK: & permutando vt ABC parabola ad parabolam DEF, sic GBH parabola ad parabolam IEK; quod erat demonstrandum.

a 141. huius.

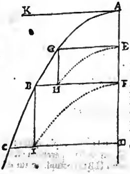
Si verò BC, EF lateribus rectis æquentur, erit GBH parabola ad parabolam IEK in duplicata ratione GH ad IK: quia ABC parabola ad parabolam DEF in duplicata est ratione AC ad DF, cùm AC, CB lineæ, item DF, FE ex quibus [b] rationem habent compositam, æquales ponantur.

b 161. huius.

PROPOSITIO CCLXXXI.

Esto ABC parabolæ axis AD diuisus in E & F, vt AE, AF, AD proportionales sint, positisque ordinatim EG, FB, DC ex G & B, diametri demittantur GH, BI occurrentes FB, DC lineis in H & I: & per E, H & F, I parabolæ describantur habentes apices in E & F.

Dico FEH parabolam esse ad parabolam DFI, in triplicata ratione FH ad DI.



Demonstratio.

Quoniam AE, AF, AD continuè proportionales sunt, vt AE ad [c] AF, sic EF est ad FD: sed vt AE ad AF, sic EG quadratum est ad quadratum FB, id est quadratum FH ad quadratum DI; igitur vt EF ad FD, sic FH quadratum est ad quadratum DI: quia verò ratio parabolæ FEH ad parabolam DFI composita est ex [d] ratione EF ad FD, id est ex duplicata ratione FH ad DI, & iterum ex ratione FH ad DI, parabola FEH est ad parabolam DFI, in triplicata ratione FH ad DI. Quod erat demonstrandum.

c 1. De progressionibus.

d 161. huius.

Corollarium.

Hinc sequitur, figuram mixtilineam HGB, esse ad figuram IBC in triplicata ratione HB ad IC. cùm enim EG, FB, DC proportionales sint, parabolæ EAG, FAB, DAC in [e] continua quoque sunt analogia: quare & FEGB mixtilineum ad mixtilineum DFBC est [f] vt EAG parabola ad parabolam FAB, id est in triplicata ratione EG ad FB, id est FH ad DI: sed & rectangulum FG, ad rectangulum DB est in triplicata ratione lineæ FH ad lineam DI, quia rationem habent compositam ex ratione EF ad FD, & FH ad DI. igitur & residuum HGB ad residuum IBC in triplicata est ratione FH ad DI. quia verò est GE ad FB, id est FH ad

e Ex 141. huius.

f 1. De progressionibus.

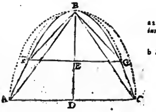
FH ad DI, vt FB ad DC, recta HB est ad IC, reliquum ad reliquum vt FH ad DI: figura igitur HGB ad IBC figuram, triplicatam habet rationem HB ad IC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCLXXXII.

ESto ABC parabolæ diameter BD, vtcunque diuisa in D & E, sic vt nec BE nec BD sit æqualis lateri recto diametri BD; & per E & D, ordinatim positis AC, FG, describantur per A, B, C, & F, B, G, puncta ellipses quarum coniugatæ sint diametri AC, BD, FG, BE.

Dico ABC parabolam esse ad parabolam FBG, vt ABC ellipsis ad ellipsim FBG.

Demonstratio.



IVngantur ABC, FBG; vt ABC triangulum ad triangulum FBG, sic ABC [a] parabola est ad parabolam FBG: sed & ABC ellipsis est ad ellipsim FBG, vt ABC [b] triangulum ad triangulum FBG: igitur vt parabola ABC est ad parabolam FBG, sic ABC. Quod erat demonstrandum.

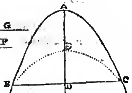
a 240. huius.

b D. ellips.

PROPOSITIO CCLXXXIII.

PArabolam ABC subtendat recta quæuis BC, oportet super illam describere parabolam quæ ad ABC parabolam datam habeat rationem F ad G.

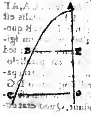
Constructio & demonstratio.

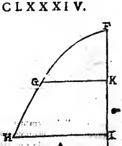


DIuisa BC bifariam in D, erigatur diameter DA, quæ diuidatur in E, vt AD sit ad DE sicut G est ad F; tum per B, E, C puncta parabola describatur cuius diameter sit DE, & ordinatim ad illam applicata BC. dico factum esse quod petitur. Quoniam ABC, BEC parabolę communem subtensam habent BC, parabola BEC ad ABC, parabolam est, vt ED [c] linea ad lineam AD, id est vt F ad G.

c Coroll. 240. huius.

PROPOSITIO CCLXXXIV.

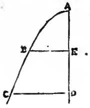


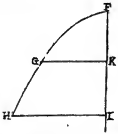


ESto ABC parabolæ diameter AD, diuisa vtcunque in E & D, & ordinatim positæ BE, CD. sit autem & FGH parabolæ diameter FI vtcun-

vtcunque diuisa in I & ordinatim posita H I. oportet F H G parabolam iterum diuidere sicut A B C parabola diuisa est.

Constructio & demonstratio.





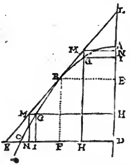
Fiat vt A D ad A E, sic F I ad F K, & ex K ordinatim ponatur K G: dico factũ esse quod petitur. Quoniam est vt A E ad A D, sic F K ad F I, erit & G K ad H I, vt B E ad C D: sed B A E parabola ad parabolam C A D a in triplicata est ratione lineæ B E ad C D, & G F K parabola ad parabolam H F I in triplicata ratione G K ad H I, igitur vt parabola B A E ad C A D, parabolam, sic G F K est ad parabolam H F I. perfecimus igitur quod fuit postulatum.

a 241 huius.

PROPOSITIO CCLXXXV.

Sit ad A B C parabolæ diametrum A D, ordinatim posita D C: diuisaq; A D in E, vt E D dupla sit A E, ponatur ex E ordinatim E B, & ex B, demittatur diameter B F, occurrens rectæ D C in F.

Dico parallelogrammum D E B F maximum esse illorum, quæ in angulo E B F, parabolæ A B C D terminatæ inscribi possunt.



Demonstratio.

Inscribatur enim quodcunque parallelogrammum I G H habens angulum I G H æqualem angulo E B F: agaturque per B contingens L K, occurrens A D diametro in L, & D C lineæ in K, rectæ verò H G in M; ex quo recta ponatur M N æquidistans G I. Quoniam B L est contingens, & E B ordinatim posita, rectæ L A, A E b æquales sunt; adeoque tota L E, æqualis est E D quæ dupla ponitur A E: vnde L K in B quoque bifariam est diuisa: parallelogrammum igitur D B maius est c parallelogrammo D M: sed parallelogrammum D M maius est parallelogrammo D G: quia punctum M cadit extra parabolam; parallelogrammum igitur D B, multo maius est parallelogrammo D G: idem demonstratur de quouis alio; parallelogrammum igitur D B maximum est eorum quę A B C parabolæ terminatę in angulo E B F, inscribi possunt. Quod erat demonstrandum.

b Ex 17. huius.

c Ex elementis.

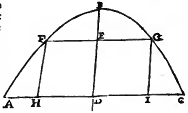
PRO-

PROPOSITIO CCLXXXVI.

Datæ parabolæ terminatæ maximum inscribere parallelogrammum.

Constructio & demonstratio.

Sit ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim posita AC; oportet parabolæ ABC maximum inscribere parallelogrammum. diuisâ DB in E, vt ED dupla sit EB, ponatur per E ordinatim linea FG, & ex F & G diametri demittantur FH, GI occurrentes AC lineę in H & I. Manifestũ est ex præcedenti propositione, parallelogrammum HGIF esse id quod quæritur.



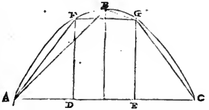
PROPOSITIO CCLXXXVII.

Datæ parabolæ terminatæ, polygonum regulare inscribere, quod dato laterum constet numero.

Polygonum regulare voco, cuius singula latera segmenta auferunt æqualia, præter subtensam.

Constructio & demonstratio.

Parabolam datam ABC subtendat AC, oporteat ABC parabolæ, polygonum regulare inscribere, quatuor constans lateribus. secetur AC in D & E, trifariam, & ex D & E diametri ponantur DF, EG, iunganturque AF, FG, GC: dico AFGC polygonum satisfacere petitioni. cùm enim AD, DE, EC lineæ ęquales sint, segmenta quoque AF, FG, GC æqualia sunt: polygonum igitur regulare est quadrilaterum AFGC inscripsimus igitur, &c. quod erat faciendum.



PROPOSITIO CCLXXXVIII.

Iisdem positis:

. Dico AFGC quadrilaterum esse maximum illorum quæ ABC parabolæ terminatæ inscribi possunt.

Demonstratio.

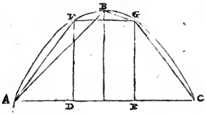
Inscribatur enim aliud quoduis quadrilaterum ABGC: quod primò quidem latus CG commune habeat cum quadrilatero AFGC: quoniam igitur AF, FG æqualia sunt segmenta, [a] minora illa sunt segmentis AB, BG: residua igitur figura rectilinea AFGC maior est figura rectilinea ABGC: similiter ostenditur quadrilaterum quoduis aliud minus esse quadrilatero AFGC: maximum igitur illud est eorum quæ ABC parabolæ terminatæ inscribi possunt.

a 165. huius.

Corollarium.

QVæ de quadrilatero regulari dixi, eadem de quotuis laterum polygono regulari intelligenda sunt: eademque omnibus constructio & demonstratio conuenit.

PROPOSITIO CCLXXXIX.



DAtæ parabolæ terminatæ, polygonum inscribere maximum illorum quæ dato numero laterum inscribi possunt.

Constructio & demonstratio.

INscribendum sit parabolę, maximum quadrilaterum: inscribatur ABC parabolæ quadrilaterum regulare AFGC: dico illud esse maximum eorum quæ pari numero laterum, parabolæ inscribi possunt. Demonstratio ex præcedenti manifesta est.

P A-

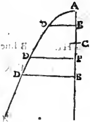
PARABOLÆ
PARS SEPTIMA

Varias exhibet geneses, quæ tum è lineis, circulis, ellipsibus, tum ex ipsa oriuntur parabola.

PROPOSITIO CCXC.

ESto AB linea vtcunque diuisa in C; ponantur autem ad AB rectæ quotcunque BD inter se æquidistantes: vt CAB rectangulis æqualia sint quadrata BD.

Dico puncta A, D, D esse ad parabolam cuius latus rectum est AC.



Demonstratio.

VT AB linea ad AB, sic[a] CAB rectangulum ad rectangulum CAB: sed CAB rectangulis æqualia ponuntur quadrata BD, quadratum igitur BD est ad quadratum BD, vt AB linea ad lineam AB: puncta igitur A, D, D, sunt ad[b] parabolam, cuius latus rectum AC. Quod fuit demonstrandum.

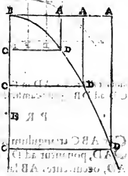
a 1. Sexti.

b Ex 1. huius.

PROPOSITIO CCXCI.

ESto angulus quicunque ABC: sumptoque in BC latere, quouis puncto E, fiant proportionales EB, BA, AD; & AD quidem æquidistent lateri BC:

Dico B, D, D esse ad parabolam cuius latus rectum est BE.



Demonstratio.

DVcantur DC parallelæ AB: quoniam igitur CD æquatur AB, rectæ EB; CD, BC in continua sunt analogia; & EBC rectangulis æqualia quadrata CD: quare per præcedentem, puncta B, D, D, ad parabolam sunt, cuius latus rectum est BE.

PROPOSITIO CCXCII.

EAdem manente figura: sit iterum angulus ABC, & BC lateri quotcunque eductæ parallelæ AD: fiat autem vt AB quadratum ad quadratum AB, sic AD linea ad lineam AD.

Dico B, D, D, puncta esse ad parabolam.

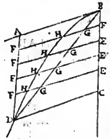
Demon-

Demonstratio.

POnantur iterum DC parallelæ AB. erit igitur DC quadratum ad quadratum DC, vt AD linea ad lineam AD, id est BC ad BC; puncta igitur B, D, D,[a] ad parabolam sunt.

[a] Ex 1. huius.

PROPOSITIO CCXCIII.



ESto ABCD parallelogrammi diameter BD, quam in G, secent lineæ quotcunque EF, parallelæ lateri AB. fiant autem proportionales FE, HE, GE.

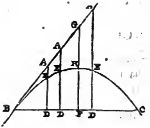
Dico B, H, H puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

QVoniam FE lineæ æquales sunt, rectangulũ FEG ad FEG rectangulum est vt GE linea ad lineam GE, id est vt BE ad BE. sed FEG rectangulis æqualia ponuntur quadrata HE, quadratum igitur HE est ad quadratum HE, vt EB linea ad lineam EB: quare B, H, H, ad [b] parabolam sunt.

[b] Ibid.

PROPOSITIO CCXCIV.



LAtera anguli ABC, secent quotcunque parallelæ AD: quæ diuidantur in E, vt DE sit ad EA, sicut CD est ad DB.

Dico B, E, C, puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

DIuisâ BC bifariam in F, erigatur FG parallela AD: seceturque FG bifariam in H. dein per B, H, C describatur parabola quæ in B contingat AB lineam, diuidet illa rectas AD in E punctis, vt DE ad EA, eam habeant[c] rationem quam CD ad DB: quare cùm sic diuisæ ponantur, erunt puncta BEC ad parabolam.

[c] 63 huius.

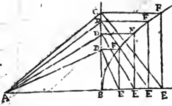
PROPOSITIO CCXCV.

SIt ABC triangulum rectangulum, ductisq; ex A lineis quotcunque AD, ponantur ad D, lineæ DE, DF: & DE quidem normales ad AD, occurrentes AB lateri producto in E: DF verò normales ad CB: occurrant autem DF lineis in F, rectæ EF parallelę lateri CB.

Dico B, F, F, esse ad parabolam cuius latus rectum est AB.

Demonstratio.

CVm enim anguli A D E ponantur recti, & D B linea normalis ad A B, rectangulis A B E a æqualia sunt quadrata D B, id est F E: sed A B E rectangula illa inter se seruant proportionem, quam lineæ B E: igitur vt B E ad B E, sic E F quadratum ad quadratum E F. vnde B F F sunt b ad parabolam cuius c latus rectum A B. Quod erat demonstrãdum.



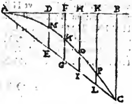
a Ex elementis.
b Ex 1. huius.
c Ex 9. huius.

PROPOSITIO CCXCVI.

SEcent A B C triangulum, rectæ quotcunque D E, F G, H I, K L: lateri B C parallelæ; fiant autem continuæ proportionales B C, K L, K P: item B C, H I, H O: item B C, F G, F N: denique B C, D E, D M. Dico puncta A, M, N, O, P, C, esse ad parabolam.

Demonstratio.

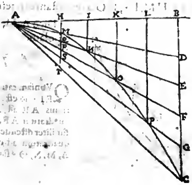
QVoniam B C linea communis prima est, seriebus continuarum B C, K L, K P: B C, H I, H O: B C, F G, F N, &c. rectangula B C K P, B C H O, B C F N, B C D M illam sortiuntur rationem quam habent lineæ K P, H O, F N, D M. igitur & quadrata K L, H I, F G, D E eandem quoque seruant proportionem: sed vt K L quadratum, ad quadratum H I, sic K A quadratum est ad quadratum H A, & vt H I quadratum ad quadratum F G, sic H A quadratum est ad quadratum F A, &c. igitur & quadrata A K, A H, A F, A D illam habent rationem quam lineæ H P, H O, F N, D M. puncta igitur A, M, N, O, P ad d parabolam sunt.



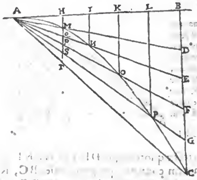
d Ex 91. huius.

PROPOSITIO CCXCVII.

ESto A B C trianguli latus B C vtcunque diuisum in punctis D, E, F, G, iunctisq; A D, A E, A F, A G, diuidatur latus A B in punctis H, I, K, L sicut B C est diuisum in D, E, &c. demittantur autem ex H, I, K, L rectæ H M, I N, K O, L P parallelæ lateri B C: & H M quidem occurrat A D in M; I N verò ipsi A E in N: dein K O, rectæ F A in O, & L P, ipsi A G in P. Dico A, M, N, O, P, C esse ad parabolam.



Demon-



Demonstratio.

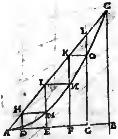
PRoducta HM, occurrat lineis AD, AE, AF, AG in Q, R, S, T; quoniam est AH ad AI, vt BD ad BE, ex hypothesi; sit autem vt BD ad BE, sic HM ad HQ, HM est ad HQ, vt AH ad AI, id est vt HQ ad IN; proportionales igitur sunt HM, HQ, IN. similiter ostenduntur proportionales HM, HR, KO: item HM, HS, LP, denique HM, HT, BC: quare rectangula HMIN, HMKO, HMLP, &c. illam inter se proportionem habent, quam HQ, HR, HS quadrata: sed est vt HQ quadratum ad quadratum HR, sic BE quadratum ad quadratum BF, id est per hypothesim AI quadratum ad quadratum AK: & vt HR quadratum ad quadratum HS, sic quadratum BF, ad quadratum BG, id est quadratum AK ad quadratum AL: igitur & rectangula HMIN, HMKO, HMLP eam inter se seruant rationem quam AI, AK, AL quadrata: sed rectangula HMIN, HMKO, HMLP sunt vt lineę IN, KO, LP: igitur & quadrata AI, AK, AL eam inter se habent proportionem, quam lineæ IN, KO, LP. quare [a] A, M, N, O, P sunt ad parabolam. Quod erat demonstrandũ.

a *Ibid.*

PROPOSITIO CCXCVIII.

ESto ABC trianguli latus AB diuisum in D, E, F, G punctis vt ratio AD ad AE, duplicata sit rationis AE ad AF, & illa rursum duplicata sit rationis AF ad AG, &c. dein ex D, E, F, G punctis rectæ erigantur DH, EI, FK, GL parallelæ lateri CB: quas in M, N, O secent lineæ HM, IN, KO æquidistantes lateri AB.

Dico A, M, N, O, C puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

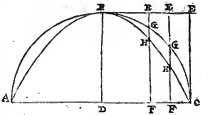
QVoniam ratio AD ad AE, id est DH ad EI; id est EM ad FN, duplicata est rationis AE ad AF, quadratum AE est ad quadratum AF, vt EM linea ad lineam FN. similiter ostendetur esse vt FN ad GO, sic AF quadratum ad quadratum AG: puncta igitur A, M, N, O [b] sunt ad parabolam.

b *Ibid.*

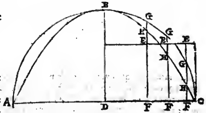
PRO-

PROPOSITIO CCXCIX.

SEmicirculum ABC fecet orthogonaliter in D diametri duæ AC, BD. ponatur autem EE linea parallela AC: dein sumptis in AC punctis FF, erigantur normales FE, occurrentes EE lineæ in E, semicirculo in GG. fiant autem proportionales EF, GF, HF.



Dico H, H, C puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

CVm enim proportionales sint EF, GF, HF, erit vt quadratum FG ad quadratum FG, sic EFH rectangulum ad rectangulum EFH: sed EFH rectangula illam inter se habent rationem, quam lineæ HF; igitur & HF lineæ sunt vt quadrata GF: id est vt AFC rectangula, puncta igitur H, H, C ad parabolam sunt.

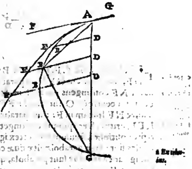
Idem continget in ellipsi, si AC, BD *diametri ponantur coniugatæ, &* EF *æquidistantes ipsi* BD.

PROPOSITIO CCC.

SEgmentum circuli ABC subtendat recta AC, quam in D secent quotcunque DE, parallelæ contingenti FG per A ductæ: fiat autem vt AB ad AB, sic DE ad DE.

Dico A, E, E puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



IVngantur AB, BC: quoniam FG contingens est, angulus CAG æquatur angulo ABC; sed angulo CAG æqualis est angulus ADB, quia FG, DE æquidistant; angulo igitur ABC æqualis est angulus ADB; & triangula ABC, ABD, similia sunt. quare vt AD ad AB, sic AB ad AC; & DAC rectangulo æquale est quadratum AB. quadratum igitur AB est ad quadratum AB, vt DAC rectangulum ad rectangulum DAC, id est vt DA linea ad lineam DA: sed AB quadratis æqualia sunt quadrata DE, quadrata igitur DE eam habent rationem, quam obtinent lineæ DA. [a] quare A, E, E puncta ad parabolam sunt.

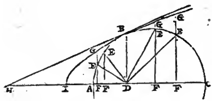
[a] Ex vlti- ma.

PRO-

PROPOSITIO CCCI.

Assumptum sit in A B C semicirculi diametro A C, punctum quodcunque D, quod centrum non sit, & ex D ad peripheriam, rectæ ducantur D E: aganturque per E, lineæ G F, normales ad diametrum A C, & D E rectis æquales.

Dico G G puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

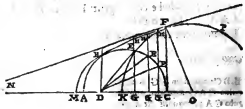
Erigatur ex D linea D B normalis ad diametrum A C: actaque per B contingente, quę A C, diametro occurrat in H, secetur H D bifariam in I: & per I & B, describatur parabola habens I C axem, occurrensque rectis F E in G. Quoniam D B, ordinatim posita est ad axem I C, & D I, I H lineæ æquales, continget H B linea [a] parabolam in B: quia verò in eodem puncto, eadem recta circulum contingit, contingent quoque sese in eodem puncto [b] circulus & parabola. quare D E lineis [c] æquales sunt rectæ F G. Igitur cùm F E G lineę normales ad diametrum A C, rectis D E, ponantur æquales, puncta G, G ad [d] parabolam sunt: cuius apicem assignat punctum in quo H D diuiditur bifariam.

a Ex 17. huius.
b Ex 131. huius.
c 134. huius.
d Ex conuersa 134. huius.

PROPOSITIO CCCII.

Parabolam priori propositione productam in infinitum eadem praxi extendere.

Constructio & demonstratio.



Fiat C D, æqualis C F, parallela B D: erit F ad parabolam M B H, cùm omnes D E, translatæ [e] in G E H ad parabolam sint. factâ deinde C M, æquali M N, [f] ponatur N F contingens parabolam, & erigatur F O perpendicularis ad N F contingentem; centroque O interuallo F O circulus describatur; continget ille [g] parabolam, & N F lineam in F: tum parabola describatur, [h] quæ ex descripto iam circulo K F P, oritur; hæc quoque continget circulum K F P & N F, lineam in F, vt in priori propositione ostensum est; vertex igitur eiusdem est in M, cùm M C, C N lineæ æquales sint: ergo parabolæ illæ duæ communem habent verticem M, & punctum F: vna igitur eademque sunt parabola, quæ per vtrumque circulum est descripta: ergo circulus K F P parabolam priori praxi descriptam producit: atque ita eadem parabola eâdem praxi in infinitum continuabitur. Quod erat propositum.

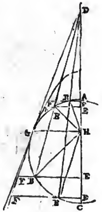
e 301. huius.
f Ex 17. huius.
g 131. huius.
h Ex 301. huius.

PRO-

PROPOSITIO CCCIII.

Esto circuli ABC diameter AC, vtcunque producta in D, ex quo in circulum immittantur lineæ DB; aganturq; ad AC per B normales FE proportionales ipsis DB. quarum termini sint FF.

Dico FF puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

Dvcatur ex D linea DG, contingens circulum in G, & ex G, ponatur GH normalis ad AC, iunganturque HB, igitur DB [a] ad DB est vt BH ad BH. sed BH translatæ in FE, producant [b] parabolam, igitur & ipsis DB id est BH, proportionales in eundem locum translatæ, producunt quoque parabolam.

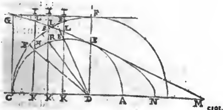
a Ex 15. & 36 lib. nostri de circulo. b 301. huius.

PROPOSITIO CCCIV.

Assumptum sit in ABC circuli diametro AC, punctum quodcunque D, extra centrum. radio autem DC, quadrans describatur circuli CEF, perficiaturque quadratum FDC. tum ex D rectæ ducantur quotcunque DE, occurrentes circulo ABC in H, & CEF quadranti in E: & per H agantur normales IK ad AC, fiantq; HE lineis, æquales LI.

Dico L,L puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



Qvoniam FDC quadratum est, & D, centrum circuli CEF, rectæ DE, lineis IK æquales sunt: ponuntur autem ipsis HE, æquales LI, reliquę igitur LK, reliquis HD æquales sunt. sed HD translatæ [c] in KL ad parabolam sunt; igitur L,L puncta iam quoque sunt ad parabolam.

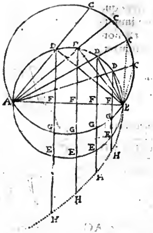
c 301. huius.

Corollarium.

Porro vertex huius parabolæ sic inuenitur. erectâ ex D normali DB, per B agatur contingens BM: dein MD diuidatur bifariam in N: patet N [d] esse verticem parabolæ.

d Ex 17. huius.

PROPOSITIO CCCV.



INtersecent sese in A & B, circuli duo quiuis ABC, ADB: ductisque ex A lineis, ADC, demittantur ex D rectæ DEF orthogonaliter secantes AB diametrum in FF. fiat autem vt DC ad DC, sic FH ad FH.

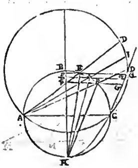
Dico B,H,H puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

IVngantur DB,CB: erunt igitur triangula DCB similia: quare vt DC ad DC, sic DB ad DB; sed DB translatæ in a FH producunt parabolam, igitur & DC translatæ in FH, sectionem producunt parabolicam.

a 300. huius.

PROPOSITIO CCCVI.



OCcurrant sibi inuicem circuli duo ABC, ACD in A & C, & ABC quidem circulus transeat per centrum circuli ACD, ducanturq; ex A rectæ AED, occurrentes circulo ABC in E, & ACD in D: ponantur autem per EE ad HB, normales FG, quæ æquales vel proportionales sint lineis AD.

Dico puncta G,G esse ad parabolam.

Demonstratio.

DVctâ AC, ponatur BH diameter, normalis ad diametrum AC, iunganturq; puncta HE, erit igitur AD ad AD lineam, b vt HE ad HE, sed vt AD ad AD, sic FG est ad FG per hypothesim; igitur & FG est ad FG, vt HE ad HE; sed HE translatæ in FEG producunt c parabolam, igitur & AD translatæ in FEG parabolam producunt.

b 13. De circulo.

c 300. huius.

Corollarium.

APex verò inuentæ parabolæ GG, est punctum H: nam FG quadratum est ad quadratum FG vt HE quadratum, ad quadratum HE, id est vt FH linea ad lineam FH. vnde H, vertex est parabolæ.

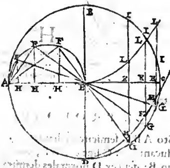
PRO-

PROPOSITIO CCCVII.

Circulum ABC, orthogonaliter in E diuidant diametri duæ AC, BD: descriptoq; super AE vt diametro, semicirculo AFE, agantur per E rectæ quotcunque FG, & ex F & G, lineæ demittantur FH, GI normales ad diametrum AC, quam GI secent in K. fiat autem vt AH ad AH, sic KM ad KM, incipiendo ex parte versus C, item vt EH ad FH, sic KL ad KL incipiendo ex parte E.

Dico puncta D,M,M, item E,L,L esse ad parabolas.

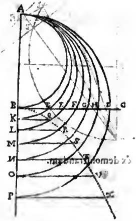
Demonstratio.



IUngantur AF: Quoniam FH, GK æquidistant, triangula FHE, EKG sunt similia; est autem & FHE triangulum simile triangulo AFE; igitur & AFE, EKG triangula similia sunt. quia verò AE æqualis est EG, triangula AFE æqualia sunt triangulis EGK, & AF,FE latera, æqualia lateribus GK, KE: vnde vt AF quadratum ad quadratum AF, id est GK quadratum ad quadratum GK, sic AH linea ad lineam AH, id est per hypothesim KM ad KM. sed est vt GK quadratum ad quadratum GK, sic AKC rectangulum ad rectangulum AKC; igitur vt AKC rectangulum ad rectangulum AKC, sic MK linea est ad lineam MK: a quare D,M,M puncta ad parabolam sunt. Quod erat primum. a Ex conuersa 47. huius.

Rursum cùm sit vt EH ad EH, sic LK ad LK, sit autem vt EH ad EH, sic EF quadratum ad quadratum EF, id est EK quadratum ad quadratum EK; erit & LK linea ad lineam LK, vt EK quadratum ad quadratum EK: vnde ELL b puncta sunt ad parabolam. b 291. huius

PROPOSITIO CCCVIII.



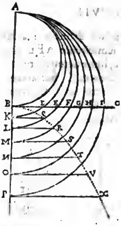
SInt ad AB diametralem quotcunque descripti circuli contingentes sese in eodem puncto A, quorum diametri AB, AK, AL, AM, &c. ductaq; ex B linea BC, contingat circulum minimum in B, reliquos autem secet in D, E, F, G, H; fiant autem lineis BD, BE, BF, BG, &c. æquales rectæ KQ, LR, MS, NT, &c. quæ circulos contingant in LMNO, &c.

Dico B, Q, R, S, T, V puncta esse ad parabolam cuius AB, latus rectum.

Demonstratio.

QUoniam BD normalis est ad communem diametralem AB, quadratum BD, & ad quadratum BE vt ABK rectangulum ad rectangu-

 lum



lum ABL, id est (quia circuli contingunt sese in A) vt BK linea est ad lineam BL. igitur & quadratum KQ est ad quadratum LR, vt BK linea ad lineam LB: (cùm LR, KQ lineæ æquales sint BD, BE) eodem modo ostenditur MS quadratum esse ad quadratum NT, vt BM linea est ad lineam BN, & sic de cæteris: puncta igitur B, Q, R, S, T, &c. sunt ad parabolam. AB ergo latus rectum esse patet, cum semper quadrata DK, RK, &c. æqualia sint rectangulis super KB, BA, LB, BA, &c.

Corollarium.

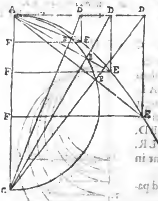
Hinc facilis patet praxis, producendi in infinitum parabolam, priori methodo ortam: cùm enim in infinitum multiplicari possint circuli illi contingentes, & BC lineæ protendi, poterit quoque in infinitum continuari praxis qua priùs parabolam produxi; adeoq; eadem poterit in infinitum extendi.

PROPOSITIO CCCIX.

Esto ABC semicirculi diameter AC, actáq; per A contingente AD, ducantur ex C lineæ CBD, occurrentes contingenti in D, semicirculo in B: dein ex D normales demittantur DE quas in E secent lineæ B, AE.

Dico puncta A,E,E esse ad parabolam cuius latus rectum AC.

Demonstratio.



Ponantur enim EF æquidistantes AD. quoniam AD contingens transit per A extremum diametri AC, angulus CAD rectus est: sed & angulus quoque ABC in semicirculo rectus est, triangula igitur ABD, ADC similia sunt: quia verò ED, normalis est ad AD, & DB normalis ad AE, triangula ADB ad ADE, similia quoque sunt, sed ADB simile est triangulo CAD, triangula igitur ADE, ADC similia quoque sunt. quare ED ad DA, vt DA ad AC: adeoque quadrato AD idest FE æquale rectangulum EDAC id est FAC. vnde FE quadratum est ad quadratum FE vt FAC rectangulum ad rectangulum FAC, id est vt FA linea ad lineam FA, puncta igitur A,E,E sunt ad parabolam. AC verò latus rectum esse patet ex demonstrandum.

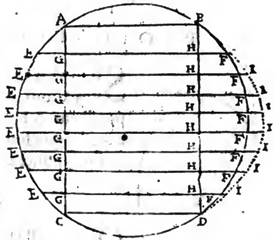
PROPOSITIO CCCX.

Esto circulo ABC inscriptum rectangulum ABCD, & vni laterum AB, ductæ parallelæ EGHF: fiant autem GH, HF, FI proportionales.

Dico puncta B,I,D esse ad parabolam.

Demonstratio.

Quoniam est vt GH ad HF, sic HF ad FI, erit componendo inuertendo vt GF, id est EH, ad GH, sic HI ad HF; rectangulo igitur EGF, id est EHF, æquale est rectangulum GHI: & GHI rectangulum ad rectangulum GHI, vt EHF rectangulum ad rectangulum EHF, id est BHD ad BHD, rectangulum; sed GHI rectangulum est ad rectangulum GHI vt HI linea ad lineam HI: igitur vt BHD rectangulum ad rectangulum BHD, sic HI linea ad lineam HI. puncta igitur BID ad parabolam sunt.



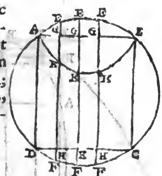
PROPOSITIO CCCXI.

Inscriptum sit circulo ABC rectangulum ABCD, ductisque vni laterum DA parallelis EGHF. fiant EGF rectangulis æqualia rectangula HGK.

Dico puncta AKB esse ad parabolam.

Demonstratio.

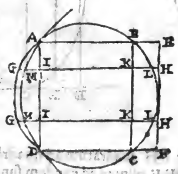
Vt EGF rectangulum est ad rectangulum EGF, sic AGB rectangulum est ad rectangulum AGB: igitur & HGK rectangulum est ad rectangulum HGK vt AGB ad AGB, rectangulum. sed HGK rectangulum est ad rectangulum HGK vt GK linea ad lineam GK; igitur & AGB rectangulum est ad rectangulum AGB, vt GK linea ad lineam GK; puncta igitur A,K,B ad parabolam sunt. Quod erat ostendendum.



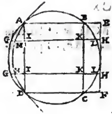
PROPOSITIO CCCXII.

Inscriptum sit iterum rectangulum ABCD, circulo ABC, ductaq; lateri BC parallela EF, quæ circulum contingat, ponantur rectæ GH, æquidistantes lateri AB: fiantque GIL rectangulis, æqualia rectangula HIM.

Dico A,M,D puncta esse ad parabolam.



Demon-

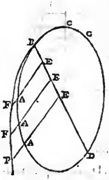


a Ex 47. huius.

Demonſtratio.

CVm æqualia ſint rectangula HIM, rectangulis GIL, HIM rectangulum ad HIM rectangulum eſt vt GIL ad GIL, id eſt AID rectangulum ad rectangulum AID: ſed HIM rectangulum eſt ad rectangulum HIM, vt IM linea ad lineam IM, igitur vt AID rectangulum ad rectangulum AID, ſic IM linea ad lineam IM. puncta igitur M,M a ſunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXIII.



SIt in ABC ellipſi vna ex diametris coniugatis æqualibus, diameter BD, ad quam ordinatim ponantur AE. fiant autem quadratis AE, EB æqualia quadrata EF.

Dico puncta B,F,F eſſe ad parabolam.

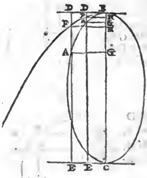
Demonſtratio.

b 176. De ellipſ.

QVoniam BD vna eſt è diametris coniugatis æqualibus, quadrata AE æqualia ſunt b rectangulis BED: addito igitur quadrato BE, quadrata duo AE, EB æqualia ſunt rectangulis EBD. igitur FE quadratum eſt ad quadratum FE, vt EBD rectangulum ad rectangulum EBD, id eſt vt EB linea ad lineam EB. igitur B,F,F puncta ſunt ad parabolam.

Circulo quoque conuenit hæc propoſitio, eademq́; eſt demonſtratio.

PROPOSITIO CCCXIV.



ESto ABC ellipſeos diameter BC, quam in B & C, contingant rectæ DB, EC: poſitiſque DE parallelis diametro BC. fiant DAE rectangulis æqualia rectangula EDF.

Dico B,F,F puncta eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

DVcantur AG,FH parallelæ DB, patet AG ordinatim eſſe poſitas ad BC. igitur DAE rectangulum eſt ad rectangulum DAE, id eſt BGC ad BGC, vt AG, quadratum ad quadratum AG, id eſt FH quadratum ad quadratum FH: igitur & FDE rectangulum eſt ad rectangulum FDE, id eſt HBC ad HBC rectangulum, vt FH quadratum ad quadratum FH. ſed HBC rectangulum eſt ad rectangulum HBC, vt HB linea ad lineam HB, igitur vt FH quadratum ad quadratum FH, ſic HB linea ad lineam HB. puncta igitur B,F,F puncta ad eandem ſunt parabolam.

PRO-

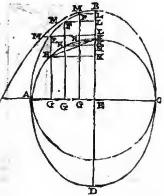
PROPOSITIO CCCXV.

Sint ABC ellipseos axes AC,BD; & super AC minore axe, vt diametro, descriptus sit circulus AKC, quem in H secent lineæ FG, parallelæ axi BD: iunctisque punctis HK, ponantur FL normales ad axem BD, fiantque F, LM æquales HK.

Dico B,M,M puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

Ponantur HN, parallelæ FL: & E centrum, sit commune circulo & ellipsi; erit igitur vt BE ad KE, sic FG ad HG, id est LE ad NE, & permutando vt BE ad LE, sic KE ad NE; quare & KE ad NK, est vt BE ad LB, & permutando vt BE ad KE, sic BL ad KN, & BL est ad BL, vt KN ad KN: sed est vt KN ad KN, sic HK quadratum ad quadratum HK, id est per hypothesim vt ML quadratum ad quadratum ML; igitur vt BL lineaad lineam BL, sic ML quadratum ad quadratum ML. quare B,M,M puncta sunt ad parabolam.

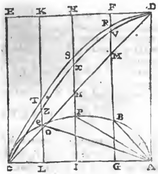


PROPOSITIO CCCXVI.

Svper ABC ellipseos axe AC quadratum constituatur AE, cuius diameter CD occurrat rectis FG, HI, LK lateri AB parallelis, in M,N,O. fiat autem AG quadrato, æquale rectangulum GFR, & AI quadrato æquale rectangulum SHI, dein & quadrato AL æquale rectangulum TKL.

Dico D,R,S,T puncta esse ad parabolam.

Assumitur in propositione ellipsis, ob sequentes propositiones.



Demonstratio.

Rectangulum RFG est ad rectangulum SHI vt RF ad SH; & SHI rectangulum est ad rectangulum TKL vt SH linea ad lineam TK: igitur & quadrata AG, AI, AL, id est DF, DH, DK, eam inter se continent rationem, quam sectæ RF, SH, TK. quare D, R, S, T puncta ᵃ ad parabolam sunt. ᵃ 191. huius

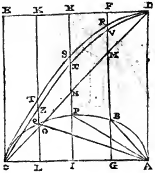
PRO-

PROPOSITIO CCCXVII.

Iisdem positis: fiant BG, PI, QL quadratis, æqualia rectangula GFRV, HISX, KLTZ.

Dico puncta D, X, V, Z. esse ad parabolam.

Demonstratio.



Rectangulum GFRV ad rectangulum HISX est vt RV linea ad lineam SX: igitur & quadratum GB est ad quadratum PI, vt RV linea ad lineam SX: sed vt BG quadratum ad quadratum PI, sic AGC rectangulum est ad [a] rectangulum AIC, igitur vt RV ad SX lineam, sic AGC rectangulum ad rectangulum AIC, id est DMC rectangulum ad rectangulum DNC, id est MR [b] linea ad lineam SN, quia RST ostensa est parabola; igitur & MV est ad XN, vt DMC reetangulum ad reetangulum DNC. similiter ostendam esse XN ad ZO, vt DNC reetangulum ad rectangulum DOC; puncta [c] igitur V, X, Z ad parabolam sunt.

[a] 4. De ellipsi.
[b] 47. huius.
[c] Ex 45. huius.

PROPOSITIO CCCXVIII.

Iisdem positis: iungantur AB, AP, AQ: fiantq; rectangula GFV, IHX, LKZ æqualia quadratis AB, AP, AQ.

Dico V, X, Z puncta rursum esse ad parabolam.

Demonstratio.

Quoniam BG, PI, QL, normales sunt ad AC, quadratum AB æquale est quadratis AG, GB: sed GB quadratum æquale positum est reetangulo GFRV, & AG quadratum æquale rectangulo GFR: igitur quadratum AB id est rectangulum GFV, æquale est reetangulis GFR, GFRV: similiter ostenditur reetangulum IHX, æquale esse reetangulis IHS, IHSX: & LKZ reetangulum æquari reetangulis LKT, LKTZ. sed cùm GFR, GFRV reetangula æqualia ponebantur quadratis AG, GB: & IHS, IHSX, æqualia quadratis AI, IP, &c. ostensa sunt V, X, Z esse [d] ad parabolam; igitur & iam ad parabolam sunt.

[d] 316. & 317. huius.

PROPOSITIO CCCXIX.

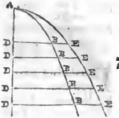
Sit ABC parabolæ diameter AD: & ordinatim ad illam positæ DB: fiat autem vt DB ad DB, sic DE ad DE.

Dico AEE esse ad parabolam.

Demon-

Demonstratio.

Est enim ED quadratum ad quadratum ED vt DB quadratum ad quadratum DB ex hypothesi, id est vt AD linea ad lineam AD; puncta igitur E,E ad [a] parabolam sunt.



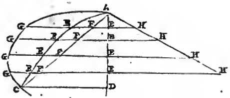
[a] Schol. 1. huius.

PROPOSITIO CCCXX.

Sit ABC parabolæ diameter AD, & ordinatim positæ CD, BE: ductaq; linea AC quæ BE rectis occurrat in FF, fiat vt FB ad FB, sic BG ad BG.

Dico G,G puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

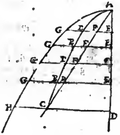


Fiat vt BF ad BG, sic FE ad EH: quoniam est vt FB ad FB, ita BG ad BG, erit permutando vt FB ad BG, sic FB ad BG: sed per construct. FE est ad EH, vt FB ad BG, ergo FE est ad EH, vt FE ad EH; igitur cùm puncta EE in directum sint, puncta quoque HH in directum sunt, vt patet ex elementis: deinde quia est vt FB ad BG, sic FE ad EH, erit componendo, conuertendo GF ad BF, vt FH ad FE, & permutando GF ad FH, vt BF ad EF, & componendo GH ad FH, vt BE ad FE, iterumque permutando GH ad BE, vt FH ad FE, sed cùm antè ostenderim esse FE ad EH, vt FE est ad EH; erit quoque vt FH ad FE, sic FH ad FE, ergo vt GH ad BE, sic GH ad BE, & permutando GH ad GH, vt BE ad BE: igitur & quadratum GH ad GH quadratum est, vt quadratum BE ad quadratum BE, hoc est vt EA ad EA, hoc est, vt AH ad AH, punctaigitur GG ad parabolam sunt, cuius diameter AH.

PROPOSITIO CCCXXI.

Ponantur eadem quæ priùs, & fiant FE lineis æquales rectæ BG.

Dico iterum A, G, G esse ad parabolam.



Demonstratio.

Cvm enim FE lineis æquales ponantur GB, additis communibus BF, rectæ FG æquales sunt FE, & FG quadrata æqualia quadratis BE: igitur quadratum FG ad quadratum FG est vt BE quadratum ad quadratum BE, id est vt AE linea ad lineam AE, id est AF ad AF.

 puncta

puncta igitur A, G, G ad parabolam sunt, cuius diameter AFC.

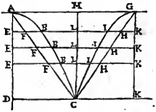
Si verò FG lineæ proportionales sint ipsis FE; ostenditur vt in præcedenti propositione, A, G, G esse ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXII.

Parabolam ABC cuius diameter AD, contingat in D linea AG: ponantur autem ordinarim lineæ BE, CD; iunctaque AC occurrat BE lineis in F. dein ductâ quacunq; CG ad AG; contingentem, quæ BE lineas productas secet in HH: fiat vt FB ad FB: sic HI ad HI.

Dico puncta I, I esse ad parabolam.

Demonstratio.



Fiant HI ad HK, vt BF ad FE: patet ex elementis GKK esse in directum; erit igitur HK ad HK, vt FE ad FE: & cùm sit IH ad HK, vt BF ad FE, erit componendo vt BE ad FE, sic IK ad HK, & vt BE ad BE, sic IK ad IK: vnde quadratum IK est ad quadratum IK, vt BE quadratum est ad quadratum BE, id est vt AE linea ad lineam AE, id est vt GK ad GK. puncta igitur G, I, I sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXIII.

Eadem manente figura: perficiatur parallelogrammum ADC, & MC, latus occurrat lineis EB in L: fiat autem vt LB ad LB, sic LI ad LI.

Dico puncta I, I esse ad parabolam.

Demonstratio.

Fiat AM ad MG, vt LB ad LI, & recta ducatur GC occurrens BI, lineis in HH. erit igitur vt LF ad LF, sic LH ad LH. sed ex hypothesi est LI ad LI, vt LB ad LB, igitur & HI est ad HI, residuum vt FB ad FB, residuum. vnde per præcedentem puncta I, I sunt ad parabolam.

PRO-

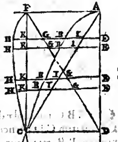
PROPOSITIO CCCXXIV.

ESto ABC parabolæ diameter AD, ad quam ordinatim ponantur CD, BE: perfectoque parallelogrammo DF, ducatur linea FD, secans EB rectas in GG: fiant autem GE lineis æquales G, BH.

Dico HH puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

IVngantur AC. quoniam DF parallelogrammum est cuius diametri AC, FD, & KE lineæ æquidistant lateri AF, lineis EG æquales sunt rectæ KI; igitur & HB lineis æquales sunt KI. demptis igitur communibus KB, manent IB, HK lineæ æquales: puncta igitur HH [a] ad parabolam sunt.



a 320. huius.

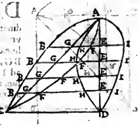
PROPOSITIO CCCXXV.

ESto ABC parabolæ diameter AD, ad quam ordinatim ponantur lineæ CD, BE, quas in G secet recta AC. descripta dein per A & C, parabolâ CFA quam in A recta contingat AD, & FB diameter sit, fiant FG lineis, proportionales EH, & rectis BG proportionales EI.

Dico tam H,H puncta quàm I,I esse ad parabolam.

Demonstratio.

ESt enim vt AGC rectangulum ad rectangulum AGC, sic AED rectangulum ad rectangulum AED; sed vt AGC rectangulum est ad rectangulum AGC, sic FG linea est ad [b] lineam FG, id est EH linea ad lineam EH: igitur & HE est ad HE, vt AED rectangulum ad rectangulum AED: similiter ostenditur, esse EI ad EI, vt AED rectangulum ad rectangulum AED: puncta igitur H,H vti & I,I, [c] puncta esse ad parabolas sunt.



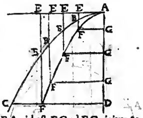
b 47. huius.

c 320. huius.

PROPOSITIO CCCXXVI.

PArabolam ABC contingat in A linea AE: ponatur autem sectionis diameter AD, & illi parallelæ EB: dein rectis EB proportionales fiant lineæ BF.

Dico A,F,F puncta esse ad parabolam.



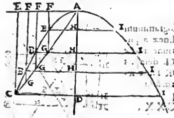
Demonstratio.

DVcantur FG parallelæ contingenti AE: cùm igitur sit vt EB ad EB, sic BF ad BF, erit quoque EF ad EF, vt EB ad EB. sed ratio EB ad EB, duplicata est rationis EA ad EA, id est FG ad FG: igitur & ratio EF ad EF, id est AG ad AG, duplicata est rationis GF ad GF: igitur A,F,F puncta sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXVII.

ESto ABC parabolæ diameter AD: actaq; per A contingente AE, demittantur diametri FB occurrentes parabolæ in B, & AC in G: ponantur autem ordinatim lineæ HB: fiatq; vt FG ad FG, sic B, HI ad B, HI.

Dico puncta A,I,I esse ad parabolam.



Demonstratio.

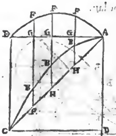
VT FG ad FG, sic AF est ad AF, id est HB ad HB: igitur & HI est ad HI, vt BH ad BH: & HI quadratum ad quadratum HI, vt HB quadratū ad quadratum HB, id est vt AH linea ad lineam AH: puncta igitur A,I,I ad parabolam sunt.

PROPOSITIO CCCXXVIII.

SIt ABC parabolæ diameter AD æqualis lateri recto: ductaque ordinatim CD perficiatur quadratum CA: sumptisque in peripheria punctis B,B, erigantur ex B diametri BF occurrentes AE lineæ in G: fiantque rectis AG æquales lineæ BF.

Dico A,F,E puncta esse ad parabolam.

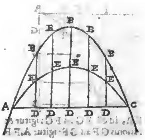
Demonstratio.



DVcatur recta AC occurrens FB lineis in HH: quoniam AD lateri recto æqualis est, & CD ordinatim posita ad AD, rectæ AD, CD, æquales sunt: vnde & rectæ AG, GH quoque æquales sunt: & HG lineæ æquales ipsis FB: demptis igitur communibus BG, manent HB, FG lineæ æquales: quare FG est ad FG, vt BH ad BH, id est vt AHC [a] rectangulum ad rectangulum AHC, id est AGE rectangulum ad rectangulum AGE: puncta igitur A,F,E ad parabolam sunt.

a 47. huius.

PROPOSITIO CCCXXIX.



PArabolam ABC subtendat recta AC, quam in D secent quotcunque diametri BD: fiant autem BD lineis proportionales DE.

Dico puncta A,E,C esse ad parabolam.

Demonstratio.

VT BD ad BD, sic ED est ad ED, sed est [b] vt BD ad BD, sic ADC rectangulum ad rectangulum ADC: igitur & ED est ad ED, vt ADC rectangulum ad rectangulum ADC: quare AEC puncta [c] ad parabolam sunt.

b Ibid.

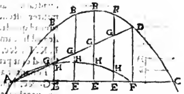
c Ex conuersa 47. huius.

PRO-

PROPOSITIO CCCXXX.

Parabolam ABC subtendant rectæ AC, AD, demissaque ex D diametro FD, quæ AC lineæ occurrat in F, ducantur quotuis rectæ BE æquidistantes DF secantes AD lineam in GG: fiantque rectis BG proportionales lineæ EH.

Dico puncta A,H,F esse ad parabolam.



Demonstratio.

Vt AGD rectangulum est ad AGD rectangulum a sic BG linea ad lineam BG: sed vt BG ad BG, sic EH ponitur ad lineam EH, igitur & EH est ad EH, vt AGD rectangulum ad rectangulum AGD, id est AEF rectangulum ad rectangulum AEF. quare A,H,F puncta b sunt ad parabolam.

a 47. huius

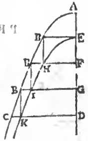
b Ex conuersa 47. huius.

PROPOSITIO CCCXXXI.

Esto ABC parabolæ diameter AD, diuisa in partes æquales, punctis E, F, G, D; ductisque ordinatim lineis EB, FB, GB, DC, demittantur ex B punctis diametri BH, BI, BK, conuenientes cum ordinatim positis in H, I, K.

Dico E,H,I,K puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



Quoniam diametri partes AE, EF, FG, &c. ponuntur æquales, EF est ad EG, vt AE ad AF: id est vt EB quadratum ad quadratum FB, id est FH quadratum ad quadratum GI. eodem modo ostendetur esse vt EG ad ED, sic GI quadratum ad quadratum DK. puncta igitur E, H, I, K sunt ad parabolam. Quod erat demonstrandum.

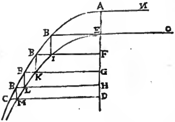
PROPOSITIO CCCXXXII.

Esto ABC parabolæ diameter AD, diuisa punctis E, F, G, H, D, vt AE, EF, FG, GH, &c. sint continuæ proportionales: ducantur autem ordinatim lineæ EB, FB, GB, &c. & ex B diametri demittantur conuenientes cum ordinatim positis.

Dico

Dico puncta E, I, K, &c. ad eandem esse parabolam: & si series continuarum AE, EF, FG, &c. maioris fuerit inæqualitatis; dico parabolas in aliquo puncto conuenire; si verò minoris fuerit inæqualitatis dico nusquam sectiones conuenire.

Demonstratio.

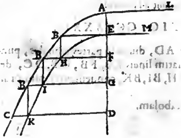


QVoniam AE, EF, FG, &c. proportionales sunt, EF est ad EG, vt AE ad AF; id est vt EB quadratum ad quadratum FB; id est FI quadratum ad quadratum GK. similiter ostenditur esse FI quadratum ad quadratum HL vt EF, linea ad lineam EH: puncta igitur E, I, K, L, &c. ad parabolam sunt. Quod erat primum.

Ponantur autem series AE, EF, FG, &c. maioris inæqualitatis: dico parabolas conuenire in aliquo puncto. sit enim ABC parabolæ latus rectum AN, & EIK parabolæ latus rectum EO: erit igitur quadratum EB æquale rectangulum EAN, & FI quadratum æquale rectangulum FEO: vnde cum EB, FI quadrata æqualia sint, rectangula quoque EAN, FEO sunt æqualia: quare cùm AE maior ponatur EF, erit AN latus rectum minus latere recto EO: adeoque parabolæ in aliquo puncto [a] conuenient.

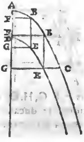
a 167. huius.

Sit iam AE, EF, FG: &c. terminorum continuatim minoris inæqualitatis: dico parabolas nusquam sibi occurrere: ponatur enim LA latus rectum parabolę ABC, & ME, latus rectum parabolæ EHI, quia igitur EB, FH quadrata æqualia sunt, rectangula quoque LAE, MEF æqualia sunt: & cùm AE minor ponatur EF, erit LA maior quàm ME: vnde nusquam [b] conuenient sectiones.



b 166. huius.

PROPOSITIO CCCXXXIII.



ESto ABC parabolæ axis AD, in quo sumptæ cuiuis parti AD, demittantur æquales diametri BE.

Dico D,E,E puncta esse ad parabolam æqualem parabolæ ABC.

Demonstratio.

DVctis ordinatim BF, ponantur EG, parallelæ. Quoniam igitur AD lineæ, æqualis est BE id est FG, dempta vel addita communi FD, rectę AF æqualis est DG. vnde DG est ad DG, vt AF ad AF, id est vt FB quadratum ad quadratum FB, id est EG quadratum ad quadratum EG. puncta igitur D,E,E, ad parabolam sunt, quia verò tam AF, DG, quàm

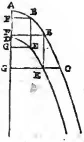
quàm FB, GE lineæ inter se æquales sunt, adeoque FB quadratum æquale quadrato GE, latera quoque recta axium AD, DG æqualia sunt, vnde & [a] parabolæ æquales. [a Per def. 6.]

PROPOSITIO CCCXXXIV.

Iisdem positis:

Dico parabolas illas nusquam conuenire.

Demonstratio.



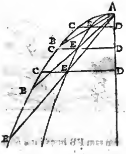
Ponatur in parabola DEE ordinatim ad axem DG, linea GE occurrens ABC parabolę in C. quoniam igitur latera recta vtriusque parabolæ æqualia sunt, & DG linea minor AG, rectangulum quoque sub DG & latere illius recto minus est rectangulo sub AG & latere recto. igitur & EG quadratum minus est quadrato CG: & C punctum cadit intra parabolam ABC: idem cùm de omnibus punctis eiusdem parabolæ ostendi possit, patet sectiones illas nusquam conuenire.

Vocentur autem sectiones eiusmodi, parabolę parallelæ, siue asymptoticæ: quarum proprietates reliquas, & miram cum hyperbola inter asymptotos posita, symbolisationem, octauâ parte huius libri, exhibebimus.

PROPOSITIO CCCXXXV.

Parabolam ABC cuius diameter AD, secent ex A demissæ lineæ quotcunque AB: quæ proportionaliter diuidantur in E.

Dico puncta A,E,E esse ad parabolam.



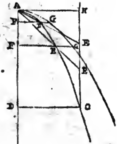
Demonstratio.

Dvcantur per E lineæ DC, ordinatim ad diametrum AD: erunt igitur DC lineę [b] proportionaliter quoque in E diuisæ; & vt DC ad DC, sic DE ad DE. puncta igitur A,E,E [c] ad parabolam sunt. [b 78. huius.] [c 319. huius.]

PROPOSITIO CCCXXXVI.

Esto ABC parabolę diameter AD ad quam ordinatim ponatur DC; demittatur autem ex A lineæ AB, occurrentes CE diametro in E; quam & acta per A contingens, secet in H. dein per B, ordinatim ductis FB, fiat vt HE ad HE, sic FG ad FG.

Dico AG, esse ad parabolam.



Demonstratio

Qvoniam tam FB, AH quàm FA, HE parallelæ sunt, similia sunt triangula AFB, AHE; quare vt HE ad HE, sic FB ad FB: sed vt HE ad HE, sic FG ponitur ad FG, igitur est FG ad FG, vt FB ad FB, vnde [d] puncta A,G,G ad parabolam sunt. [d 319. huius.]

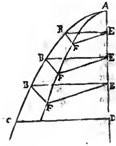
PRO-

PROPOSITIO CCCXXXVII.

Esto ABC parabolæ diameter AD, ad quam ordinatim ponantur lineæ BE; ducantur autem ex B lineæ BF, inter se parallelæ, & proportionales lineis EB.

Dico puncta A,F,F esse ad parabolam.

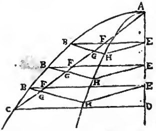
Demonstratio.



Iungantur EF: Quoniam tam FB lineæ inter se, quàm EB æquidistant, anguli EBF æquales sunt: vnde cùm proportionalia sint latera EB,BF, æquales angulos continentia, triangula quoque EBF inter se similia sunt: adeoque & EF lineæ æquidistantes sunt ad inuicem; & EB lineis proportionales: quadratum igitur EF est ad quadratum EF, vt EB quadratum ad quadratum EB, id est vt AE linea ad lineam AE: vnde puncta A,F,F sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXXVIII.

Esto ABC parabolæ diameter AD, & ordinatim ad illam positæ CD, BE: & EB quidem iuncta AC, diuidat in F: ductis autem parallelis BG, quæ AC lineæ occurrant in G: fiat vt FB ad BG, sic EB ad BH.

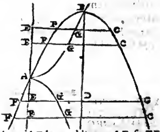


Dico AH puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

Iunganturenim EH: Quoniam EB,BH lineæ proportionales sunt, lineis FB, BG; & angulus FBG communis, triangulis FBG similia sunt triangula EBH: sunt autem & FBG triangula quoque similia, cùm tam FB lineæ inter se, quàm BG rectæ æquidistent: igitur & EBH triangula similia sunt. Quare vt EB ad EB, sic EH ad EH, adeoque per præcedentem puncta AH ad eandem sunt parabolam.

PROPOSITIO CCCXXXIX.



Esto ABC parabolæ axis BD, cui parallela ponatur AE, secans parabolam in A: ducantur autem ad axem ordinatim lineæ EC, & inter FE, EC mediæ ponantur EG.

Dico A,G,B puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

144. huius. Est enim vt AE linea ad lineam AE, sic FEC rectangulū ad rectangulum FEC. igitur & EG quadratum est ad quadratum EG, vt AE linea ad lineam AE: quare A,G,G puncta ad parabolam sunt.

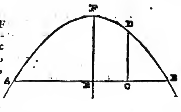
PRO-

PROPOSITIO CCCXL.

Datis rectis A B, C D se mutuo decussantibus, inuenire parabolam cuius D C data sit diameter.

Constructio & demonstratio.

Diuisâ A B bifariam in E, ducatur E F parallela C D. fiatque vt A E B rectangulum ad rectangulum A C B, sic E F linea ad lineam D C. patet A,F,D, B puncta esse ad [a] parabolam quæsitam, cuius diameter est D C.



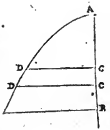
[a] Ex conuersa 47. huius.

PROPOSITIO CCCXLI.

Dato A B latere recto, exhibere illius parabolam.

Constructio & demonstratio.

Secetur A B vtcunque in C C, & ex C lineæ erigantur C D, vt C D quadrata æqualia sint rectangulis C A B; singula singulis: patet A,D,D puncta [b] esse ad parabolam quæsitam.



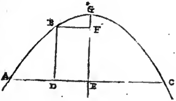
[b] 209. huius.

PROPOSITIO CCCXLII.

Datis tribus punctis A,B,C non in directum positis, & linea B D, quæ per aliquod ex datis punctis transeat, oportet parabolam describere per A,B,C puncta cuius aliqua sit diameter B D.

Constructio & demonstratio.

Iuncta A C secetur bifariam in E, ponaturque E F parallela B D, & B F recta A C: fiat autem vt A E quadratum ad quadratum B F, sic E G linea ad lineam F G. describaturque per B, G, C parabola cuius diameter sit B D, patet illam quoque per [c] A transire. Igitur, &c. Quod erat faciendum.



[c] Ex 1. huius.

PARABOLÆ

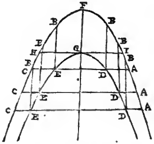
PARS OCTAVA.

Miram exhibet parabolarum parallelarum, cum hyperbola inter asymptotos constituta, symbolisationem.

PROPOSITIO CCCXLIII.

SIt ABC parabolæ axis FG & ordinatim ad illũ applicata HGI: ductisque HI, parallelis CA, quadrato HG æqualia fiant rectangula CEA, CDA.

Dico E, G, D puncta esse ad parabolam æqualem parabolæ ABC.



Demonstratio.

ERigantur ex D & E, diametri EB, DB. quoniam æquidistãt HI, CA, & HG quadrato id est HGI rectangulo æqualia sunt rectangula CEA, siue CDA, diametri[a] quoque FG, BE, BD æquales sunt: quare & [b] puncta E, G, D ad parabolam, æqualem parabolæ ABC.

a Ex 47. huius.
b 333. huius.

PROPOSITIO CCCXLIV.

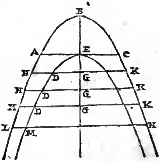
EAdem posita sint quæ priùs:

Dico parabolas illas in infinitum productas magis semper ad inuicem accedere, nusquam tamen occurrere.

Demonstratio.

CVm enim per præcedentem æquales sint parabolæ ABC, DEF, latera recta [c] quoque illarum æqualia sunt, quare nusquam, [d] in infinitum productæ concurrent: quod verò magis semper ad inuicem accedant sic ostendo. ponantur ad BG diametrum in parabola ABC, ordinatim HK, LN; & LN quidem remotior sit à vertice B, quàm HK. æqualia igitur sunt rectangula HDK, LMN ex hypothesi. quare HD est ad LM, vt MN ad DK; sed MN maior est DK, quia LN, maior est HK (vtpote remotior à vertice B,) recta igitur HD quoque maior est LM.

c Per defin.
d 334. huius.

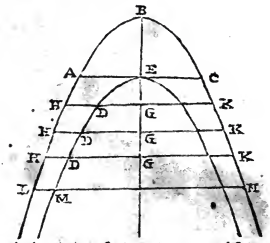


Similiter si remotior quæuis à vertice B, parallela assumatur, ostendetur LM maiorem esse quauis sibi æquidistante infra se posita; magis igitur semper ad inuicem accedunt parabolæ ABC; DEF: asymptoticæ igitur sunt parabolæ ABC, DEF.

PRO-

PROPOSITIO CCCXLV.

EAdem positâ figurâ: propositum sit datæ parabolæ parallelam siue asymptoticam describere.



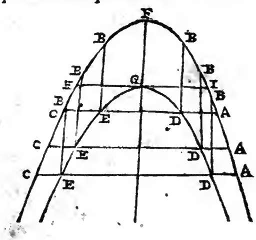
Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabola data: ponatur in illa diameter BE ad quam ordinatim applicetur AEC. positisque AC parallelis, HK: secentur HK in D & F, vt tam HDK quàm HFK, rectangula æqualia sint quadrato AE: constat ex antè demonstratis, DEF puncta esse ad parabolam parallelam parabolæ ABC. fecimus igitur quod fuit postulatum.

PROPOSITIO CCCXLVI.

ASsumptâ figurâ propositionis 343. sint ABC, DEG parabolę parallelæ seu asymptoticę, & quæuis ponantur æquidistantes ECDA.

Dico rectangula CEA, inter se, vti & CDA rectangulis æquari.



Demonstratio.

ERigantur ex D & E diametri DB, EB; quoniam igitur parallelæ sunt diametri ABC, DGE, æquales sunt diametri BE, DB vti ex ipso ortu constat; sed quam rationem diametri DB, BE seruant, eandem quoque continent rectangula CEA, CDA; æqualia igitur sunt rectangula CEA inter se, vti & rectangulis CDA.

Corollarium.

EX dictis sequitur rectas CE, DA esse inter se æquales. demonstratio patet, cum CEA, CDA rectangula æqualia sint.

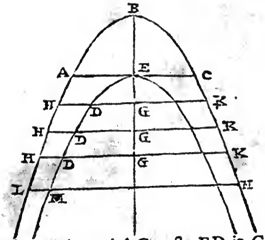
PROPOSITIO CCCXLVII.

PArallelarum parabolarum diametri omnes communes sunt.

Demonstratio.

ASsumatur figura propositionis 344. sint ABC, DEF parabolę parallelæ, & quæuis ponatur diameter BG in parabola ABC; sint autem ad illam applicatæ ordinatim HK, occurrentes parabolæ DEF in D & F. dico FD lineas in G bifariam diuidi: cùm enim HK per constructionem ordinatim ponantur ad BG, diametrum, rectæ HK in G bissectæ sunt: sunt autem æquales ostensæ, HD, a FK; residuæ igitur DG, GF quoque æquales sunt, adeoque ad BG ordinatim applicatæ. communis igitur est BG diameter vtrique parabolæ. a Per Coroll. 346. huius.

PROPOSITIO CCCXLVIII.



Contingens parabolis parallelis intercepta in contactu bissecatur.

Demonstratio.

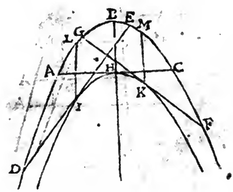
Ponatur per E punctum quoduis in perimetro parabolæ DEF assumptum contingens AC; dico AC in E bissecari, positâ per E, diametro BG, ponatur quæuis DF, æquidistans AC; occurrens parabolæ ABC in H & K. quoniam igitur FD, æquidistat contingenti AC; recta FD in G, [a] bissecta est; sunt autem æquales HD, FK: tota igitur HK in G bissecta est: quare & AC [b] æquidistans HK, ab eadem diametro in E bissecatur.

a 15. huius. b Defin. 3. aut 4. huius.

PROPOSITIO CCCXLIX.

Triangula quæ fiunt à contingentibus, parabolis parallelis intercepti, & diametris per contactuum puncta ductis, inter se æqualia sunt.

Demonstratio.



Sint ABC, HIK parabolæ parallelæ: & IHK parabolam contingant AC, DE, FG: ponantur autem per H, I, K, contactus diametri BH, LI, MK, intelliganturque iungi FMG, CBA, DLE: dico triangula FMG, CBA, DLE inter se esse æqualia: quoniam enim parabolæ parallelæ sunt, diametri LI, BH, MK æquales sunt: sunt autem AC, DE, FG contingentes in H, I, K [c] bifariam diuisæ; æqualia igitur sunt [d] triangula ABC, FMG, DLE.

c 348. huius. d 218. huius.

PROPOSITIO CCCL.

Eadem positâ figurâ: sint in ABC parabola lineæ tres AC, DE, FG, æqualia auferentes segmenta: secentur autem AC, DE, FG bifariam in H, I, K.

Dico puncta H, I, K esse ad parabolam parallelam parabolæ ABC.

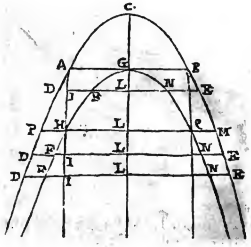
Demonstratio.

Erigantur ex H, I, K punctis diametri HB, MK, LI: quoniam æqualia sunt segmenta DAE, ABC, GMF, triangula quoque DLE, ABC, FMG, æqualia sunt: quare & diametri LI, BH, MK æquales sunt, & puncta H, I, K ad parabolam parallelam ABC.

PROPOSITIO CCCLI.

SInt ABC, FHG parabolæ parallelæ, recta autem AB contingat in G parabolam FHG; ponanturque DE æquidistantes AB. Dico AG quadrato, æquari rectangula singula DFE.

Demonstratio.



POnatur AH æquidistans diametro CG, occurrensque FHG parabolę in H puncto per quod recta ponatur PHQ parallela AB: vt CG ad AH, sic AGB rectangulum id est quadratum AG, (est enim AB contingens in G bissecta) ad rectangulũ [a] PHM: æquales autem [b] sunt diametri CG, AH, igitur & PHM rectangulum æquale est quadrato AG. sed PHM, DFE rectangula [c] æqualia sunt, quadrato igitur AG æqualia sunt rectangula singula DFE.

a 47. huius: b Ex 333. huius.

c 346. huius.

PROPOSITIO CCCLII.

IIsdem positis: recta AH occurrat DE lineis in I: Dico DIE rectangula æquari quadratis FL.

Demonstratio.

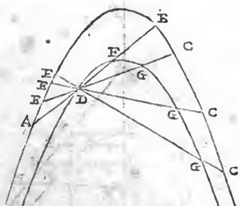
QVoniam DE lineæ in L diuisæ sunt bifariam, & non bifariam in F, quadrata LD ęqualia sunt quadratis LF vnà cum rectangulis DFE: eadem de causa quadrata LD æqualia sunt quadratis LI vnà cum rectangulis DIE: rectangula igitur DFE vnà cum quadratis FL æqualia sunt quadratis LI simul cum rectangulis DIE: æqualia autem ostensa sunt [d] rectangula DFE, quadratis LI id est AG, residua igitur rectangula DIE residuis quadratis FL æqualia sunt.

d 351. huius.

PROPOSITIO CCCLIII.

INtra parabolam ABC assumpto quouis puncto D ponantur per D lineæ quotcunque AB, EC: fiant autem AD, ED lineis æquales BF, CG.

Dico D, F, G puncta esse ad parabolam parallelam parabolæ ABC.

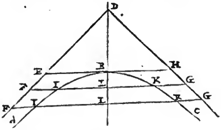


DEmonstratio manifesta est ex Coroll. huius, vbi demonstratũ est positis parabolis parallelis ABC, DFG rectas ED, GC, item AD, FB esse inter se æquales.

Applicatio parabolarum parallelarum ad hyperbolam inter asymptotos positarum.

Applicatio propositionis 343. *huius.*

PROPOSITIO CCCLIV.



ANgulum E D H subtendat linea E H, qua bifariam diuisa in B, ponantur E H, æquidistantes F G, quæ in I secentur, vt F I G rectangula, æqualia sint quadrato E B.

Dico B I I ad eandem esse hyperbolam.

DEmonstratio habetur in libro nostro de hyperbola propositione 14.

Applicatio propositionis 344. *huius.*

PROPOSITIO CCCLV.

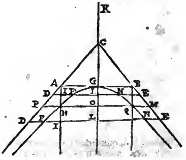
EAdem positâ figurâ.

Dico E D, D H lineas in infinitum productas, magis semper ac magis ad hyperbolam accedere, nusquam autem conuenire.

DEmonstratio habetur in lib. nostro de hyperbola propos. 15.

Applicatio propositionum 346. 351. *huius.*

PROPOSITIO CCCLVI.



AB recta inter asymptotos A C, C B hyperbolæ F G N constituta in G vertice diametri K G diuisa sit bifariam, & A B quidem æquidistent D F E.

Dico D F A rectangula æquari inter se vti & rectangulis D N E, siue quadrato A G.

DEmonstrationem vide in lib. de hyperbola propos.

Corol-

Corollarium.

EX his quoque ſequitur, lineas DF, NE eſſe inter ſe æquales.

Applicatio propoſ. 352. huius.

PROPOSITIO CCCLVII.

IIſdem poſitis:
Dico DIE rectangula æquari quadratis LF.

DEmonſtrationem vid. lib. de hyp. prop. 17.

Applicatio propoſitionis 348.

PROPOSITIO CCCLVIII.

OMnis contingens hyperbolam & cum aſymptotis conueniens in puncto contactus bifariam ſecatur.

DEmonſtrationem vid. lib. de hyperb. 29.

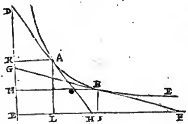
Applicatio propoſitionis 349. huius.

PROPOSITIO CCCLIX.

HYperbolam ABC inter aſymptotos ED, EF conſtitutam contingant duæ lineæ DAH, FBG quæ triangula conſtituant HED, FEG.

Dico illa eſſe inter ſe æqualia.

DEmonſtrationem vide in libro de hyperbola, parte ſecunda.

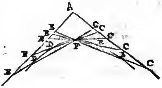


Applicatio propoſitionis 353. huius.

PROPOSITIO CCCLX.

INtra angulum BAC punctum aſſumatur quoduis F, per quod rectæ ponantur BFC, pertinentes ad vtrumque anguli latus in C & B: fiantq; BF lineis æquales CE, & viciſſim CF æquales DB:

Dico puncta EFD eſſe ad hyperbolam cuius aſymptoti ſint BA, AC.



DEmonſtrationem vide in hyperbola parte, vltima.

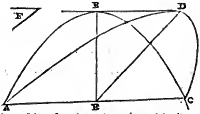
PRO-

PROPOSITIO CCCLXI.

Datæ parabolæ rectæ ABC, æqualem exhibere inclinatam, cuius ordinatim ad diametrum positæ datum angulum constituant.

Parabolam inclinatam voco, omnem parabolam quæ lineas habet ordinatim addiametros positas ad angulos obliquos: porro nullas dari parabolas ex natura sua inclinatas, ex sequenti propositione constabit.

Constructio & demonstratio.

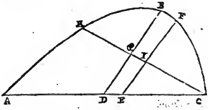


Sit ABC parabolæ axis BE, & ordinatim ad illum posita AC: positaque per B contingente, ducatur ad illam linea ED, quæ angulum EDB æqualem faciat dato F & describatur parabola ADE, habens ED diametrum, dico illam satisfacere petitioni. cùm enim vtraque parabola, communem habeat subtensam AC, & eandem altitudinem, constat illas inter se esse æquales: quod autem ADE parabola sit inclinata, ex eo patet quod AC linea & illi æquidistantes, diametrum DE ad angulos secent obliquos.

PROPOSITIO CCCLXII.

Datæ parabolæ inclinatæ axem exhibere.

Constructio & demonstratio.



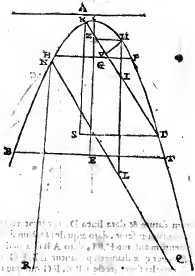
Sit ABC parabolæ inclinatæ diameter BD, & ad illam ordinatim posita AC: ducatur autem ex C linea CH normalis ad BD. diuisaque CH bifariam in I, ponatur per I recta IF æquidistans BD: dico IF axem esse parabolæ inclinatæ. cùm enim FE æquidistet BD diametro, recta FE quoque sectionis diameter est; quia verò lineam HC, bifariam & ad rectos secat angulos, constat FE axem esse parabolæ ABC. exhibuimus igitur datæ parabolæ inclinatæ axem. (a 1. Defin. huius.)

Hinc patet nullas prorsus inclinatas dari parabolas quæ diuersæ sint natura à rectis: vtriq; enim essentialis illa & primaria passio communis, quòd ordinatim ad axem applicata, eundem ad angulos secent rectos. id quod etiam intelligi velim de hyperbola & ellipsi: similiter enim in omni sectione coni, siue hyperbola, siue ellipsis fuerit, ostenditur, ordinatim ad axes applicatas eosdem ad angulos rectos diuidere: vnde nullas omnino dari coni sectiones natura sua inclinatas, siue quæ diuersam à rectis habeant naturam constat.

PROPOSITIO CCCLXIII.

IN data parabola diametrum assignare, cui data linea inseruiat pro latere recto, modò minor ea non existat latere recto axeos datæ parabolæ.

Constructio & demonstratio.



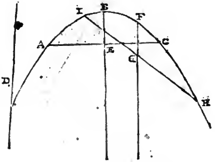
DAta sit linea A & parabola BCD. oporteat exhibere diametrum quæ latus rectum habeat æquale datæ lineæ A. factum sit quod petitur; & ML sit diameter, cui A linea inseruiat pro latere recto. Inueniatur CG axis[a] parabolę BCD, æqualis lateri recto: lineæ autem CG æqualis fiat MI, & ML, CE lineæ singulæ æquales rectæ A: ponanturque per L, & E, item G & I ordinatim ad diametros suas lineæ HP, KD, BT, NQ: quoniam igitur MI, CG lineæ æquales sunt, segmenta [b] KMD, HCP æquantur: posita igitur ex D, linea DS normali ad demissam ex K diametrum KS, rectę HP, SD [c] æquales sunt. similiter æquales ostendentur RQ, BT. Rursum cùm ML æqualis ponatur lateri suo recto A, & NL ordinatim ad ML, rectę NL, [d] ML æquales sunt. quia verò MI æqualis est CG, & CG data est vti & ML hoc est NL, recta quoque KI data est; cùm sit ML ad MI, vt NL quadratum ad quadratum KI: & quia datæ quoque sunt lineæ CG, CE adeoq; & HP, BT, rectæ quoque SD, RQ (quæ illis ostensæ sunt æquales) datæ sunt: igitur cùm anguli KSD, NRQ recti sint, data quoq; sunt triangula KSD, NSQ, & anguli SKD, RNQ id est KIM, NLM: componendo igitur datâ ML rectâ æquali A, & punctis diuisionum I & L; applicentur ad I & L, datæ lineæ KD, NQ in datis angulis KIM, NLM; rectæ autem KD, NQ bissectæ sint in I & L. tum per K, M, D, puncta parabola describatur, transibit illa per N & Q, cùm per resolutionem ostensum sit esse MI ad ML, vt KI quadratum ad quadratum NL: inueniatur deinde parabolæ KMD axis CG: & ML diameter transferatur in parabolam datam, ponaturque ab axe eiusdem, internallo ZM normalis ad axem: patet per resolutionem, positione inuentam esse diametrum cui data A seruiat pro latere recto.

a 123. huius.
b 118. & 240. huius.
c 159. huius.
d 9. huius.

PROPOSITIO CCCLXIV.

DAtam lineam applicare ad parabolam, quæ segmentum auferat dato æquale. oportet autem lineam D, non minorem esse lineâ AC.

Constructio & demonstratio.



SIt ABC segmentum datum & data linea D: oporteat rectam D applicare ad parabolam, vt segmentum auferat, dato æquale: factum sit quod petitur, & IH linea æqualis D, segmentum auferat HFI, dato ABC æquale: bisecentur AC, HI in E & G, punctis, per quæ diametri ponantur EB, FG. quoniam igitur segmenta ABC, HFI æqualia sunt, rectę a BE, FG quoque sunt æquales; datæ igitur sunt BE & IG, dimidia HI siue D. fiant iam BE, IG, FK proportionales. data ergo etiam est FK: inueniatur igitur per præcedentem diameter, cuius FK latus rectum est & ponatur in parabola ABC; factaque FG æquali BE ponatur per G ordinatim linea HI: patet per resolutionem & constructionem, HI lineam rectę D, & HFI segmentum dato ABC æquale esse: datam igitur lineam, &c. Quod erat faciendum.

a 118. & 160. huius.

Scholion.

DEstinaueram duas alias Partes, quæ parabolam concernunt, præsenti libro adiungere; sed cùm aduertam librum hunc, quo Parabolicæ sectionis proprietates prosecuti sumus, in molem nimis magnam excrescere, quàm vt libris reliquis de coni sectionibus par sit, in alios libros eas partes transtuli; exigente id maximè argumento materiæ, quam tales libri explanare intendunt.

Pars autem prima symbolizationes ac similitudines complectitur, quæ sunt inter parabolam ac spiralem figuram; mira enim est inter has conformitas; neque à mea sententia recedere audeo, quæ mihi planè persuasum est Archimedem in eam notitiam peruenisse quam nobis reliquit, quæ per contingentem spiralis figuræ lineam rectam exhibet, quæ circuli circumferentiæ sit æqualis. habet præterea parabola multas alias proprietates, cum spirali Archimedæa communes, non solùm secundùm primam circulationem, sed secundùm quotcunque numero exhibitas; quas fusius considerare poteris suo loco.

Secunda pars quæ huc spectabat agit de parabolis virtualibus, quarum nomenclaturam desumpsi à proprietatibus illarum, quæ ita similes sunt proprietatibus verarum parabolarum, vt ab ijsdem non discrepent, nisi solo aspectu vt ita dicam; nam æquales sunt secundùm superfi-

cies

cies considerata, & secundùm ordinatim applicatas ad diametrum; in hoc tamen differunt, quod earum diametri linea sint parabolica; in parabolis autem qua sectiones conica sunt, axes vel diametri recta sunt linea. Coniecimus autem tractatum huius materia in librum de ductibus planorum in plana, eò quod vsus virtualium parabolarum, spectet ad aquationes formandas cum corporibus, qua partes Cylindrica sunt, concauam habentes superficiem, vel conuexam. Sed de his plura suis locis.

Libri quinti finis.